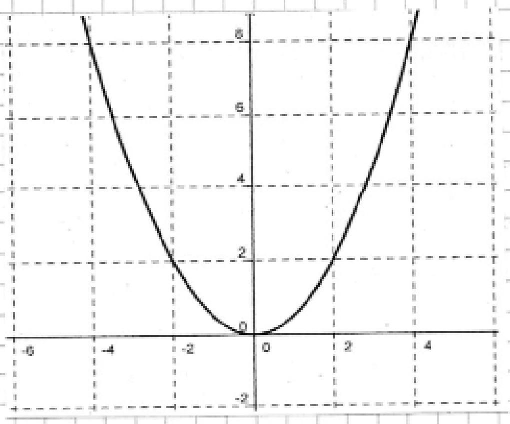
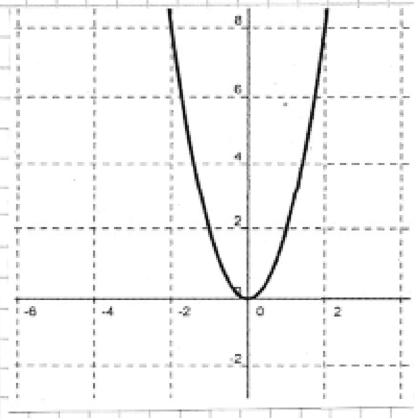
Chapitre 3. Fonctions du 2e degré – Corrigé

Exercice 1

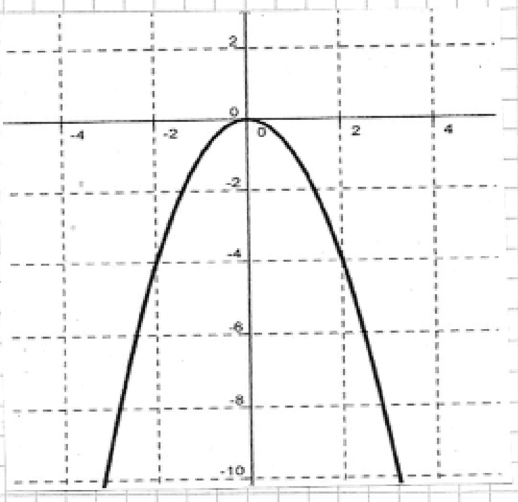
1.



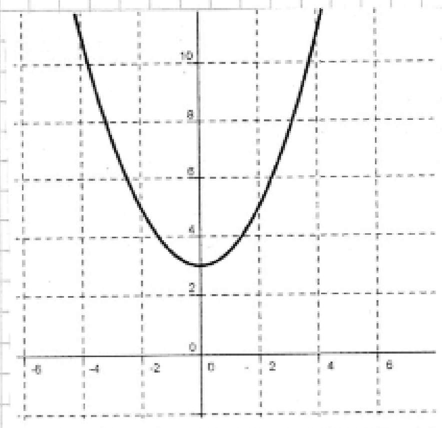
2.



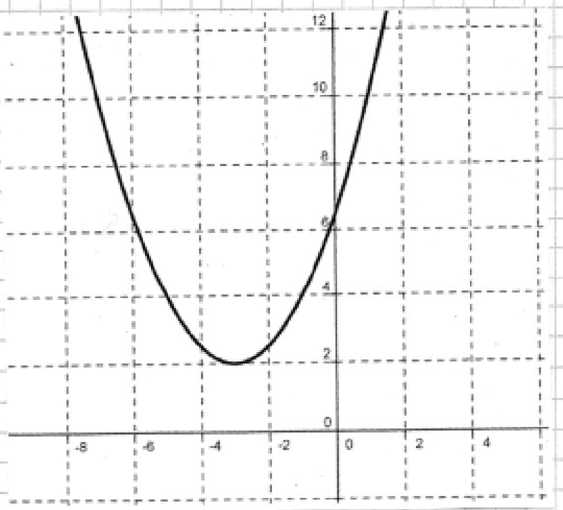
3.



