ANALYSE

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 6.1

a. $y = x^2+1$: $D = \mathbb{R}$;
$f(D) = [1;+\infty[$: $x^2+1 \geq 1$ car $x^2 \geq 0$.

b. $y = \frac{1}{(x-2)^2}$: $(x-2)^2 \neq 0 \Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
$(x-2)^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow f(D) = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

c. $y = \frac{\tan(x)}{x}$: on doit avoir $x \neq 0$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$ (car sinon $\tan(x) = \pm\infty$)
$\Rightarrow D = \mathbb{R}^* \setminus \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\})$;
Comme l'ensemble des images de $\tan(x)$ est $\mathbb{R}$, on a $f(D) = \mathbb{R}$.

d. $y = 1+\sqrt{2x-5}$: on doit avoir $2x-5 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \Rightarrow D = [\frac{5}{2};+\infty[$;
Comme $\sqrt{2x-5} \geq 0$, on a $1+\sqrt{2x-5} \geq 1 \Rightarrow f(D) = [1;+\infty[$.

e. $y = -\frac{1}{x}$: $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$f(D) = \mathbb{R}^*$ (on peut tout atteindre, sauf 0).

f. $y = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$: on doit avoir $5-x > 0 \Rightarrow x < 5 \Rightarrow D =]-\infty;5[$;
comme $\sqrt{5-x} > 0$, on a $\frac{1}{\sqrt{5-x}} > 0 \Rightarrow f(D) = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

g. $y = |\cos(x)|$: $D = \mathbb{R}$ (on peut calculer le cosinus de n'importe quelle valeur);
$f(D) = [0;1]$ car $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et, donc $0 \leq |\cos(x)| \leq 1$.

h. $y = \frac{1}{\sqrt{x^3-x^2-6x}}$: on doit avoir $x^3-x^2-6x > 0$; commençons par chercher les x tels que
$x^3-x^2-6x = 0$: $x^3-x^2-6x = 0 \Rightarrow x(x^2-x-6) = 0$
$\Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x^2-x-6 = 0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $(x-3)(x+2) = 0$
$\Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x=3$, soit $x=-2$; on fait un tableau de signes
pour x^3-x^2-6x :

x		-2		0		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

;

ainsi $x^3-x^2-6x > 0$ si $x \in]-2;0[$ et $x \in]3;+\infty[$
$\Rightarrow D =]-2;0[\cup]3;+\infty[$;
Comme $\sqrt{x^3-x^2-6x} > 0$, on a $\frac{1}{\sqrt{x^3-x^2-6x}} > 0$ et $f(D) = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

i. $y = \frac{1}{\tan(x)}$: le domaine de définition de $\tan(x)$ est $\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;
$\tan(x) = 0$ si $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow D = \{x \mid x \neq k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x \neq k.\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$;
Comme $\tan(x)$ peut prendre n'importe quelle valeur, on a $f(D) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 6.2

Si $f(-x) = f(x)$, alors f est paire.
Si $f(-x) = -f(x)$, alors f est impaire.

a. $f_1(x) = |2x-5|$: $f_1(-x) = |2(-x)-5| = |-2x-5| = |2x+5| \neq \pm f_1(x)$
$\Rightarrow$ f_1 n'est ni paire ni impaire.

b. $f_5(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4+5}$: $f_5(-x) = \dfrac{\sqrt{(-x)^2-1}}{(-x)^4+5} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4+5} = f_5(x) \Rightarrow f_5$ est paire.

c. $f_3(x) = 3x \cdot \sin(2x)$: $f_3(-x) = 3(-x)\cdot \sin(2(-x)) = -3x\sin(-2x) = -3x\cdot(-\sin(2x))$
car $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ (la fonction sinus est impaire);
ainsi $f_3(-x) = 3x\sin(2x) = f_3(x) \Rightarrow f_3$ est paire.

d. $f_4(x) = \dfrac{3x^2+7}{x}$: $f_4(-x) = \dfrac{3(-x)^2+7}{-x} = \dfrac{3x^2+7}{-x} = -\dfrac{3x^2+7}{x} = -f_4(x) \Rightarrow f_4$ est impaire.

e. $f_2(x) = x^3\cdot\cos(x)$: $f_2(-x) = (-x)^3\cdot\cos(-x) = -x^3\cos(x)$ car $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
(la fonction cosinus est paire); ainsi $f_2(-x) = -x^3\cos(x) =$
$= -f_2(x) \Rightarrow f_2$ est impaire.

f. $f_6(x) = \dfrac{\sin(5x)\cdot\cos(x)}{x^2}$: $f_6(-x) = \dfrac{\sin(5(-x))\cdot\cos(-x)}{(-x)^2} = \dfrac{\sin(-5x)\cdot\cos(-x)}{x^2} = \dfrac{-\sin(5x)\cos(x)}{x^2}$

puisque sinus est impaire et cosinus est paire;
ainsi $f_6(-x) = -\dfrac{\sin(5x)\cos(x)}{x^2} = -f_6(x) \Rightarrow f_6$ est impaire.

Exercice 6.3.

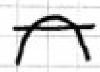
Pour établir le tableau de signe d'une fonction, on commence par chercher les zéros de la fonction, puis on peut chercher le signe de la fonction entre eux.

a. $y = 2x+1$: $2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

x		$-\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

b. $y=-x^2+7x-6$: $-x^2+7x-6=0 \Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow (x-1)(x-6)=0$
$\Rightarrow x=1$ et $x=6$

x		1		6	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

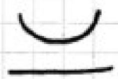
$-x^2+7x-6$ est une parabole tournée vers le bas: 

c. $y=2\cos(x)+1$: $2\cos(x)+1=0 \Rightarrow 2\cos(x)=-1 \Rightarrow \cos(x)=-\frac{1}{2}$
$\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ et $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

x		$-\frac{8\pi}{3}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{8\pi}{3}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

d. $y=x^2-3x+4$: $x^2-3x+4=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-3$ et $c=4$; on a $\Delta=b^2-4ac=$
$=(-3)^2-4\cdot1\cdot4=9-16=-7<0$; ainsi $x^2-3x+4=0$ n'a pas de solution.

x	
$f(x)$	$+$

x^2-3x+4 est une parabole tournée vers le haut: 

e. $y=\sqrt{x+3}-2$: on doit avoir $x+3\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant -3 \Rightarrow$ le domaine de définition est $[-3;+\infty[$; $\sqrt{x+3}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x+3}=2 \Rightarrow x+3=4 \Rightarrow x=1$

x	//////	-3		1	
$f(x)$	//////		$-$	0	$+$

f. $y=x\cdot(x-3)\cdot(x+4)$: $x(x-3)(x+4)=0 \Rightarrow x=0, x=3$ ou $x=-4$

x		-4		0		3	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$---=-$ $\qquad --+=+$ $\qquad +-+=-$ $\qquad +++=+$

Exercice 6.4

Commençons par chercher les zéros du numérateur et du dénominateur :

$x-3=0 \Rightarrow x=3$;

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1$ et $x=2$.

On a en outre $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

On peut alors établir le tableau de signes :

x		1		2		3	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$	$-$	imp	$+$	imp	$-$	0	$+$

$\frac{+}{++}=\frac{+}{+}=+$

$\frac{-}{--}=\frac{-}{+}=-$ $\quad$ $\frac{-}{+-}=\frac{-}{-}=+$ $\quad$ $\frac{-}{++}=\frac{-}{+}=-$

Ainsi $f(x)=\frac{x-3}{x^2-3x+2}=\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}>0$ si $x\in\,]1;2[$ et $x\in\,]3;+\infty[$.

Les solutions de $\frac{x-3}{x^2-3x+2}>$ sont $]1;2[\,\cup\,]3;+\infty[$.

Exercice 6.5.

La période de la fonction sinus est 2π : $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$.
La période de la fonction cosinus est 2π : $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$.
La période de la fonction tangente est π : $\tan(\alpha+\pi) = \tan(\alpha)$.
De manière plus générale, on a : $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\ell\pi)$, $\ell \in \mathbb{Z}$
$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + m\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$.

a. $y = 5\sin(4x) = 5\sin(4x + 2k\pi) = 5\sin\left(4\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow$ période $= \frac{\pi}{2}$.

b. $y = -2\tan(3x) = -2\tan(3x + m\pi) = -2\tan\left(3\left(x + m\frac{\pi}{3}\right)\right) \Rightarrow$ période $= \frac{\pi}{3}$.

c. $y = \sin(4x) + \tan(3x) = \sin(4x + 2k\pi) + \tan(3x + m\pi) =$
$= \sin\left(4\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right) + \tan\left(3\left(x + \frac{m\pi}{3}\right)\right)$;
avec $k = 2$ et $m = 3$, on a $y = \sin(4x) + \tan(3x) = \sin(4(x+\pi)) + \tan(3(x+\pi))$
$\Rightarrow$ période $= \pi$.

d. $y = \cos(5x) = \cos(5x + 2\ell\pi) = \cos\left(5\left(x + \ell\frac{2\pi}{5}\right)\right) \Rightarrow$ période $= \frac{2\pi}{5}$.

e. $y = x \cdot \sin(x)$: $\sin(x)$ est périodique, mais pas x $\Rightarrow$ pas de période.

f. $y = \sin^2(x) + 2$: $\sin(x)$ a une période valant 2π ; elle varie entre -1 et 1 ;
$\sin^2(x)$ varie entre 0 et 1 et la période de $\sin^2(x)$ est π ;
ainsi la période de $y = \sin^2(x) + 2$ vaut π.

Exercice 6.6.

a. Soient f et g 2 fonctions paires. On a ainsi $f(-x)=f(x)$ et $g(-x)=g(x)$, pour tout x. Soit $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.
On a alors $h(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=h(x)$.
Ainsi h est paire.
Le produit de 2 fonctions paires est donc paire.

b. Soient f une fonction paire et g une fonction impaire. On a ainsi $f(-x)=f(x)$ et $g(-x)=-g(x)$, pour tout x. Soit $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.
On a alors $h(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)\cdot g(x)=-h(x)$.
Ainsi h est impaire.
Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est donc une fonction impaire.

c. Soient f et g 2 fonctions impaires. On a ainsi $f(-x)=-f(x)$ et $g(-x)=-g(x)$, pour tout x. Soit $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.
On a alors $h(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=(-f(x))\cdot(-g(x))=f(x)\cdot g(x)=h(x)$.
Ainsi h est paire.
Le produit de 2 fonctions paires est donc paire.

On a $f(x)=x^2$ et $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. Ainsi f est paire.
On a $g(x)=x^3$ et $g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$. Ainsi g est impaire.

a. Soit $h(x)=f(x)\cdot f(x)=x^2\cdot x^2=x^4$.
On a $h(-x)=f(-x)\cdot f(-x)=f(x)\cdot f(x)=x^2\cdot x^2=x^4$ et $h(-x)=(-x)^4=x^4=h(x)$.
Ainsi $f\cdot f$ est bien paire.

b. Soit $h(x)=f(x)\cdot g(x)=x^2\cdot x^3=x^5$.
On a $h(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)\cdot g(x)=-x^2\cdot x^3=-x^5$ et $h(-x)=(-x)^5=$
$=-x^5=-h(x)$.
Ainsi $f\cdot g$ est bien impaire.

c. Soit $h(x)=g(x)\cdot g(x)=x^3\cdot x^3=x^6$.
On a $h(-x)=g(-x)\cdot g(-x)=(-g(x))\cdot(-g(x))=(-x^3)\cdot(-x^3)=x^6$ et $h(-x)=(-x)^6=x^6=h(x)$.
Ainsi $g\cdot g$ est bien paire.

