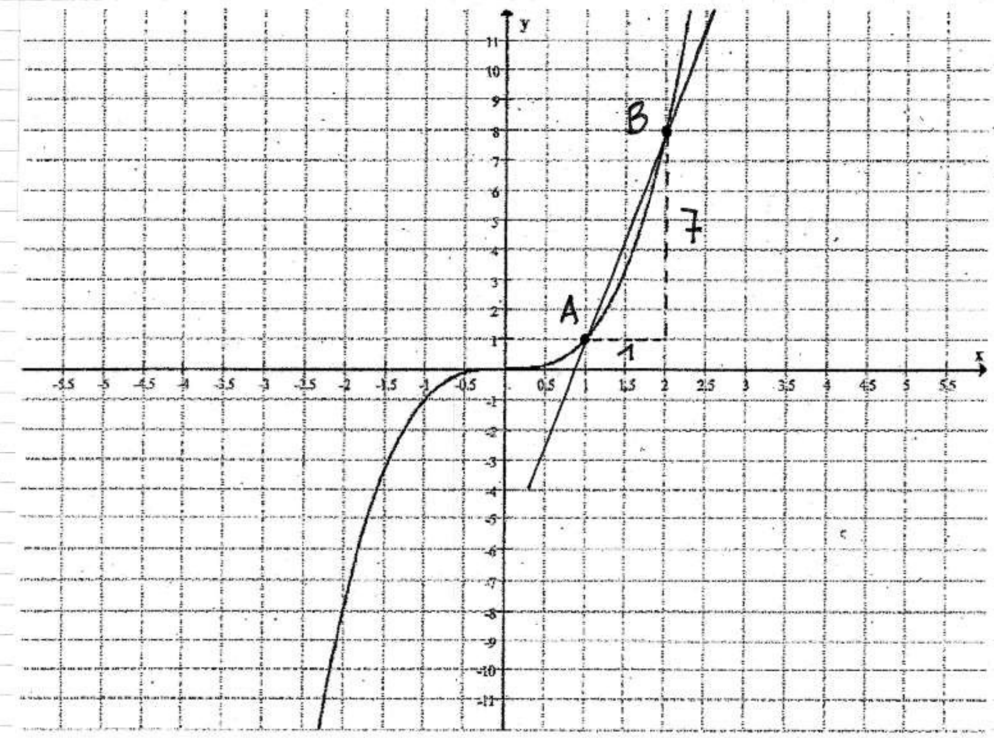
Lycée Jean-Piaget

Série 3
Analyse
Dérivée d'une fonction réelle
Corrigé des exercices

Exercice 1



1) La pente de la sécante (AB) vaut $\frac{7}{1}=7$.

2) L'expression fonctionnelle de la courbe représentée est $f(x)=x^3$.
La pente de la tangente à la courbe en A est $f'(1)$.
On a $f'(x)=3x^2$. Ainsi la pente de la tangente à la courbe en A est $f'(1)=3\cdot 1^2=3$.

3) La pente de la tangente à la courbe en B est $f'(2)=3\cdot 2^2=14$.

Exercice 2

1) $f(x)=5x+1$: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(x+h)+1-(5x+1)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5x+5h+1-5x-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h}{h}=\lim_{h\to 0}5=5.$$

2) $f(x)=8x^2-5x$: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{8(x+h)^2-5(x+h)-(8x^2-5x)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{8x^2+16xh+8h^2-5x-5h-8x^2+5x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{16xh+8h^2-5h}{h}=\lim_{h\to 0}(16x+8h-5)=16x-5.$$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{hx^2(x+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-2x+h}{x^2(x+h)^2}=\frac{-2x}{x^2\cdot x^2}=-\frac{2}{x^3}.$$

Exercice 3

1) $f(x)=2x^5-4x+3$: $f'(x)=2\cdot 5x^4-4=10x^4-4$.

2) $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{6}x^2+17$: $f'(x)=4x^3-\frac{4}{3}\cdot 3x^2-\frac{7}{6}\cdot 2x=4x^3-4x^2-\frac{7}{3}x$.

3) $f(x)=\dfrac{2-5x}{2x-1}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=2-5x$ et $v=2x-1$; on a $u'=-5$ et $v'=2$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{-5(2x-1)-2(2-5x)}{(2x-1)^2}=\frac{-10x+5-4+10x}{(2x-1)^2}=\frac{1}{(2x-1)^2}.$$

4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=x$ et $v=x^2+1$; on a $u'=1$ et $v'=2x$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

5) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x}{5x^2-8x}=\dfrac{x(2x-5)}{x(5x-8)}=\dfrac{2x-5}{5x-8}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=2x-5$ et $v=5x-8$; on a $u'=2$ et $v'=5$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{2(5x-8)-5(2x-5)}{(5x-8)^2}=\frac{10x-16-10x+25}{(5x-8)^2}=\frac{9}{(5x-8)^2}.$$

6) $f(x)=\dfrac{5}{2x^2-1}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=5$ et $v=2x^2-1$; on a $u'=0$ et $v'=4x$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{-5\cdot 4x}{(2x^2-1)^2}=\frac{-20x}{(2x^2-1)^2}.$$

7) $f(x)=\sin(x)$: $f'(x)=\cos(x)$.

8) $f(x)=\tan(x)\cdot\cos(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\cos(x)=\sin(x)$: $f'(x)=\cos(x)$.