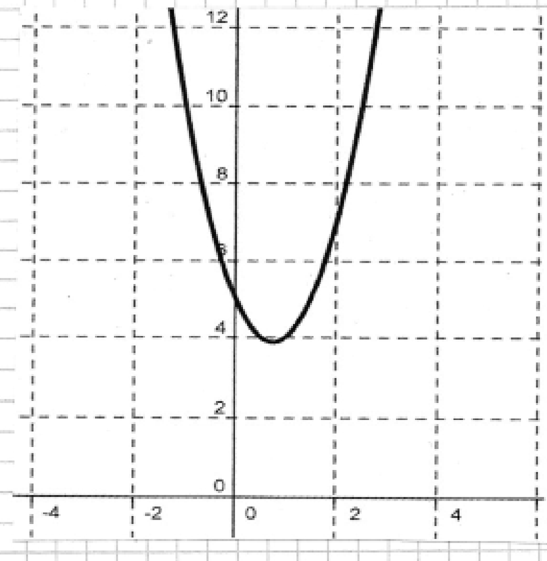
4.



5.



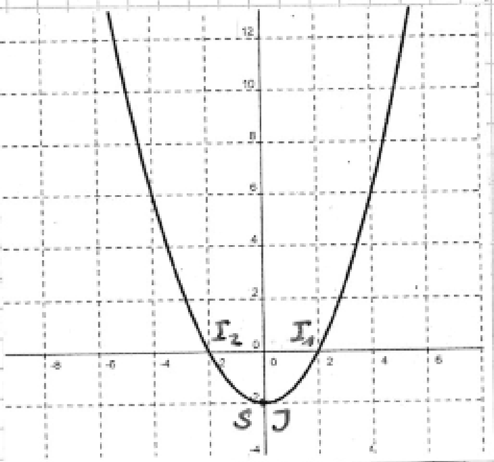
6.



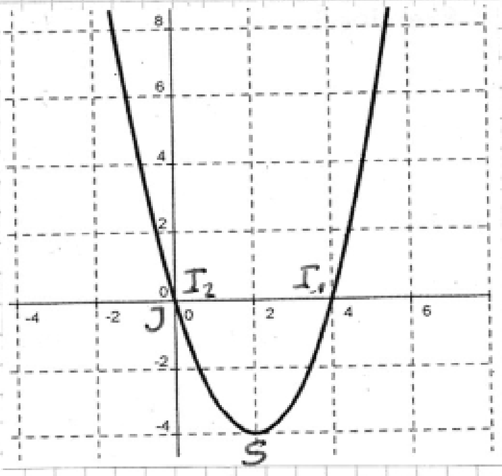
Exercice 2

Pour une fonction du 2e degré écrite sous la forme $f: y = ax^2+bx+c$, le sommet est donné par $S(x_S; y_S)$ avec $x_S = -\frac{b}{2a}$ et $y_S = \frac{4ac-b^2}{4a}$.
L'intersection avec l'axe x sont $I_1(x_1;0)$ et $I_2(x_2;0)$ où x_1 et x_2, s'ils existent, sont les solutions de $ax^2+bx+c=0$.
L'intersection avec l'axe y est $J(0;c)$.

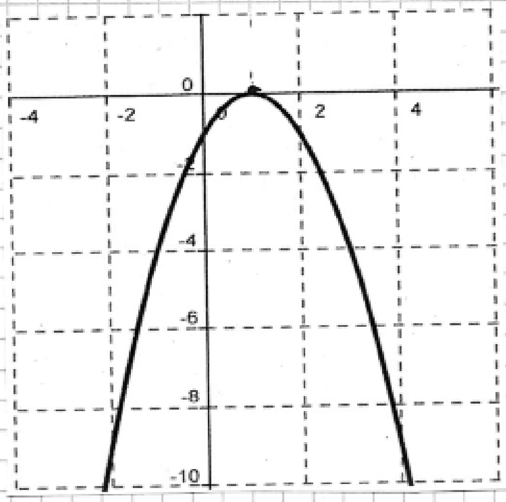
1. $f_1: y=\frac{1}{2}x^2-2$: $a=\frac{1}{2}, b=0, c=-2 \Rightarrow x_S = -\frac{0}{2\cdot\frac{1}{2}}=0$ et $y_S=\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2)-0^2}{4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{-4}{2}=-2$
$\Rightarrow S(0;-2)$;
$\frac{1}{2}x^2-2=0 \Rightarrow b^2-4ac = 0^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2)=4>0$
$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0+\sqrt{4}}{2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}=2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0-\sqrt{4}}{2\cdot 1}=-2$
$\Rightarrow I_1(2;0)$ et $I_2(-2;0)$; de plus $J(0;-2)$:



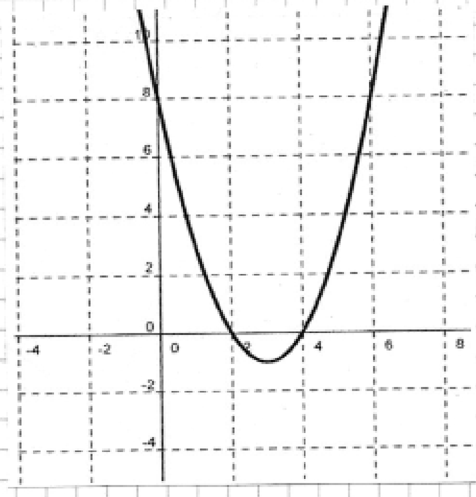
2. $f_2: y=x(x-4)=x^2-4x$: $a=1, b=-4, c=0 \Rightarrow x_S=-\frac{-4}{2\cdot 1}=2$ et $y_S=\frac{4\cdot 1\cdot 0-(-4)^2}{4\cdot 1}=\frac{-16}{4}=$
$=-4 \Rightarrow S(2;-4)$;
$x^2-4x=0 \Rightarrow b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 0=16>0$
$\Rightarrow x_1=\frac{4+\sqrt{16}}{2}=\frac{4+4}{2}=4$ et $x_2=\frac{4-\sqrt{16}}{2}=\frac{4-4}{2}=0$
$\Rightarrow I_1(4;0)$ et $I_2(0;0)$; de plus $J(0;0)$:



3. $f_3 : y = -x^2 + 2x - 1$: $a = -1, b = 2, c = -1 \Rightarrow x_S = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = \frac{2}{2} = 1$ et $y_S = \frac{4\cdot(-1)(-1) - 2^2}{4\cdot(-1)} =$
$= \frac{4-4}{-4} = 0 \Rightarrow S(1;0)$;
$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1) = 4 - 4 = 0$
$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = x_S = 1 \Rightarrow I(1;0)$; de plus $J(0;-1)$:



4. $f_4 : y = x^2 - 6x + 8$: $a = 1, b = -6, c = 8 \Rightarrow x_S = -\frac{-6}{2} = 3$ et $y_S = \frac{4\cdot1\cdot8 - (-6)^2}{4\cdot1} = \frac{32-36}{4} =$
$= -1 \Rightarrow S(3;-1)$;
$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot1\cdot8 = 36 - 32 = 4 > 0$
$\Rightarrow x_1 = \frac{6+\sqrt{4}}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{6-\sqrt{4}}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$
$\Rightarrow I_1(4;0)$ et $I_2(2;0)$; de plus $J(0;8)$:



Exercice 3

Pour une fonction du 2e degré écrite sous la forme $f: y = ax^2+bx+c$, le sommet est donné par $S(x_S; y_S)$ où $x_S = -\frac{b}{2a}$ et $y_S = \frac{4ac-b^2}{4a}$.
Si la fonction est donnée par $f: y = a(x-m)^2+p$, alors $x_S = m$ et $y_S = p$.
L'axe de symétrie est dans tous les cas la droite verticale $x = x_S$.

1. $y = x^2$: $a=1, b=0, c=0 \Rightarrow x_S = -\frac{0}{2} = 0$ et $y_S = \frac{4\cdot 1\cdot 0 - 0^2}{4} = 0 \Rightarrow \underline{S(0;0)}$;
   axe de symétrie: $\underline{x=0}$.

2. $y = 2x^2+12x+16$: $a=2, b=12, c=16 \Rightarrow x_S = -\frac{12}{2\cdot 2} = -3$ et $y_S = \frac{4\cdot 2\cdot 16 - 12^2}{4\cdot 2} =$
   $= \frac{128-144}{8} = -2 \Rightarrow \underline{S(-3;-2)}$;
   axe de symétrie: $\underline{x=-3}$.