Exercice 6.7.

On a $f(x)=\frac{3-2x}{x+1}$.

a. Domaine de définition: on doit avoir $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$; ainsi $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Domaine d'arrivée: on a $y=\frac{3-2x}{x+1} \Rightarrow y(x+1)=3-2x \Rightarrow xy+y=3-2x$

$\Rightarrow xy+2x=3-y \Rightarrow x(y+2)=3-y \Rightarrow x=\frac{3-y}{y+2}$;

on doit avoir $y+2\neq 0 \Rightarrow y\neq -2$; ainsi $f(D)=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b. Intersection avec l'axe x: on doit avoir $y=f(x)=0 \Rightarrow \frac{3-2x}{x+1}=0 \Rightarrow 3-2x=0$

$\Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$; c'est le point $(\frac{3}{2};0)$.

Intersection avec l'axe y: on doit avoir $x=0 \Rightarrow y=f(x)=\frac{3}{1}=3$; c'est le point $(0;3)$.

c. Tableau de signes:

x		-1		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$-$	▨	$+$	0	$-$

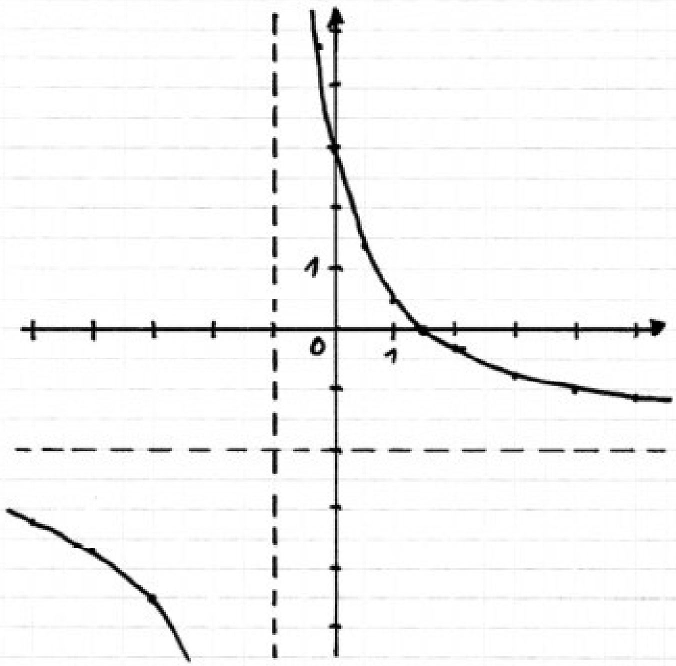
d. Comportement lorsque $x\to -1$: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{3-2x}{x+1}=\text{"}\frac{5}{0_-}\text{"}=-\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{3-2x}{x+1}=\text{"}\frac{5}{0_+}\text{"}=+\infty$.

e. Comportement lorsque $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3-2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x(\frac{3}{x}-2)}{x(1+\frac{1}{x})}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3}{x}-2}{1+\frac{1}{x}}=\frac{0-2}{1+0}=-2$.

f. Représentation graphique:



Exercice 6.8

D'après le graphe, on a : $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$;

$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$;

$\lim_{x \to 2} g(x)$ n'existe pas puisque $\lim_{x \to 2^-} g(x) \neq \lim_{x \to 2^+} g(x)$;

$\lim_{x \to 4^-} g(x) = 2$;

$\lim_{x \to 4^+} g(x) = 2$;

$\lim_{x \to 4} g(x) = 2$ car $\lim_{x \to 4^-} g(x) = \lim_{x \to 4^+} g(x) = 2$;

$g(2)$ n'existe pas puisqu'il n'y a aucun point correspondant sur le graphe ;

$g(4) = 1$ (bien que $\lim_{x \to 4} g(x) = 2$) ;

la fonction g n'est pas continue.

Exercice 6.9.

D'après le graphe, on a : a. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

b. $\lim_{x \to 5} f(x) = -\infty$;

c. $\lim_{x \to -3} f(x) = -\infty$;

d. $\lim_{x \to -6} f(x)$ n'existe pas car $\lim_{x \to -6^-} f(x) = +\infty$ et

$\lim_{x \to -6^+} f(x) = -\infty$.

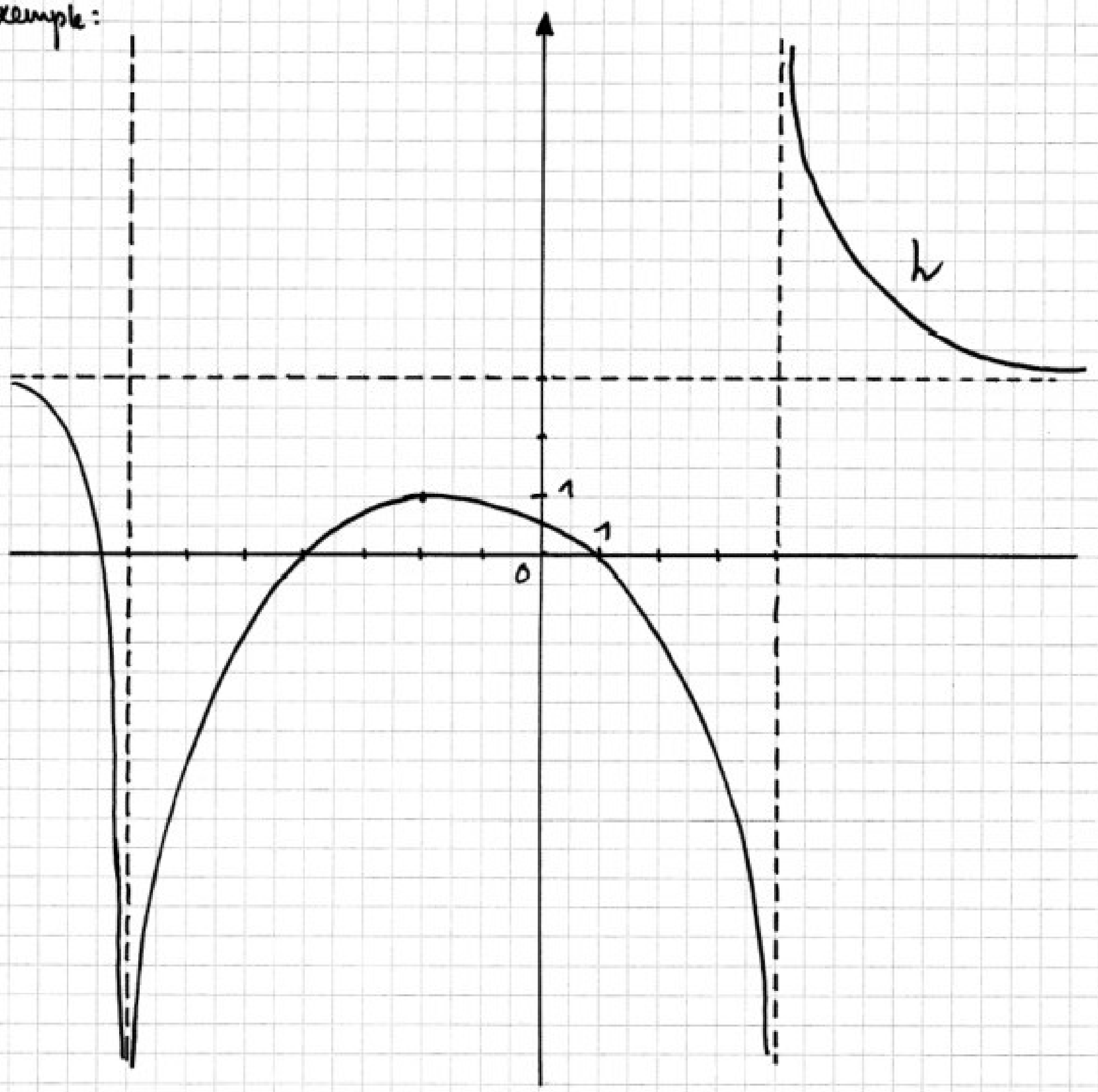
Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \{-6; -3; 0; 5\}$ (f n'est pas définie en $-6, -3, 0$ et 5)

Les asymptotes verticales sont : $x = -6$, $x = -3$, $x = 0$ et $x = 5$.

Les asymptotes horizontales sont : $y = -2$ à gauche et $y = 0$ à droite.

Exercice 6.10.

Par exemple :



Le domaine de cette fonction h est $\mathbb{R} \setminus \{-7 ; 4\}$.

Exercice 6.11.

a. $\lim_{x \to 2} 5x = 5 \cdot 2 = 10.$

b. $\lim_{x \to 2} (2x+3) = 2 \cdot 2 + 3 = 7.$

c. $\lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5.$

d. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{2^2-4}{2^2+4} = \frac{0}{8} = 0.$

e. $\lim_{x \to 4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-4^2} = \sqrt{9} = 3.$

f. $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \frac{4-4}{4^2-4-12} = "\frac{0}{0}"$ indéterminé ; on a $x^2-x-12 = (x-4)(x+3)$;

ainsi $\frac{x-4}{x^2-x-12} = \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$ et $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4+3} = \frac{1}{7}.$

g. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{2^2-2-2}{2-2} = "\frac{0}{0}"$ indéterminé ; on a $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$;

ainsi $\frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x+1$ et $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+1) = 2+1 = 3.$

h. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \frac{1^2+1-2}{(1-1)^2} = "\frac{0}{0}"$ indéterminé ; on a $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$;

ainsi $\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x+2}{x-1}$ et $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1} = \frac{1+2}{1-1} = "\frac{3}{0}"$;

Comme $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0_-} = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} =$

$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0_+} = +\infty$, $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ n'est pas défini (n'existe pas).

i. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{x} = \frac{2^2-2 \cdot 2}{2} = \frac{0}{2} = 0.$

Exercice 6.12.

a. $\lim_{x\to\infty}(-4x^2) = \text{"}-4\cdot(\infty)^2\text{"} = -\infty.$

b. $\lim_{x\to-\infty}(5x^3+2) = \text{"}5\cdot(-\infty)^3+2\text{"} = \text{"}-\infty+2\text{"} = -\infty.$

c. $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = \text{"}\frac{3}{\infty}\text{"} = 0.$

d. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{4x^3-1} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$ indéterminé ; on a $\frac{x^2+x-2}{4x^3-1} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2(4x-\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{4x-\frac{1}{x^2}}$ et, ainsi, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{4x^3-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{4x-\frac{1}{x^2}} = \text{"}\frac{1+0-0}{\infty-0}\text{"} = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0.$

e. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{5x+7} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$ indéterminé ; on a $\frac{4x-2}{5x+7} = \frac{x(4-\frac{2}{x})}{x(5+\frac{7}{x})} = \frac{4-\frac{2}{x}}{5+\frac{7}{x}}$ et, ainsi,
$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{5x+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}}{5+\frac{7}{x}} = \frac{4-0}{5+0} = \frac{4}{5}.$

f. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{x^2+1} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$ indéterminé ; on a $\frac{2x^3+1}{x^2+1} = \frac{x^2(2x+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{2x+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$ et, ainsi,
$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \text{"}\frac{\infty+0}{1+0}\text{"} = \infty.$

g. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$ indéterminé ; on a $\frac{1+x}{x} = \frac{x(\frac{1}{x}+1)}{x\cdot 1} = \frac{\frac{1}{x}+1}{1} = \frac{1}{x}+1$ et, ainsi,
$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right) = 0+1 = 1.$

h. $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2+3x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$ indéterminé ; on a $\frac{(x-1)^2}{x^2+3x} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x} = \frac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x})} =$
$= \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}$ et, ainsi, $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} = \frac{1-0+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$

i. $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+6x)(5x-2)}{-10x^3+13x-7} = \text{"}\frac{\infty\cdot(-\infty)}{\infty}\text{"}$ indéterminé ; on a $\frac{(x^2+6x)(5x-2)}{-10x^3+13x-7} =$
$= \frac{5x^3-2x^2+30x^2-12x}{-10x^3+13x-7} = \frac{5x^3+28x^2-12x}{-10x^3+13x-7} = \frac{x^3(5+\frac{28}{x}-\frac{12}{x^2})}{x^3(-10+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3})} = \frac{5+\frac{28}{x}-\frac{12}{x^2}}{-10+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}$ et, ainsi,
$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+6x)(5x-2)}{-10x^3+13x-7} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{28}{x}-\frac{12}{x^2}}{-10+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = \frac{5+0-0}{-10+0-0} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}.$

Exercice 6.13

Soit $f(x) = \frac{2x-4}{x^2+x-6}$.