9) $f(x)=\dfrac{\sin(x)-1}{2\sin(x)+1}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=\sin(x)-1$ et $v=2\sin(x)+1$; on a $u'=\cos(x)$ et $v'=2\cos(x)$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{\cos(x)(2\sin(x)+1)-(\sin(x)-1)\cdot 2\cos(x)}{(2\sin(x)+1)^2}=$$

$$=\frac{2\cos(x)\sin(x)+\cos(x)-2\cos(x)\sin(x)+2\cos(x)}{(2\sin(x)+1)^2}=\frac{3\cos(x)}{(2\sin(x)+1)^2}.$$

10) $f(x) = \dfrac{1 - x\cdot\cos(x)}{x\sin(x)} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 1 - x\cdot\cos(x)$ et $v = x\sin(x)$; on a

$$u' = -1\cdot\cos(x) - x\cdot(-\sin(x)) = x\sin(x) - \cos(x) \quad \text{et} \quad v' = 1\cdot\sin(x) + x\cos(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x\sin(x) - \cos(x))x\sin(x) - (1 - x\cos(x))(\sin(x) + x\cos(x))}{(x\sin(x))^2} =$$

$$= \frac{x^2\sin^2(x) - x\cos(x)\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x) + x\cos(x)\sin(x) + x^2\cos^2(x)}{x^2\sin^2(x)} =$$

$$= \frac{x^2\overbrace{(\cos^2(x) + \sin^2(x))}^{=1} - \sin(x) - x\cos(x)}{x^2\sin^2(x)} = \frac{x^2 - \sin(x) - x\cos(x)}{x^2\sin^2(x)}.$$

Exercice 4

L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 est donnée par $y = mx + h$, où $m = f'(x_0)$ et $h = f(x_0) - mx_0$.

1) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ en $x_0 = 1$: $f(x_0) = 5\cdot1^2 - 6\cdot1 + 2 = 1$;

$f'(x) = 10x - 6$; $f'(x_0) = 10\cdot1 - 6 = 4 \Rightarrow m = 4$;

$h = f(x_0) - mx_0 = 1 - 4\cdot1 = -3$

$\Rightarrow$ tangente: $y = 4x - 3$.

2) $f(x) = \dfrac{3x-2}{5x+1}$ en $x_0 = 0$: $f(x_0) = \dfrac{-2}{1} = -2$;

$f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 3x - 2$ et $v = 5x + 1$; on a $u' = 3$ et $v' = 5$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3(5x+1) - 5(3x-2)}{(5x+1)^2} = \frac{15x + 3 - 15x + 10}{(5x+1)^2} =$$

$$= \frac{13}{(5x+1)^2} \text{ ; } f'(x_0) = \frac{13}{2^2} = \frac{13}{4} \Rightarrow m = \frac{13}{4} \text{ ;}$$

$h = f(x_0) - mx_0 = -2 - \frac{13}{4}\cdot 0 = -2$

$\Rightarrow$ tangente : $y = \frac{13}{4}x - 2$.

3) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 9$: $f(x_0) = \sqrt{9} = 3$;

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{2\cdot3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow m = \dfrac{1}{6}$;

$h = f(x_0) - mx_0 = 3 - \frac{1}{6}\cdot 9 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ tangente: $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

Exercice 5

1) $f(x)=(2x+1)^2$: $f'(x)=2(2x+1)\cdot(2x+1)'=2(2x+1)\cdot 2=4(2x+1)$.

2) $f(x)=(x^5+1)^4$: $f'(x)=4(x^5+1)^3\cdot(x^5+1)'=4(x^5+1)^3\cdot 5x^4=20x^4(x^5+1)^3$.

3) $f(x)=(6x^3-5)^{-2}$: $f'(x)=-2(6x^3-5)^{-3}\cdot(6x^3-5)'=-2(6x^3-5)^{-3}\cdot 18x^2=$
$=-36x^2(6x^3-5)^{-3}$.

4) $f(x)=\sqrt{3-2x^4}$: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3-2x^4}}\cdot(3-2x^4)'=\frac{1}{2\sqrt{3-2x^4}}\cdot(-8x^3)=-\frac{4x^3}{\sqrt{3-2x^4}}$.

5) $f(x)=\sqrt[3]{2x^2+2}=(2x^2+2)^{\frac{1}{3}}$: $f'(x)=\frac{1}{3}(2x^2+2)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(2x^2+2)'=\frac{1}{3}(2x^2+2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x=$
$=\frac{4}{3}x(2x^2+2)^{-\frac{2}{3}}$.

6) $f(x)=(\sqrt{x}-1)^5$: $f'(x)=5(\sqrt{x}-1)^4\cdot(\sqrt{x}-1)'=5(\sqrt{x}-1)^4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5(\sqrt{x}-1)^4}{2\sqrt{x}}$.

7) $f(x)=2\sin(5x)$: $f'(x)=2\cos(5x)\cdot(5x)'=2\cos(5x)\cdot 5=10\cos(5x)$.

8) $f(x)=\cos^3(x)$: $f'(x)=3\cos^2(x)\cdot(\cos(x))'=3\cos^2(x)\cdot(-\sin(x))=-3\cos^2(x)\sin(x)$.

9) $f(x)=\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$: $f'(x)=\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)'=\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{2x}{2}=x\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

10) $f(x)=\sqrt[3]{\tan(x)}=(\tan(x))^{\frac{1}{3}}$: $f'(x)=\frac{1}{3}(\tan(x))^{-\frac{2}{3}}\cdot(\tan(x))'=\frac{1}{3}(\tan(x))^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}=$
$=\frac{1}{3(\tan(x))^{\frac{2}{3}}\cos^2(x)}$.