3. $y = \frac{x^2}{3}+5$: $a=\frac{1}{3}, b=0, c=5 \Rightarrow x_S = -\frac{0}{2\cdot\frac{1}{3}} = 0$ et $y_S = \frac{4\cdot\frac{1}{3}\cdot 5 - 0^2}{4\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}}\cdot 5}{\cancel{4/3}} = 5$
   $\Rightarrow \underline{S(0;5)}$;
   axe de symétrie: $\underline{x=0}$.

4. $y = (x+4)^2$: $m=-4$ et $p=0 \Rightarrow \underline{S(-4;0)}$;
   axe de symétrie: $\underline{x=-4}$.

5. $y = 3x^2-12x-15$: $a=3, b=-12, c=-15 \Rightarrow x_S = -\frac{-12}{2\cdot 3} = 2$ et $y_S = \frac{4\cdot 3\cdot(-15)-(-12)^2}{4\cdot 3}$
   $= \frac{-180-144}{12} = -27 \Rightarrow \underline{S(2;-27)}$;
   axe de symétrie: $\underline{x=2}$.

Exercice 4

$f(x) = 2x^2 - 16x - 30$: comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut : $\cup$; elle a donc un minimum ; avec $a = 2$, $b = -16$ et $c = -30$, on a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{2 \cdot 2} = 4$ et $y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot (-30) - (-16)^2}{4 \cdot 2} =$ $= \frac{-240 - 256}{8} = -62 \Rightarrow S(4 ; -62)$; ainsi f est décroissante sur $]-\infty ; 4[$ et croissante sur $]4 ; +\infty[$;

intersection avec l'axe x : on doit résoudre $2x^2 - 16x - 30 = 0$;

$$b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-30) = 256 + 240 = 496 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{16 + \sqrt{496}}{2 \cdot 2} \cong 9,568 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{16 - \sqrt{496}}{2 \cdot 2} \cong -1,568$$

$$\Rightarrow (9,568 ; 0) \text{ et } (-1,568 ; 0) ;$$

intersection avec l'axe y : on met $x = 0 \Rightarrow y = -30 \Rightarrow (0 ; -30)$.

Exercice 5

$f(x) = 3x^2 + 21x + 18$: comme $a = 3 > 0$, la parabole est tournée vers le haut : $\cup$; elle a donc un minimum ; avec $a = 3$, $b = 21$ et $c = 18$, on a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{21}{2 \cdot 3} = -\frac{7}{2}$ et $y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 18 - 21^2}{4 \cdot 3} =$ $= \frac{216 - 441}{12} = -\frac{75}{4} \Rightarrow S\left(-\frac{7}{2} ; -\frac{75}{4}\right)$; ainsi f est décroissante sur $]-\infty ; -\frac{7}{2}[$ et croissante sur $]\frac{7}{2} ; +\infty[$;

intersection avec l'axe x : on doit résoudre $3x^2 + 21x + 18 = 0$;

$$b^2 - 4ac = 21^2 - 4 \cdot 3 \cdot 18 = 441 - 216 = 225 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-21 + \sqrt{225}}{2 \cdot 3} = \frac{-21 + 15}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-21 - \sqrt{225}}{2 \cdot 3} = \frac{-21 - 15}{6} = \frac{-36}{6} = -6$$

$$\Rightarrow (-1 ; 0) \text{ et } (-6 ; 0) ;$$

intersection avec l'axe y : on met $x = 0 \Rightarrow y = 18 \Rightarrow (0 ; 18)$.

Exercice 6

Si on connaît les intersections avec l'axe x : $I_1(x_1;0)$ et $I_2(x_2;0)$, alors l'équation de la parabole s'écrit $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, où a est déterminé avec un autre point.
Si on connaît le sommet : $S(m;p)$, alors l'équation de la parabole s'écrit $y=a(x-m)^2+p$, où a est déterminé avec un autre point.

1. On a $x_1=-2$ et $x_2=6$ $\Rightarrow$ $y=a(x-(-2))(x-6)=a(x+2)(x-6)$;
avec $(0;3)$, en posant $x=0$ et $y=3$ dans $y=a(x+2)(x-6)$, on a
$3=a(0+2)(0-6) \Rightarrow 3=-12a \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$;
l'équation de la parabole est donc $\underline{y=-\frac{1}{4}(x+2)(x-6)}$;
si on la développe, on obtient $y=-\frac{1}{4}(x^2-6x+2x-12)=-\frac{1}{4}(x^2-4x-12)=\underline{-\frac{1}{4}x^2+x+3}$.