Commençons par voir si on peut simplifier $f(x)$.
On a $2x-4 = 2(x-2)$ et $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$.

Ainsi $f(x) = \frac{2(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{2}{x+3}$.

On a alors :

a. $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$;

b. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$;

c. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$;

d. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

e. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

f. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

g. $\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{-3+3} = " \frac{2}{0_{\pm}} "$ n'existe pas (non défini) ;

h. $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{2}{x+3} = " \frac{2}{-3_+ +3} " = " \frac{2}{0+} " = +\infty$;

i. $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{2}{x+3} = " \frac{2}{-3_- +3} " = " \frac{2}{0-} " = -\infty$.

On a $f(2) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$, $f(1) = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $f(-3)$ n'existe pas (voir g.).

Exercice 6.14.

D'après le graphique, on a : si $x > 0$, $f(x) = x-1$;
si $x < 0$, $f(x) = -\frac{1}{2}x+1$;
si $x = 0$, f n'est pas défini.

On a alors :

a. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x-1) = 2-1 = 1$;

b. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x-1) = 2-1 = 1$;

c. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x-1) = 2-1 = 1$;

d. $f(2) = 2-1 = 1$;

e. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{2}x+1\right) = -\frac{1}{2}.0+1 = 1$;

f. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1) = 0-1 = -1$;

g. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, puisque $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$ (voir e. et f.) ;

h. $f(0)$ n'existe pas, puisque f n'est pas définie en $x = 0$.

La fonction f n'est pas continue puisque $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Exercice 6.15.

a. Les asymptotes verticales correspondent aux exclus du domaine de définition.
Pour déterminer le domaine de définition, on commence par essayer de simplifier la fraction.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$: on ne peut pas simplifier f;
on doit avoir $x^2-x-2 \neq 0$; comme $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$,
on doit avoir $x \neq 2$ et $x \neq -1$; ainsi $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$;
les asymptotes verticales sont donc $x=-1$ et $x=2$.

b) $f(x) = \frac{2-2x}{2x^2-5x+3}$: on a $2-2x = 2(1-x)$; cherchons à factoriser le dénominateur ;
$2x^2-5x+3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 25-24 = 1$ et $\sqrt{\Delta} = 1$
$\Rightarrow x = \frac{5+1}{2\cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ et $x = \frac{5-1}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$; ainsi
$2x^2-5x+3 = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1) = (2x-3)(x-1)$; on a donc
$f(x) = \frac{2-2x}{2x^2-5x+3} = \frac{2(1-x)}{(2x-3)(x-1)} = \frac{-2(x-1)}{(2x-3)(x-1)} = \frac{-2}{2x-3} = \frac{2}{3-2x}$;
on doit avoir $3-2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 3 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$; ainsi $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;
l'asymptote verticale est donc $x = \frac{3}{2}$.

b. Pour déterminer les asymptotes verticales, on procède comme en a.
Pour déterminer les autres asymptotes (horizontale et obliques), dans le cas de fonctions rationnelles ($= \frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}$), le plus simple est d'effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Si le quotient est un nombre a, alors $y=a$ est asymptote horizontale. Si le quotient est de la forme $ax+b$, alors $y=ax+b$ est asymptote oblique. Dans les autres cas, il n'y a pas d'asymptote non verticale (horizontale ou oblique).

a) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}$: on ne peut pas simplifier f car x^2+1 n'est pas factorisable ;
comme $x^2+1 \geq 1$, on a $D = \mathbb{R}$; il n'y a donc pas d'asymptote verticale ;
effectuons la division:

$$\begin{array}{rr|l} & 2x-5 & x^2+1 \\ \cline{3-3} - & 0 & 0 \\ \cline{1-2} & 2x-5 & \end{array}$$

ainsi $y=0$ est asymptote horizontale.

b) $f(x) = \frac{2x^2+4x+2}{-x^2+4}$: on a $2x^2+4x+2 = 2(x^2+2x+1) = 2(x+1)^2$ et $-x^2+4 = 4-x^2 = (2+x)(2-x)$; comme il n'y a pas de facteur commun, f n'est pas factorisable ;

on a $-x^2+4 \neq 0 \Leftrightarrow (2+x)(2-x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$;
ainsi $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$; les asymptotes verticales sont donc $x=-2$ et $x=2$;
effectuons la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+4x+2 & -x^2+4 \\ \cline{2-2} -(2x^2 \quad -8) & -2 \\ \cline{1-1} 4x+10 & \end{array}$$

ainsi $y=-2$ est asymptote horizontale.

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-5}$: on ne peut pas simplifier f car x^2+1 n'est pas factorisable;
on a $2x-5 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 5 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{2}$; ainsi $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$;
l'asymptote verticale est donc $x = \frac{5}{2}$;
effectuons la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & 2x-5 \\ \cline{2-2} -(x^2-\frac{5}{2}x) & \frac{1}{2}x+\frac{5}{4} \\ \cline{1-1} \frac{5}{2}x+1 & \\ -(\frac{5}{2}x-\frac{25}{4}) & \\ \cline{1-1} \frac{29}{4} & \end{array}$$

ainsi $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ est asymptote oblique.

d) $f(x) = \frac{-2x^3+9x^2-13x+7}{x^2-4x+4}$: on a $x^2-4x+4 = (x-2)^2$; voyons si $-2x^3+9x^2-13x+7$ se divise par $x-2$:

$$\begin{array}{r|l} -2x^3+9x^2-13x+7 & x-2 \\ \cline{2-2} -(-2x^3+4x^2) & -2x^2+5x-3 \\ \cline{1-1} 5x^2-13x+7 & \\ -(5x^2-10x) & \\ \cline{1-1} -3x+7 & \\ -(-3x+6) & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

ainsi $-2x^3+9x^2-13x+7$ ne se divise pas par $x-2$ et f n'est pas simplifiable;
$x^2-4x+4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$;
ainsi $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; l'asymptote verticale est donc $x=2$;
effectuons la division euclidienne:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & -2x^3+9x^2-13x+7 & x^2-4x+4 \\
\cline{3-3}
- & (-2x^3+8x^2-8x) & -2x+1 \\
\cline{1-2}
 & x^2-5x+7 & \\
- & (x^2-4x+4) & \\
\cline{1-2}
 & -x+3 &
\end{array}
$$

ainsi $y=-2x+1$ est asymptote oblique.

Exercice 6.16.

Etudier le comportement asymptotique d'une fonction consiste en:

1) Trouver toutes les asymptotes de la fonction (après avoir, si possible, simplifié la fonction);

2) Chercher la ou les intersections de la fonction avec sa ou ses asymptotes non verticales;

3) Déterminer si la fonction s'approche par en-dessus ou par en-dessous de son asymptote lorsque $x \to \pm\infty$.

a. $f_1(x) = \dfrac{52{,}5x - 27{,}5x^2 - 5x^3}{-7+6x+x^2}$: on peut écrire $f_1(x) = \dfrac{-10x^3 - 55x^2 + 105x}{2x^2+12x-14}$.

1) Voyons si on peut simplifier cette fonction: on a $-10x^3 - 55x^2 + 105x = -5x(2x^2+11x-21)$;

$2x^2+11x-21 = 0 \Rightarrow \Delta = 11^2 - 4\cdot 2\cdot(-21) = 121 + 168 = 289 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$

$\Rightarrow x = \frac{-11+17}{2\cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ et $x = \frac{-11-17}{2\cdot 2} = \frac{-28}{4} = -7 \Rightarrow 2x^2+11x-21 = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+7) =$

$= (2x-3)(x+7)$; ainsi $-10x^3 - 55x^2 + 105x = -5x(2x-3)(x+7)$;

de plus $2x^2+12x-14 = 2(x^2+6x-7) = 2(x+7)(x-1)$;

on a ainsi $f_1(x) = \dfrac{-5x(2x-3)(x+7)}{2(x+7)(x-1)} = \dfrac{-5x(2x-3)}{2(x-1)} = \dfrac{-10x^2+15x}{2(x-1)}$, $x \neq -7$ (voir à la fin de l'exercice).

Les asymptotes verticales de f_1 sont données par ses exclus: $2(x-1) = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

L'unique asymptote verticale est $x = 1$.

Pour trouver, si elles existent, les asymptotes non verticales, on effectue la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} -10x^2 + 15x & 2x-2 \\ \cline{2-2} \underline{-(-10x^2+10x)} & -5x+\frac{5}{2} \\ 5x & \\ \underline{-(5x-5)} & \\ 5 & \end{array}$$

Ainsi $y = -5x + \frac{5}{2}$ est l'asymptote oblique de f_1 (asymptote non verticale).

2) Voyons si f_1 et son asymptote oblique se coupent, autrement dit si le système

$$\begin{cases} y = \dfrac{-10x^2+15x}{2(x-1)} \\ y = -5x + \dfrac{5}{2} \end{cases}$$ a une solution.

On peut écrire $\dfrac{-10x^2+15x}{2x-2} = -5x + \dfrac{5}{2} \Rightarrow -10x^2+15x = \left(-5x+\frac{5}{2}\right)(2x-2)$

$\Rightarrow -10x^2 + 15x = -10x^2 + 10x + 5x - 5 \Rightarrow 0 = -5$ impossible.

Ainsi f_1 ne coupe pas son asymptote oblique.

3) D'après 1), on a $f_1(x) = \dfrac{-10x^2+15x}{2(x-1)} = -5x + \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2x-2}$.

Ainsi, lorsque $x \to -\infty$, $\frac{5}{2x-2} < 0$ et f_1 s'approche de $y = -5x + \frac{5}{2}$ par en-dessous;

lorsque $x \to +\infty$, $\frac{5}{2x-2} > 0$ et f_1 s'approche de $y = -5x + \frac{5}{2}$ par en-dessus.

b. $f_2(x) = \dfrac{-30+9x+3x^2}{-24+4x+4x^2} = \dfrac{3x^2+9x-30}{4x^2+4x-24}$:

1) Voyons si on peut simplifier cette fonction : on a $3x^2+9x-30 = 3(x^2+3x-10) =$
$= 3(x+5)(x-2)$ et $4x^2+4x-24 = 4(x^2+x-6) = 4(x+3)(x-2)$; on a ainsi
$f_2(x) = \dfrac{3(x+5)(x-2)}{4(x+3)(x-2)} = \dfrac{3(x+5)}{4(x+3)} = \dfrac{3x+15}{4x+12}$, $x \neq 2$ (voir à la fin de l'exercice).

Les asymptotes verticales de f_2 sont données par ses exclus : $4x+12=0 \Rightarrow 4x=-12 \Rightarrow x=-3$.
Ainsi l'unique asymptote verticale est $x=-3$.
Pour trouver, si elles existent, les asymptotes non verticales, on effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 3x+15 & 4x+12 \\ \cline{2-2} -(3x+16) & \frac{3}{4} \\ \hline -1 & \end{array}$$

Ainsi $y = \frac{3}{4}$ est l'asymptote horizontale de f_2 (asymptote non verticale).

2) Voyons si f_2 et son asymptote horizontale se coupent, autrement dit si le système
$$\begin{cases} y = \dfrac{3x+15}{4x+12} \\ y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$ a une solution.
Avec $y = \frac{3}{4}$, on a $\frac{3}{4} = \frac{3x+15}{4x+12} \Rightarrow 3(4x+12) = 4(3x+15) \Rightarrow 12x+36 = 12x+60$
$\Rightarrow 36 = 60$ impossible $\Rightarrow$ pas de solution.
Ainsi f_2 ne coupent pas son asymptote horizontale.

3) D'après 1), on a $f_2(x) = \dfrac{3x+15}{4x+12} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{-1}{4x+12}$.

Ainsi, lorsque $x \to -\infty$, $\frac{-1}{4x+12} > 0$ et f_2 s'approche de $y = \frac{3}{4}$ par en-dessus ;
lorsque $x \to +\infty$, $\frac{-1}{4x+12} < 0$ et f_2 s'approche de $y = \frac{3}{4}$ par en-dessous.

c. $f_3(x) = \dfrac{2x^3+11x^2-106x+165}{x^2-4x+3}$:

1) Voyons si on peut simplifier cette fonction : on a $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$;
essayons de diviser $2x^3+11x^2-106x+165$ par $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+11x^2-106x+165 & x-1 \\ \cline{2-2} -(2x^3-2x^2) & 2x^2+13x-93 \\ \cline{1-1} 13x^2-106x+165 & \\ -(13x^2-13x) & \\ \cline{1-1} -93x+165 & \\ -(-93x+93) & \\ \cline{1-1} 72 & \end{array}$$
;

Comme le reste est non nul, $2x^3+11x^2-106x+165$ ne se divise pas par $x-1$;
essayons de diviser $2x^3+11x^2-106x+165$ par $x-3$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+11x^2-106x+165 & x-3 \\ \hline -(2x^3-6x^2) \quad\quad\quad\quad & 2x^2+17x-55 \\ \hline 17x^2-106x+165 & \\ -(17x^2-51x) \quad\quad & \\ \hline -55x+165 & \\ -(-55x+165) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

;

Comme le reste est nul, $2x^3+11x^2-106x+165$ se divise par $x-1$ et on a
$2x^3+11x^2-106x+165=(x-3)(2x^2+17x-55)$; on a ainsi :

$$f_3(x)=\frac{2x^3+11x^2-106x+165}{x^2-4x+3}=\frac{(x-3)(2x^2+17x-55)}{(x-1)(x-3)}=\frac{2x^2+17x-55}{x-1},\quad x\neq 3.$$ (Voir à la fin de l'exercice)

Les asymptotes verticales de f_3 sont données par les exclus : $x-1=0 \Rightarrow x=1$.
Ainsi l'unique asymptote verticale est $x=1$.
Pour trouver, si elles existent, les asymptotes non verticales, on effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+17x-55 & x-1 \\ \hline -(2x^2-2x) \quad\quad & 2x+19 \\ \hline 19x-55 & \\ -(19x-19) & \\ \hline -36 & \end{array}$$

Ainsi $y=2x+19$ est l'asymptote oblique de f_3 (asymptote non verticale)

2) Voyons si f_3 et son asymptote non verticale se coupent, autrement dit si le système

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x^2+17x-55}{x-1} \\ y=2x+19 \end{cases}$$ a une solution.

On peut écrire $\dfrac{2x^2+17x-55}{x-1}=2x+19 \Rightarrow 2x^2+17x-55=(2x+19)(x-1)$
$\Rightarrow 2x^2+17x-55=2x^2-2x+19x-19 \Rightarrow -55=-19$ impossible.
Ainsi f_3 ne coupent pas son asymptote oblique.

3) D'après 1), on a $f_3(x)=2x+19+\dfrac{-36}{x-1}$.

Ainsi, lorsque $x\to-\infty$, $\dfrac{-36}{x-1}>0$ et f_3 s'approche de $y=2x+19$ par en-dessus ;
lorsque $x\to+\infty$, $\dfrac{-36}{x-1}<0$ et f_3 s'approche de $y=2x+19$ par en-dessous.

<u>Remarques</u>: Dans les simplifications des 3 fonctions, on a à chaque fois simplifier la fraction par un polynôme du premier degré en x. Or ce polynôme peut être nul, ce qui fait

qu'on ne peut pas simplifier dans ce cas. Pour le x tel que le polynôme par lequel on simplifie est nul est un x tel que la fonction est de la forme "$\frac{0}{0}$", ce qui est une indéterminée ; ce n'est pas une asymptote verticale, car la valeur pour la fonction simplifiée pour ce x existe ; c'est ce qu'on appelle un trou ; sa première coordonnée est x ; sa deuxième coordonnée peut se calculer avec la fonction simplifiée.

a. On a simplifié par $x+7$ avec $x \neq -7$.
Si $x=-7$, on a $y = \frac{-10(-7)^2+15\cdot(-7)}{2(-7-1)} = \frac{-490-105}{-16} = \frac{605}{16}$.

Par conséquent, $\left(-7; \frac{605}{16}\right)$ est un trou pour f_1.

b. On a simplifié par $x-2$ avec $x \neq 2$.
Si $x=2$, on a $y = \frac{3x+15}{4x+12} = \frac{3.2+15}{4.2+12} = \frac{21}{20}$.

Par conséquent, $\left(2; \frac{21}{20}\right)$ est un trou pour f_2.

c. On a simplifié par $x-3$ avec $x \neq 3$.
Si $x=3$, on a $y = \frac{2\cdot 3^2+17.3-55}{3-1} = \frac{14}{2} = 7$.

Ainsi, $(3;7)$ est un trou pour f_3.

Exercice 6.17.

a. Commençons par voir si on peut simplifier $f(x) = \frac{x^2-5x+3}{2x-6}$: on a $2x-6 = 2(x-3)$; en outre, $x^2-5x+3=0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4.1.3 = 25-12 = 13$ et $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$; ainsi, on a $x^2-5x+3 = \left(x - \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$; on en déduit que f n'est pas simplifiable.

On a $2x-6=0 \Rightarrow 2(x-3)=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$; le domaine de définition de f est ainsi $D = \mathbb{R} - \{3\}$.

On doit déterminer ce que valent $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x)$.

Comme $x=3$ est une asymptote verticale, les limites valent $\pm\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} 3$, on a $x^2-5x+3 \to 3^2-5.3+3 = 9-15+3 = -3 < 0$ et $2x-6 > 0$.

Si $x \underset{<}{\to} 3$, on a $x^2-5x+3 \to -3 < 0$ et $2x-6 < 0$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = "\frac{-3}{0_+}" = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = "\frac{-3}{0_-}" = +\infty$.

b. Commençons par voir si on peut simplifier $g(x) = \frac{4x-3}{x^2-4}$: on a $x^2-4 = (x+2)(x-2)$, qui n'a pas de facteur commun avec $4x-3$; on en déduit que g n'est pas simplifiable.

On a $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=-2$ ou $x=2$; le domaine de définition de g est ainsi $D = \mathbb{R} - \{-2;2\}$.

On doit déterminer ce que valent $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} g(x)$.

Comme $x=2$ et $x=-2$ sont des asymptotes verticales, les limites valent toutes $\pm\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} 2$, on a $4x-3 \to 4.2-3 = 5 > 0$ et $x^2-4 > 0$.

Si $x \underset{<}{\to} 2$, on a $4x-3 \to 5 > 0$ et $x^2-4 < 0$.

Si $x \underset{>}{\to} -2$, on a $4x-3 \to 4.(-2)-3 = -11 < 0$ et $x^2-4 < 0$.

Si $x \underset{<}{\to} -2$, on a $4x-3 \to -11 < 0$ et $x^2-4 > 0$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x) = "\frac{5}{0_+}" = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} g(x) = "\frac{5}{0_-}" = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} g(x) = "\frac{-11}{0_-}" = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} g(x) = "\frac{-11}{0_+}" = -\infty$.

c. Commençons par voir si on peut simplifier $h(x) = \frac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}$: on a $x^2-x-12 = (x+3)(x-4)$ et $x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$; on a ainsi $h(x) = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-1)}$ et $h(x) = \frac{x-4}{x-1}$ si $x \neq -3$.

On a $x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow$ soit $x+3=0$, soit $x-1=0 \Rightarrow x=-3$ ou $x=1$; le domaine de définition de h est ainsi $D = \mathbb{R} - \{-3;1\}$.

Comme $x=-3$ est un trou pour h (puisque h simplifié est calculable en $x=-3$), on a $\lim\limits_{x \to -3} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ \neq}} \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-1)} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x-4}{x-1} = \frac{-3-4}{-3-1} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$.

Comme $x=1$ est une asymptote verticale, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} h(x)$ valent $\pm\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} 1$, on a, puisque $x \neq 3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x-4}{x-1} = \frac{"-3"}{0+} = -\infty$.

Si $x \underset{<}{\to} 1$, on a, puisque $x \neq 3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x-4}{x-1} = \frac{"-3"}{0-} = +\infty$

Exercice 6.18.

On a $f(x)=\dfrac{-2x^3-6x^2+20x}{5x^2-15x+10}$.

Commençons par regarder si f est simplifiable : on a $-2x^3-6x^2+20x=-2x(x^2+3x-10)=$
$=-2x(x+5)(x-2)$ et $5x^2-15x+10=5(x^2-3x+2)=5(x-1)(x-2)$.

Ainsi, si $x\neq 2$, on a $f(x)=\dfrac{-2x(x+5)(x-2)}{5(x-1)(x-2)}=\dfrac{-2x(x+5)}{5(x-1)}=\dfrac{-2x^2-10x}{5x-5}$.

Domaine de définition: on a $5x^2-15x+10=0 \Rightarrow 5(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1$ ou $x=2$
$\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Parité: $f(-x)=\dfrac{-2(-x)^3-6(-x)^2+20\cdot(-x)}{5(-x)^2-15(-x)+10}=\dfrac{2x^3-6x^2-20x}{5x^2+15x+10}\neq\pm f(x)\Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

Intersection avec l'axe x: $y=0\Rightarrow\dfrac{-2x^3-6x^2+20x}{5x^2-15x+10}=0\Rightarrow -2x^3-6x^2+20x=0$
$\Rightarrow -2x(x+5)(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=-5$ ou $x=2$.

Intersection avec l'axe y: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{-2\cdot0^3-6\cdot0^2+20\cdot0}{5\cdot0^2-15\cdot0+10}=0$.

Tableau de signes:

x		-5		0		1		2	
$-2x^3-6x^2+20x$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$5x^2-15x+10$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	////	$-$	ind.	$-$

Trous: $x=2\notin D$, mais on peut calculer $f(x)$ en $x=2$ dans sa version simplifiée:
$f(2)=\dfrac{-2\cdot2^2-10\cdot2}{5\cdot2-5}=\dfrac{-8-20}{10-5}=\dfrac{-28}{5}=-\dfrac{28}{5}$; ainsi $\left(2;-\frac{28}{5}\right)$ est un trou pour le graphe de f.