2. On a $x_1=-11$ et $x_2=11$ $\Rightarrow$ $y=a(x-(-11))(x-11)=a(x+11)(x-11)$;
avec $(1;3)$, en posant $x=1$ et $y=3$ dans $y=a(x+11)(x-11)$, on a
$3=a(1+11)(1-11) \Rightarrow 3=-120a \Rightarrow a=-\frac{1}{40}$;
l'équation de la parabole est donc $\underline{y=-\frac{1}{40}(x+11)(x-11)}$;
si on la développe, on obtient $y=-\frac{1}{40}(x^2-121)=\underline{-\frac{1}{40}x^2+\frac{121}{40}}$.

3. On a $m=2$ et $p=2$ $\Rightarrow$ $y=a(x-2)^2+2$;
avec $(0;0)$, en posant $x=0$ et $y=0$ dans $y=a(x-2)^2+2$, on a
$0=a(0-2)^2+2 \Rightarrow -2=4a \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$;
l'équation de la parabole est donc $\underline{y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2}$;
si on la développe, on obtient $y=-\frac{1}{2}(x^2-4x+4)+2=-\frac{1}{2}x^2+2x-2+2=\underline{-\frac{1}{2}x^2+2x}$.

4. Si le maximum est atteint en $x=1{,}5$, cela signifie que $x=1{,}5$ est l'axe de symétrie vertical de la parabole ; le point symétrique de $(4{,}5;0)$ est alors $(-1{,}5;0)$;
on a ainsi $x_1=4{,}5$ et $x_2=-1{,}5$ $\Rightarrow$ $y=a(x-4{,}5)(x+1{,}5)$;
avec $(3;3)$, en posant $x=3$ et $y=3$ dans $y=a(x-4{,}5)(x+1{,}5)$, on a
$3=a(3-4{,}5)(3+1{,}5) \Rightarrow 3=-6{,}75a \Rightarrow a=-\frac{4}{9}$;
l'équation de la parabole est donc $\underline{y=-\frac{4}{9}(x-4{,}5)(x+1{,}5)}$;
si on la développe, on obtient $y=-\frac{4}{9}(x^2+1{,}5x-4{,}5x-6{,}75)=-\frac{4}{9}(x^2-3x-6{,}75)=$
$=\underline{-\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{3}x+3}$.

Exercice 7

1. $\begin{cases} y = -x^2+x+6 \\ y = 2x+4 \end{cases} \Rightarrow -x^2+x+6 = 2x+4 \Rightarrow 0 = x^2+x-2$;

$a=1, b=1, c=-2 \Rightarrow b^2-4ac = 1^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 = 9 > 0$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \Rightarrow y_1 = 2x_1+4 = 2\cdot 1+4 = 6$

et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \Rightarrow y_2 = 2\cdot x_2+4 = 2\cdot(-2)+4 = 0$

$\Rightarrow$ les intersections sont $\underline{(1;6) \text{ et } (-2;0)}$.

2. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2+5 \\ y = 2x+3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2+5 = 2x+3 \Rightarrow x^2+10 = 4x+6 \Rightarrow x^2-4x+4 = 0$;

$a=1, b=-4, c=4 \Rightarrow b^2-4ac = (-4)^2-4\cdot 1\cdot 4 = 16-16 = 0$

$\Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\cdot 1} = 2 \Rightarrow y = 2x+3 = 2\cdot 2+3 = 7$

$\Rightarrow$ l'unique intersection est $\underline{(2;7)}$.

3. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2+3x+4 \\ \frac{7}{2}x-y+5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{2}x-\left(\frac{1}{2}x^2+3x+4\right)+5 = 0 \Rightarrow \frac{7}{2}x-\frac{1}{2}x^2-3x-4+5 = 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1 = 0 \Rightarrow x^2-x-2 = 0$;

$a=1, b=-1, c=-2 \Rightarrow b^2-4ac = (-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 = 9 > 0$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $y_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2+3\cdot 2+4 = 2+6+4 = 12$

et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{9}}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $y_2 = \frac{1}{2}(-1)^2+3\cdot(-1)+4 = \frac{1}{2}-3+4 = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ les intersections sont $\underline{(2;12) \text{ et } (-1;\tfrac{3}{2})}$.

4. $\begin{cases} y = 2(x-2)^2+2 \\ y-x+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(x-2)^2+2-x+1 = 0 \Rightarrow 2(x^2-4x+4)-x+3 = 0$

$\Rightarrow 2x^2-8x+8-x+3 = 0 \Rightarrow 2x^2-9x+11 = 0$;

$a=2, b=-9, c=11 \Rightarrow b^2-4ac = (-9)^2-4\cdot 2\cdot 11 = 81-88 = -7 < 0$

$\Rightarrow$ pas de solution $\Rightarrow$ <u>il n'y a pas d'intersection.</u>

5. $\begin{cases} y = 2x^2-4x+9 \\ y = x^2+x+3 \end{cases} \Rightarrow 2x^2-4x+9 = x^2+x+3 \Rightarrow x^2-5x+6 = 0$

$a=1, b=-5, c=6 \Rightarrow b^2-4ac = (-5)^2-4\cdot 1\cdot 6 = 25-24 = 1 > 0$

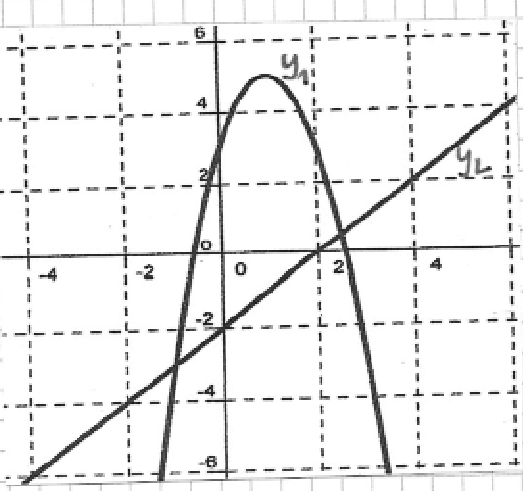
$\Rightarrow x_1 = \dfrac{5+\sqrt{1}}{2} = \dfrac{5+1}{2} = 3 \Rightarrow y_1 = 3^2+3+3 = 15$

et $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{1}}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow y_2 = 2^2+2+3 = 9$

$\Rightarrow$ les intersections sont $\underline{(3;15) \text{ et } (2;9)}$.

Exercice 8

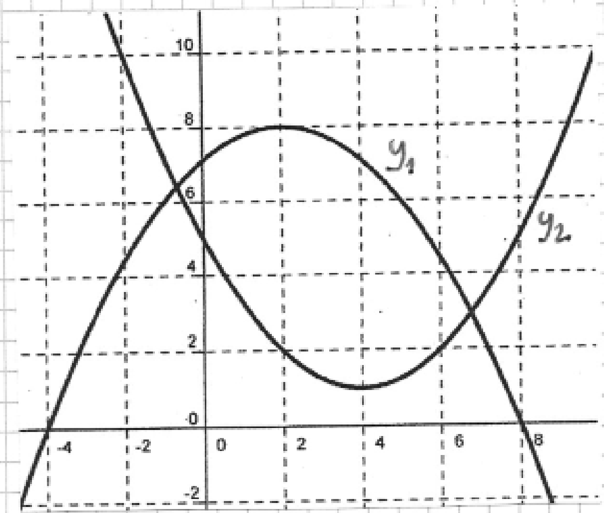
1.



2. La distance entre y_1 et y_2 entre leurs deux points d'intersection est
$y_1 - y_2 = -2x^2 + 4x + 3 - (x-2) = -2x^2 + 4x + 3 - x + 2 = -2x^2 + 3x + 5$;
elle sera maximale en $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\cdot(-2)} = \underline{\frac{3}{4}}$.

Exercice 9

1.



2. La distance entre y_1 et y_2 entre leurs deux points d'intersection est
$y_1 - y_2 = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{64}{9} - \left(\frac{1}{4}(x-4)^2 + 1\right) =$
$= -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{64}{9} - \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 16) - 1 =$
$= -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{64}{9} - \frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 - 1 =$
$= -\frac{17}{36}x^2 + \frac{26}{9}x + \frac{19}{9}$;
elle sera maximale en $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{26/9}{2\cdot(-17/36)} = \underline{\frac{52}{17}}$.