Asymptote verticale: $x=1$ est asymptote verticale ; en outre $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>\\\neq}}f(x)=$
$=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{-2x^2-10x}{5(x-1)}=\text{"}\dfrac{-2-10}{0+}\text{"}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<\\\neq}}f(x)=$
$=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{-2x^2-10x}{5(x-1)}=\text{"}\dfrac{-2-10}{0-}\text{"}=+\infty$.

Asymptote non verticale: on effectue la division euclidienne de $-2x^3-6x^2+20x$ par $5x^2-15x+10$:

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^3-6x^2+20x & 5x^2-15x+10 \\
\cline{2-2}
\underline{-(-2x^3+6x^2-4x)} & -\frac{2}{5}x-\frac{12}{5} \\
-12x^2+24x & \\
\underline{-(-12x^2+36x-24)} & \\
-12x+24 &
\end{array}
$$

On en déduit que $y=-\frac{2}{5}x-\frac{12}{5}$ est une asymptote oblique de f.

En outre, on peut écrire $f(x)=-\frac{2}{5}x-\frac{12}{5}+\dfrac{-12x+24}{5x^2-15x+10}$.

Lorsque $x\to-\infty$, on a $-12x+24>0$ et $5x^2-15x+10>0$; ainsi $\dfrac{-12x+24}{5x^2-15x+10}>0$.

Lorsque $x\to+\infty$, on a $-12x+24<0$ et $5x^2-15x+10>0$; ainsi $\dfrac{-12x+24}{5x^2-15x+10}<0$.

On en déduit que f s'approche de son asymptote oblique par au-dessus à $-\infty$ et par au-dessous à $+\infty$.

Cherchons si f coupe son asymptote : on doit avoir

$$y=\frac{-2x^3-6x^2+20x}{5x^2-15x+10} \quad \text{et} \quad y=-\frac{2}{5}x-\frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^3-6x^2+20x}{5x^2-15x+10}=-\frac{2}{5}x-\frac{12}{5} \Rightarrow -2x^3-6x^2+20x=\left(-\frac{2}{5}x-\frac{12}{5}\right)(5x^2-15x+10)$$

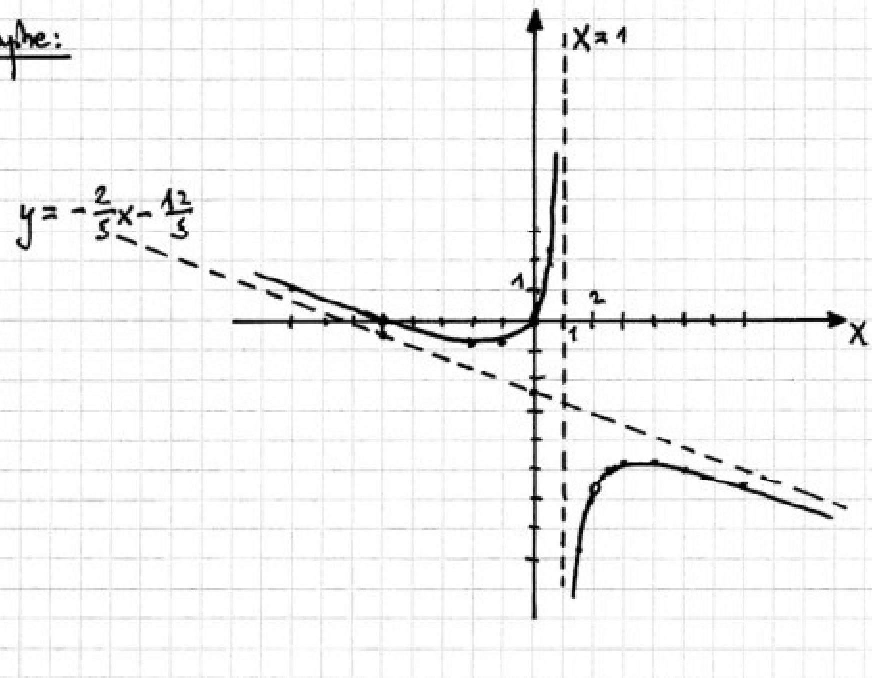
$$\Rightarrow -2x^3-6x^2+20x=-2x^3+6x^2-4x-12x^2+36x-24$$

$$\Rightarrow -6x^2+20x=-6x^2+32x-24 \Rightarrow 20x=32x-24$$

$$\Rightarrow 12x=24 \Rightarrow x=2$$

Or, $x=2\notin D$. Donc f ne coupe pas son asymptote.

<u>Graphe:</u>



Exercice 6.19.

a. On a $\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$.

b. On va choisir des valeurs positives et négatives de x s'approchant de plus en plus de zéro et calculer à chaque fois $\frac{\sin(x)}{x}$ (on prend x en radian).

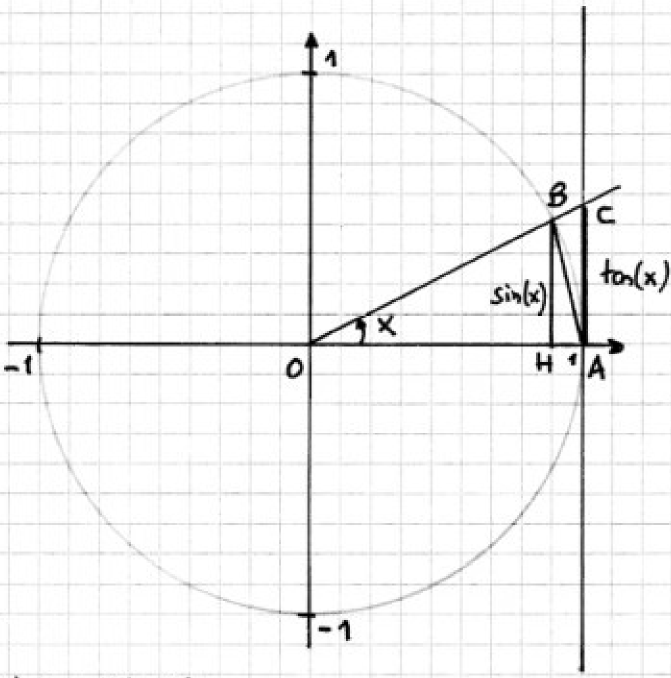
$x = 0{,}1$: $\frac{\sin(x)}{x} = 0{,}9983$; $x = -0{,}1$: $\frac{\sin(x)}{x} = 0{,}9983$;

$x = 0{,}01$: $\frac{\sin(x)}{x} = 0{,}999983$; $x = -0{,}01$: $\frac{\sin(x)}{x} = 0{,}999983$;

$x = 0{,}001$: $\frac{\sin(x)}{x} = 0{,}99999983$; $x = -0{,}001$: $\frac{\sin(x)}{x} = 0{,}99999983$.

On en déduit ainsi que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

c. Soit le cercle trigonométrique et soit un angle positif x en radians. L'arc de cercle AB correspond à cette angle x.



On a clairement :

aire triangle OAB $\leq$ aire secteur circulaire OAB $\leq$ aire triangle OAC.

On a aire triangle OAB $= \frac{OA \cdot HB}{2} = \frac{1 \cdot \sin(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$, aire secteur circulaire OAB $= \pi \cdot OA^2 \cdot \frac{x}{2\pi} = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$ et aire triangle OAC $= \frac{OA \cdot AC}{2} = \frac{1 \cdot \tan(x)}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$.

On obtient ainsi $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} \Rightarrow \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

De $\sin(x) \leq x$, comme $x > 0$, on obtient $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.

De $x \leq \tan(x)$, on tire $x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow x\cos(x) \leq \sin(x)$ (puisque $\cos(x) > 0$ si $x > 0$)

$\Rightarrow \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$.

On a ainsi $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ pour toute valeur de $x > 0$.

De plus, on a vu en a. que $\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$.

Par passage à la limite $x \to 0$, on obtient $\lim_{x \to 0} \cos(x) \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$, ce qui implique forcément que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Reste à considérer maintenant le cas où x est un angle négatif en radians.

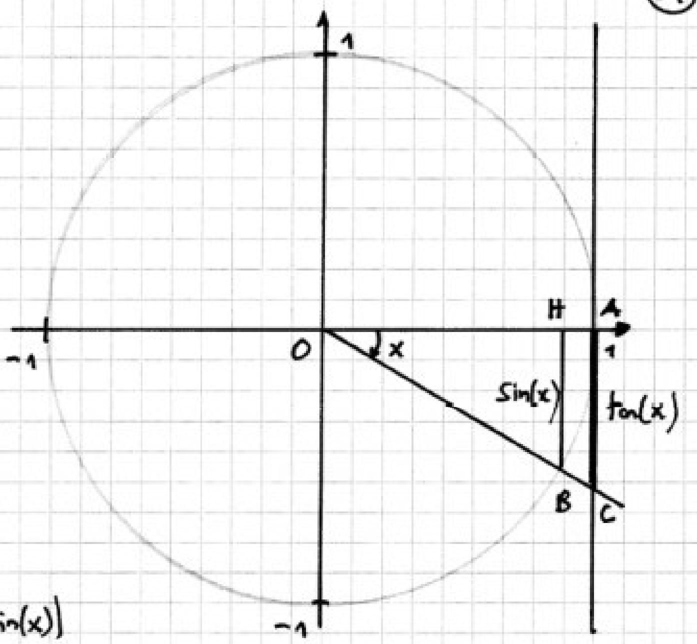
L'arc de cercle AB correspond en valeur absolue à cette angle x.

On a clairement : aire triangle OAB $\leq$ aire secteur circulaire OAB $\leq$ aire triangle OAC.

On a aire triangle OAB $= \frac{OA \cdot HB}{2} = \frac{1 \cdot |\sin(x)|}{2} = \frac{|\sin(x)|}{2}$, aire secteur circulaire OAB $=$

$= \pi \cdot OA^2 \cdot \frac{|x|}{2\pi} = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{|x|}{2\pi} = \frac{|x|}{2}$ et

aire triangle $OAC = \frac{OA \cdot AC}{2} = \frac{1 \cdot |\tan(x)|}{2} = \frac{|\tan(x)|}{2}$.



On obtient ainsi :

$$\frac{|\sin(x)|}{2} \leq \frac{|x|}{2} \leqslant \frac{|\tan(x)|}{2}$$

$$\Longrightarrow |\sin(x)| \leq |x| \leq |\tan(x)|.$$

De $|\sin(x)| \leq |x|$, comme $|x| > 0$, on obtient $\frac{|\sin(x)|}{|x|} \leqslant 1$.

De $|x| \leqslant |\tan(x)|$, on obtient

$$|x| \leq \left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right| = \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|} \Longrightarrow |x| \cdot |\cos(x)| \leq |\sin(x)|$$

$$\Longrightarrow |\cos(x)| \leq \frac{|\sin(x)|}{|x|} = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$$

On a ainsi $|\cos(x)| \leq \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1$ pour toute valeur de $x < 0$.

De plus, on a vu en a. que $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$. Cela signifie que $\lim_{x \to 0} |\cos(x)| = 1$ aussi.

Par passage à la limite $x \to 0$, on obtient $\lim_{x \to 0} |\cos(x)| \leq \lim_{x \to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant 1$

$$\Longrightarrow 1 \leq \lim_{x \to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1,$$ ce qui implique forcément que $\lim_{x \to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = 1$.

Or, si $x < 0$, $\sin(x) < 0$ et $\frac{\sin(x)}{x} > 0$. Ainsi $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = \frac{\sin(x)}{x}$.

On a donc bien $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$, pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

d. On sait que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ainsi $\frac{\tan(x)}{x} = \tan(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$.

Comme $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (voir c.) et $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$ (puisque $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$ d'après a.), on en déduit que $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot 1 = 1$.

Exercice 6.20.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin(2x)}{2x} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2\lim\limits_{2x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \overset{y=2x}{=} 2\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 2\cdot 1 = 2.$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{2}\lim\limits_{3x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \underset{y=3x}{=} \frac{3}{2}\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$

c. On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow 1-\cos^2 x = \sin^2 x$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\cdot\sin(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = 1\cdot 0 = 0.$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x}$. Or comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\frac{\sin(x)}{x} > \frac{1}{2}$ pour x suffisamment proche de zéro. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x} > \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ si $x>0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x} < \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ si $x<0$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sin(x)}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{\sin(x)}{x^2} = -\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x}$ n'existe pas (n'est pas définie)

e. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{2}\cdot\frac{\tan(5x)}{5x} = \frac{5}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{5x} = \frac{5}{2}\lim\limits_{5x\to 0} \frac{\tan(5x)}{5x} \overset{y=5x}{=} \frac{5}{2}\lim\limits_{y\to 0} \frac{\tan(y)}{y} = \frac{5}{2}\cdot 1 = \frac{5}{2}.$

f. On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow 1-\cos^2 x = \sin^2 x$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} =$

$= \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} = 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$

g. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(x)}{1-\sin^2(x)} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(x)}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)} =$

$= \frac{1}{1+\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$

h. Pour toute valeur de α, on a $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$. Ainsi, pour toute valeur de $x\neq 0$, on a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. On en conclut que, pour toute valeur de $x\neq 0$, on a $-|x| \leq x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$. En passant à la limite $x\to 0$, on obtient :

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

i. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\cdot 0 = 0$ (par h.).

Exercice 6.21.

a. On a $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x) = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

b. On a $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -1 = -1$.

Par conséquent $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

c. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$.

d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$.

e. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+1}{|x^2-4|} = \text{"}\frac{2^2+1}{|2^2-4|}\text{"} = \text{"}\frac{5}{0_+}\text{"} = +\infty$.

f. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{x+1-(2x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{x+1-2x+1} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{-x+2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}{-1} =$

$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{3}$.

g. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{x^2+1}+1) = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2$.

h. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-1-9} =$

$= \lim\limits_{x \to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x-1}+3}{2} = \frac{\sqrt{2.5-1}+3}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$.

i. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(1-\sqrt{2-\sqrt{x}})(1+\sqrt{2-\sqrt{x}})}{(x-1)(1+\sqrt{2-\sqrt{x}})} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1-(2-\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{2-\sqrt{x}})} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(1+\sqrt{2-\sqrt{x}})} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(1+\sqrt{2-\sqrt{x}})} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(1+\sqrt{2-\sqrt{x}})} = \frac{1}{(1+1)(1+\sqrt{2-1})} = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{4}$.

Exercice 6.22.

On a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$. En outre $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ et $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\sin(x)\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}=1\cdot 0\cdot\frac{1}{1+1}=0.$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{3})}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}}=\frac{1}{6}\lim\limits_{\frac{x}{3}\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{x}{3}}\overset{y=\frac{x}{3}}{=}\frac{1}{6}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}=$

$=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{\tan(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\sin^2(x)\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)\cdot\cos(x)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=0\cdot 1=0.$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}.$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{\tan^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\sin^2(x)\cdot\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\cos^2(x)=\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)\right)^2=1^2=1.$

f. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2+4-4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}5(\sqrt{x^2+4}+2)=5(\sqrt{4}+2)=20.$

g. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2-2x+4}+2x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x+4}+2x)(\sqrt{x^2-2x+4}-2x)}{\sqrt{x^2-2x+4}-2x}=$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-2x+4-4x^2}{\sqrt{x^2-2x+4}-2x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-3x^2-2x+4}{\sqrt{x^2-2x+4}-2x}$;

on a $\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}=|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$; comme $x\to-\infty$, on a $x<0$ et $|x|=-x$; ainsi $\sqrt{x^2-2x+4}=-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$; ainsi:

$\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2-2x+4}+2x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-x(3x+2-\frac{4}{x})}{-x(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+2)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x+2-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+2}=\frac{"-\infty+2-0"}{\sqrt{1-0+0}+2}=\frac{"-\infty"}{3}=-\infty.$

h. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2-2x+4}+x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x+4}+x)(\sqrt{x^2-2x+4}-x)}{\sqrt{x^2-2x+4}-x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-2x+4-x^2}{\sqrt{x^2-2x+4}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-2x+4}{\sqrt{x^2-2x+4}-x}$; comme en g, si $x\to-\infty$, on a $\sqrt{x^2-2x+4}=-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$;

ainsi $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2-2x+4}+x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-x(2-\frac{4}{x})}{-x(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}=\frac{2-0}{\sqrt{1-0+0}+1}=\frac{2}{2}=1.$

i. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{1+\frac{2}{3}+\frac{3}{x^2}}=\sqrt{1+0+0}=1.$

j. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4})=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}}=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-(x^2+4)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(2-\frac{4}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{2-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{2}{2} = 1.$$

k. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin(x)}$: on pose $y = x-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y+\frac{\pi}{2}$; ainsi $\sin(x) = \sin(y+\frac{\pi}{2}) = \cos(y)$;

on a $y \to 0$ si $x \to \frac{\pi}{2}$; ainsi $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{1-\cos(y)}$.

D'après a., on a $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)}$.

On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Ainsi $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \sin(x)$.

On en déduit que $\lim_{y\to 0} \frac{y}{1-\cos(y)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\sin(y)} = \frac{2}{\lim_{y\to 0}\sin(y)}$.

Or, on a $\lim_{\substack{y\to 0\\ >}} \sin(y) = 0_+$ et $\lim_{\substack{y\to 0\\ <}} \sin(y) = 0_-$.

On a alors $\lim_{\substack{y\to 0\\ >}} \frac{y}{1-\cos(y)} = "\frac{2}{0_+}" = +\infty$ et $\lim_{\substack{y\to 0\\ <}} \frac{y}{1-\cos(y)} = "\frac{2}{0_-}" = -\infty$.

On en conclut donc que $\lim_{y\to 0} \frac{y}{1-\cos(y)}$ et, par conséquent, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin(x)}$ n'existent pas.

l. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6.23.

Pour déterminer les asymptotes non verticales d'une fonction quelconque f, on procède ainsi :

1) on calcule $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ (m peut exister soit à $-\infty$, soit à $+\infty$, soit aux 2);

2) où m existe, on calcule $h = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$;

3) où m et h existent $y = mx + h$ est asymptote non verticale pour f.

a. $f_1(x) = \sqrt{4x^2 - 5}$: <u>domaine de définition</u>: on doit avoir $4x^2 - 5 \geqslant 0$; comme $4x^2 - 5 = 0$ $\Rightarrow 4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ et comme $4x^2 - 5$ est une parabole tournée vers le haut, on a $4x^2 - 5 \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$;

ainsi $D = \left]-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \left]-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right[$;

<u>asymptotes verticales</u>: comme $f_1\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$, on conclut qu'il n'y a pas d'asymptote verticale;

<u>asymptotes non verticales</u>: on va procéder comme décrit ci-dessus:

1) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{4x^2-5}}{x}$;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-5}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{4 - \frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4 - \frac{5}{x^2}} =$

$= \sqrt{4 - 0} = \sqrt{4} = 2$;

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-5}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{4 - \frac{5}{x^2}}}{x}$ (en effet: $\sqrt{4x^2-5} = \sqrt{x^2\left(4 - \frac{5}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{4 - \frac{5}{x^2}} = -x\sqrt{4 - \frac{5}{x^2}}$ (car, si $x < 0$, $|x| = -x$); ainsi $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{4 - \frac{5}{x^2}}\right) =$

$= -\sqrt{4 - 0} = -\sqrt{4} = -2$;

on a donc 2 valeurs pour m: si $x \to +\infty$, $m = 2$, et, si $x \to -\infty$, $m = -2$;

2) avec $m = 2$ si $x \to +\infty$: $h = \lim_{x \to +\infty} (f_1(x) - mx) =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2-5} - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-5} - 2x)(\sqrt{4x^2-5} + 2x)}{\sqrt{4x^2-5} + 2x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 5 - 4x^2}{\sqrt{4x^2-5} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5}{\sqrt{4x^2-5} + 2x} = \text{"}\frac{-5}{+\infty}\text{"} = 0$;

avec $m = -2$ si $x \to -\infty$: $h = \lim_{x \to -\infty} (f_1(x) - mx) =$

$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2-5} + 2x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-5} + 2x)(\sqrt{4x^2-5} - 2x)}{\sqrt{4x^2-5} - 2x} =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 5 - 4x^2}{\sqrt{4x^2-5} - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5}{\sqrt{4x^2-5} - 2x} = \text{"}\frac{-5}{+\infty}\text{"} = 0$;

3) ainsi $y = 2x$ est asymptote oblique de f_1 lorsque $x \to +\infty$ et

$y = -2x$ est asymptote oblique de f_1 lorsque $x \to -\infty$.

b. $f_2(x) = \sqrt{x^2+x+1}$: <u>domaine de définition:</u> on doit avoir $x^2+x+1 \geq 0$; comme $x^2+x+1=0$ $\Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1-4 = -3 < 0$, et, comme x^2+x+1 est une parabole tournée vers le haut ($\smile$), on a $x^2+x+1 \geq 0$ pour tout x ;

ainsi $D = \mathbb{R}$;

<u>asymptotes verticales:</u> puisqu'il n'y a pas d'exclu, il n'y a pas d'asymptote verticale ;

<u>asymptotes non verticales:</u>

1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} =$

$= \sqrt{1+0+0} = 1$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{-|x|}$ (car $x<0$)

$= \lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1+0+0} = -1$;

on a donc 2 valeurs pour m : si $x \to +\infty$, $m=1$, et,
si $x \to -\infty$, $m=-1$;

2) avec $m=1$ si $x \to +\infty$: $h = \lim\limits_{x \to +\infty} (f_2(x) - mx) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}$;

avec $m=-1$ si $x \to -\infty$: $h = \lim\limits_{x \to -\infty} (f_2(x) - mx) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}+x)(\sqrt{x^2+x+1}-x)}{\sqrt{x^2+x+1}-x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x(-1-\frac{1}{x})}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}$ car $x<0$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{-1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = -\frac{1}{2}$;

3) ainsi $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique de f_2 lorsque $x \to +\infty$ et $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique de f_2 lorsque $x \to -\infty$.

c. $f_3(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+1}$: domaine de définition: on doit avoir $x^2+1\geqslant 0$ et $x+1\neq 0$; on a, pour toute valeur de x, $x^2+1\geqslant 1\geqslant 0$; en outre $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$; ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

asymptotes verticales: comme $x=-1$ est un exclu de $\mathcal{D}$, $x=-1$ est une asymptote verticale de f_3 ;

asymptotes non verticales:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f_3(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x(x+1)}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_3(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\text{"}\dfrac{1-\sqrt{1+0}}{+\infty}\text{"}=$

$=\text{"}\dfrac{0}{+\infty}\text{"}=0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_3(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(x+1)}$ (car, si $x<0$, $|x|=-x$)

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\text{"}\dfrac{1+\sqrt{1+0}}{+\infty}\text{"}=\text{"}\dfrac{2}{+\infty}\text{"}=0$;

on obtient donc une seule valeur de m : $m=0$ (on sait alors que f_3 admet une ou des asymptotes horizontales et pas d'obliques);

2) avec $m=0$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f_3(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=$

$=\dfrac{1-\sqrt{1+0}}{1+0}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1+\sqrt{1+0}}{1+0}=\dfrac{2}{1}=2$;

ainsi, si $x\to+\infty$, $h=0$ et, si $x\to-\infty$, $h=2$;

3) par conséquent $y=0$ est une asymptote horizontale de f_3 lorsque $x\to+\infty$ et $y=2$ est une asymptote horizontale de f_3 lorsque $x\to-\infty$.

d. $f_4(x)=5x-\sqrt{4x^2+2x}$: domaine de définition: on doit avoir $4x^2+2x\geqslant 0$; comme $4x^2+2x=0 \Rightarrow 2x(2x+1)=0 \Rightarrow x=0$ ou $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$; en outre $4x^2+2x$ est une parabole tournée vers le haut; on a donc $4x^2+2x\geqslant 0$ si $x\in\,]-\infty;0]\cup[-\frac{1}{2};+\infty[$;

ainsi $\mathcal{D}=\,]-\infty;0]\cup[-\frac{1}{2};+\infty[\,=\mathbb{R}\setminus\,]0;-\frac{1}{2}[$;

asymptotes verticales: comme $f(0)=0$ et $f(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{2}$, on conclut que f_4 n'a pas d'asymptote verticale;

asymptotes non verticales:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f_4(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x-\sqrt{4x^2+2x}}{x}$;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-\sqrt{4x^2+2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(5-\sqrt{4+\frac{2}{x}})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(5-\sqrt{4+\frac{2}{x}}\right) =$$

$$= 5-\sqrt{4+0} = 3;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x-\sqrt{4x^2+2x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x+x\sqrt{4+\frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(5+\sqrt{4+\frac{2}{x}}\right) =$$

$$= 5+\sqrt{4+0} = 7;$$

on obtient donc 2 valeurs de m : si $x \to +\infty$, $m = 3$, et, si $x \to -\infty$, $m = 7$;

2) avec $m=3$ si $x \to +\infty$: $h = \lim_{x\to+\infty} (f_4(x) - mx) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(5x-\sqrt{4x^2+2x}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2+2x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-\sqrt{4x^2+2x})(2x+\sqrt{4x^2+2x})}{2x+\sqrt{4x^2+2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-(4x^2+2x)}{2x+\sqrt{4x^2+2x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{2x+\sqrt{4x^2+2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot(-2)}{x(2+\sqrt{4+\frac{2}{x}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{2+\sqrt{4+\frac{2}{x}}} =$$

$$= \frac{-2}{2+\sqrt{4+0}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2};$$

avec $m = 7$ si $x \to -\infty$: $h = \lim_{x\to-\infty} (f_4(x) - mx) =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(5x-\sqrt{4x^2+2x}-7x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-2x-\sqrt{4x^2+2x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-2x-\sqrt{4x^2+2x})(-2x+\sqrt{4x^2+2x})}{(-2x+\sqrt{4x^2+2x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-(4x^2+2x)}{-2x+\sqrt{4x^2+2x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{-2x+\sqrt{4x^2+2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2x-\sqrt{4x^2+2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot 2}{x(2+\sqrt{4+\frac{2}{x}})} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2+\sqrt{4+\frac{2}{x}}} = \frac{2}{2+\sqrt{4+0}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

3) ainsi $y = 3x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique de f_4 lorsque $x \to +\infty$ et $y = 7x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique de f_4 lorsque $x \to -\infty$.

Exercice 6.24.

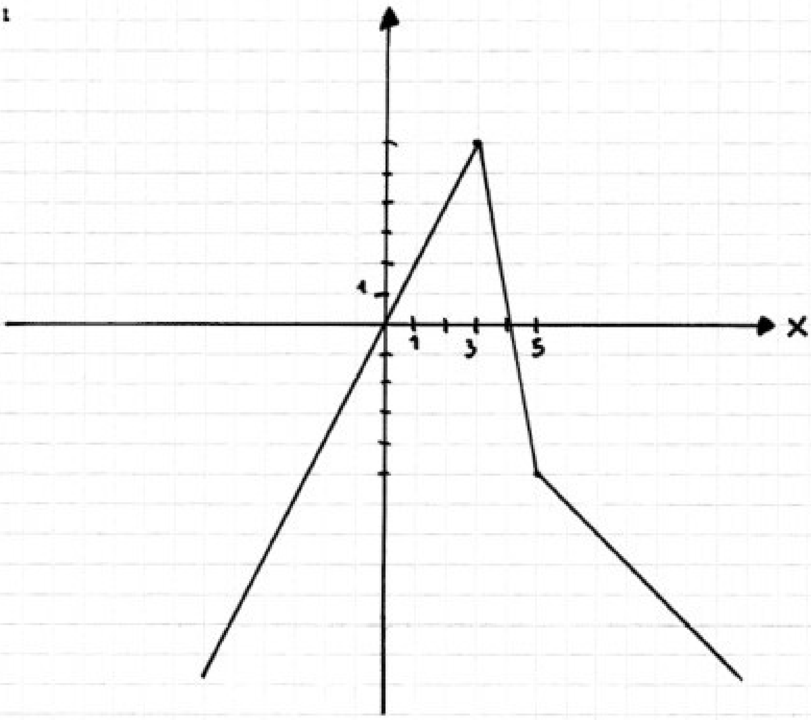
a. asymptote verticale en $x=-5 \Rightarrow f_1$ est de la forme $f_1(x)=\frac{\text{polynôme}}{x+5}$;
asymptote oblique $y=-x+5 \Rightarrow$ le quotient de "polynôme" par $x+5$ est $-x+5$ (et il y a un reste $\neq 0$) $\Rightarrow$ polynôme $=(x+5)(-x+5)+c$, où $c \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ polynôme $=-x^2+25+c$;
courbe au-dessous de l'asymptote si $x \to +\infty \Rightarrow \frac{c}{x+5}>0 \Rightarrow c>0$;
on peut prendre par exemple $c=1$ et on a alors $f_1(x)=\frac{-x^2+26}{x+5}$;

b. asymptote verticale en $x=2 \Rightarrow f_1$ est de la forme $f_2(x)=\frac{\text{polynôme}}{x-2}$;
trou en $(3;11) \Rightarrow f_1$ se simplifie par $(x-3) \Rightarrow f_2(x)=\frac{c(x-3)}{(x-2)(x-3)}$;
Comme f_2 simplifié est $f_2(x)=\frac{c}{x-2}$, on doit avoir $f_2(3)=11$
$\Rightarrow 11=\frac{c}{3-2} \Rightarrow c=11$;
ainsi, on a $f_2(x)=\frac{11(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{11x-33}{x^2-5x+6}$.

Exercice 6.25.

On a $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x<3 \\ mx+h \text{ si } 3 \leq x \leq 5 \\ -x \text{ si } x>5. \end{cases}$

Graphiquement, on a :



On a $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} 2x = 6$.

Comme f est continue, on a $f(3)=6$ et, donc, $3m+h=6$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} (-x) = -5$.

Comme f est continue, on a $f(5)=-5$ et, donc $5m+h=-5$.

On a donc le système suivant à résoudre : $\begin{cases} 3m+h=6 \\ 5m+h=-5. \end{cases}$

Par soustraction de ces 2 équations, on obtient $-2m=11 \Rightarrow m=-\frac{11}{2}$.

Avec $m=-\frac{11}{2}$, on a $3\left(-\frac{11}{2}\right)+h=6 \Rightarrow -\frac{33}{2}+h=6 \Rightarrow h=6+\frac{33}{2}=\frac{45}{2}$.

Ainsi $m=-\frac{11}{2}$ et $h=\frac{45}{2}$.

Exercice 6.26.

$f(x)$: pour que f soit continue, on doit avoir $a = \lim\limits_{\underset{<}{x \to 0}} \frac{x-|x|}{x}$ et $a = \lim\limits_{\underset{>}{x \to 0}} \frac{2x-1}{b}$;

on a $\underset{<}{x \to 0}$; donc $x<0$ et $|x| = -x$; ainsi $a = \lim\limits_{\underset{<}{x \to 0}} \frac{x-|x|}{x} = \lim\limits_{\underset{<}{x \to 0}} \frac{x+x}{x} =$

$= \lim\limits_{\underset{<}{x \to 0}} \frac{2}{1} = 2$; on a donc $a = 2$; on doit ainsi avoir $\lim\limits_{\underset{>}{x \to 0}} \frac{2x-1}{b} = 2$;

or $\lim\limits_{\underset{>}{x \to 0}} \frac{2x-1}{b} = \frac{-1}{b}$; ainsi $-\frac{1}{b} = 2 \implies b = -\frac{1}{2}$;

on donc donc avoir $a = 2$ et $b = -\frac{1}{2}$.

$g(x)$: pour que g soit continue, on doit avoir $\lim\limits_{\underset{>}{x \to 2}} \frac{x^2+5x-14}{x-2} = 5 \cdot 2 + b = 10 + b$;

on a $x^2+5x-14 = (x+7)(x-2)$; ainsi $\lim\limits_{\underset{>}{x \to 2}} \frac{x^2+5x-14}{x-2} = \lim\limits_{\underset{>}{x \to 2}} \frac{(x+7)(x-2)}{x-2} =$

$= \lim\limits_{\underset{>}{x \to 2}} (x+7) = 2+7 = 9$; on doit donc avoir $9 = 10 + b \implies b = -1$;

en outre, on doit avoir $\lim\limits_{\underset{<}{x \to 1}} (x^2+ax+6) = 5 \cdot 1 + b = 5 + (-1) = 4$;

on a $\lim\limits_{\underset{<}{x \to 1}} (x^2+ax+6) = 1^2 + a + 6 = 7 + a$; ainsi $7 + a = 4 \implies a = -3$;

on doit donc avoir $a = -3$ et $b = -1$.

$h(x)$: pour que h soit continue, on doit avoir $\lim\limits_{\underset{<}{x \to -3}} (0{,}5^x - 6) = \sqrt{-3-a}$;

on a $\lim\limits_{\underset{<}{x \to -3}} (0{,}5^x - 6) = 0{,}5^{-3} - 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - 6 = 2^3 - 6 = 8 - 6 = 2$;

on doit donc avoir $\sqrt{-3-a} = 2 \implies -3 - a = 4 \implies a = -7$;

en outre, on doit avoir $\lim\limits_{x \to 9} \frac{-\sqrt{x^2+19}}{b} = \sqrt{9-a} = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$;

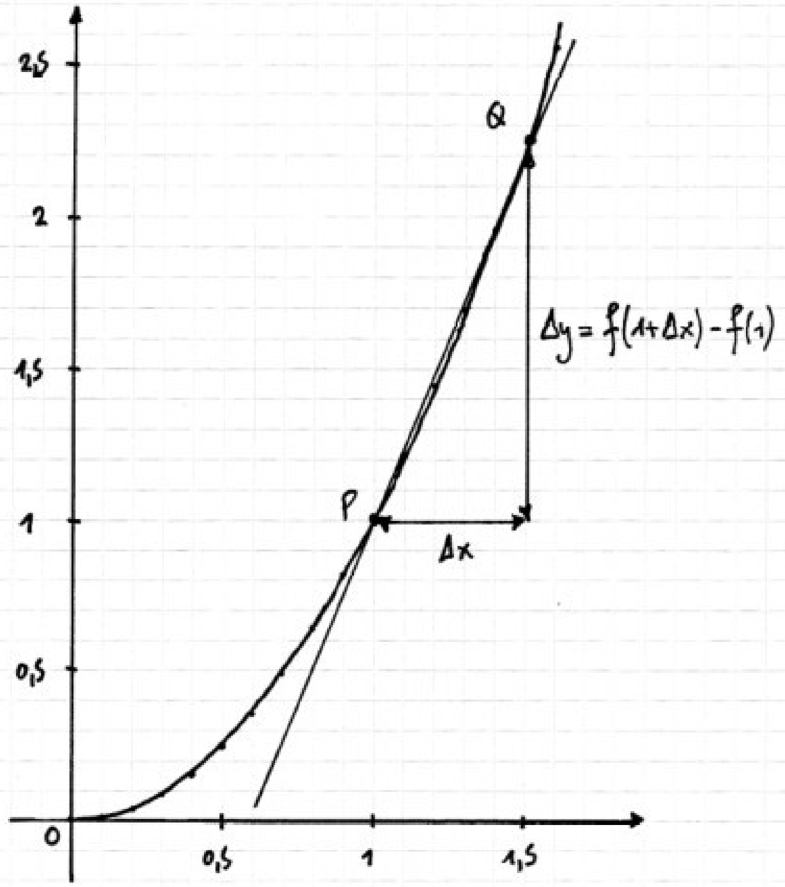
on a $\lim\limits_{\underset{>}{x \to 9}} \frac{-\sqrt{x^2+19}}{b} = \frac{-\sqrt{9^2+19}}{b} = \frac{-\sqrt{81+19}}{b} = \frac{-\sqrt{100}}{b} = \frac{-10}{b}$; ainsi

$-\frac{10}{b} = 4 \implies b = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$;

on doit donc avoir $a = -7$ et $b = -\frac{5}{2}$.

Exercice 6.27.

a.



b. $\Delta x = 0,5$: $f(1+\Delta x) - f(1) = f(1,5) - f(1) = 1,5^2 - 1^2 = 2,25 - 1 = 1,25$;

$\text{pente} = \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \dfrac{1,25}{0,5} = 2,5$;

$\Delta x = 0,4$: $f(1+\Delta x) - f(1) = f(1,4) - f(1) = 1,4^2 - 1^2 = 1,96 - 1 = 0,96$;

$\text{pente} = \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \dfrac{0,96}{0,4} = 2,4$;

$\Delta x = 0,3$: $f(1+\Delta x) - f(1) = f(1,3) - f(1) = 1,3^2 - 1^2 = 1,69 - 1 = 0,69$;

$\text{pente} = \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \dfrac{0,69}{0,3} = 2,3$;

$\Delta x = 0,2$: $f(1+\Delta x) - f(1) = f(1,2) - f(1) = 1,2^2 - 1^2 = 1,44 - 1 = 0,44$;

$\text{pente} = \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \dfrac{0,44}{0,2} = 2,2$;

$\Delta x = 0,1$: $f(1+\Delta x) - f(1) = f(1,1) - f(1) = 1,1^2 - 1^2 = 1,21 - 1 = 0,21$;

$\text{pente} = \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \dfrac{0,21}{0,1} = 2,1$;

$\Delta x = 0,01$: $f(1+\Delta x) - f(1) = f(1,01) - f(1) = 1,01^2 - 1^2 = 1,0201 - 1 = 0,0201$;

$\text{pente} = \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \dfrac{0,0201}{0,01} = 2,01.$

c. On doit trouver $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. On a: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2.$

Lorsque $\Delta x \to 0$, Q s'approche de P. Ainsi la sécante PQ s'approche de la tangente au graphe de f en P. Par conséquent, la pente de la sécante PQ s'approche de la pente de la tangente au graphe de f en P.

Ainsi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ est la pente de la tangente au graphe de f en P. On l'appelle la dérivée de f en $x = 1$ (première coordonnée de P).

d. Soit $P_0(x_0; y_0)$ un point du graphe de $f(x) = x^2$.

On a $y_0 = f(x_0) = x_0^2$.

On cherche $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ en $x = x_0$ (ce qui est la dérivée de f en x_0, noté $y' = f'(x_0)$).

On a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Ainsi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0$, ce que l'on peut écrire $f'(x_0) = 2x_0$.

Exercice 6.28.

Par définition, la dérivée d'une fonction $y=f(x)$ au point quelconque x est

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

a. $y=2x+5$: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)+5-(2x+5)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x+5-2x-5}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2=2.$$

b. $y=mx+h$: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)+h-(mx+h)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{mx+m\Delta x+h-mx-h}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}m=m.$$

c. $y=h$: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h-h}{\Delta x}=0.$$

d. $y=3x^2-4x+7$: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)+7-(3x^2-4x+7)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2-4x-4\Delta x+7-3x^2+4x-7}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6x\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(6x+3\Delta x-4)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x-4)=6x-4.$$

e. $y=ax^2+bx+c$: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2ax\Delta x+a\Delta x^2+b\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2ax+a\Delta x+b)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2ax+a\Delta x+b)=2ax+b.$$

f. $y=x^3$: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2-x^3}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x)=3x^2.$$

g. $y=x^n, n\in\mathbb{N}$: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}\Delta x+\Delta x^2\cdot(\ldots)-x^n}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x+\Delta x^2\cdot(\ldots)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(nx^{n-1}+\Delta x\cdot(\ldots))}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(nx^{n-1}+\Delta x\cdot(\ldots))=nx^{n-1}.$$

h. $y=\frac{1}{x}$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x(x+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}.$$

i. $y=\frac{1}{2x+1}$: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2(x+\Delta x)+1}-\frac{1}{2x+1}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2x+1-(2(x+\Delta x)+1)}{(2(x+\Delta x)+1)(2x+1)}}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2x+1-2x-2\Delta x-1}{(2(x+\Delta x)+1)(2x+1)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-2\Delta x}{(2(x+\Delta x)+1)(2x+1)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x(2(x+\Delta x)+1)(2x+1)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{(2(x+\Delta x)+1)(2x+1)}=$$

$$=\frac{-2}{(2x+1)^2}.$$

j. $y=\sqrt{x}$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

k. $y=\cos(x)$: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x)\cos(\Delta x)-\sin(x)\sin(\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos(x)\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}-\sin(x)\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\cos(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}-\sin(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x};$$

on sait que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}=1$; en outre $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos(\Delta x)-1)(\cos(\Delta x)+1)}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos^2(\Delta x)-1}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin^2(\Delta x)}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}=-1\cdot\frac{0}{1+1}=0;$$

ainsi $y'=\cos(x)\cdot 0-\sin(x)\cdot 1=-\sin(x)$.

l. $y=\sin(x)$: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x)\cos(\Delta x)+\cos(x)\sin(\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=$

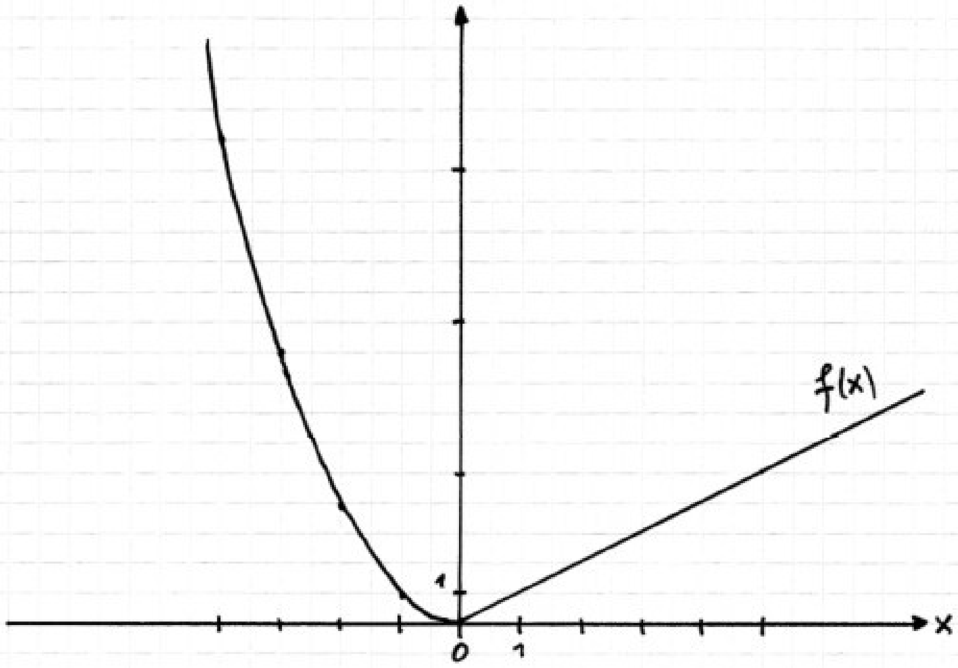
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}+\cos(x)\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\sin(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}}_{=0\text{ (voir k.)}}+\cos(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{1}=\cos(x).$$

Exercice 6.29

On a $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ x & \text{si } x>0. \end{cases}$

a.



On a $D=\mathbb{R}$ et $f(D)=[0;+\infty[$.

b. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x^2=0$ et $f(0)=0^2=0$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=f(0)$ et, donc, f est continue en $x=0$.

c. Si $x<0$, on a $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$.

Si $x>0$, on a $f'(x)=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} 1=1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 1=1$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f'(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x)$, f n'est pas dérivable en $x=0$.

Exercice 6.30

Si $f(x) = u \cdot v$, on a $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$.

a. $f(x) = (x+1)(x-1) = u \cdot v$ avec $u = x+1$ et $v = x-1$.
On a alors $u' = 1$ et $v' = 1$.
Ainsi $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot (x-1) + (x+1) \cdot 1 = x - 1 + x + 1 = 2x$.
D'autre part, $f(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$ et, donc, $f'(x) = 2x$.

b. $g(x) = (x^3+4)(x^2+3) = u \cdot v$ avec $u = x^3+4$ et $v = x^2+3$.
On a alors $u' = 3x^2$ et $v' = 2x$.
Ainsi $g'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 3x^2(x^2+3) + (x^3+4)2x = 3x^4 + 9x^2 + 2x^4 + 8x =$
$= 5x^4 + 9x^2 + 8x$.
D'autre part, $g(x) = (x^3+4)(x^2+3) = x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 12$ et, donc, $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 8x$.

c. $h(x) = x^m x^n = u \cdot v$ avec $u = x^m$ et $v = x^n$.
On a alors $u' = mx^{m-1}$ et $v' = nx^{n-1}$.
Ainsi $h'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = mx^{m-1} \cdot x^n + nx^{n-1} x^m = mx^{m+n-1} + nx^{m+n-1} = (m+n)x^{m+n-1}$.
D'autre part, $h(x) = x^m x^n = x^{m+n}$ et $h'(x) = (m+n)x^{m+n-1}$.

Exercice 6.31

a. $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 89$: $f'(x) = (4x^3 - 7x^2 + 89)' = (4x^3)' + (-7x^2)' + 89' =$
$= 4(x^3)' - 7(x^2)' + 0 = 4\cdot 3x^2 - 7\cdot 2x = 12x^2 - 14x.$

b. $f(x) = -5x^4 + \cos(60°)x^2 - \tan(45°)$: $f'(x) = (-5x^4 + \cos(60°)x^2 - \tan(45°))' =$
$= (-5x^4)' + (\cos(60°)x^2)' + (-\tan(45°))' =$
$= -5(x^4)' + \cos(60°)(x^2)' + 0 =$
$= -5\cdot 4x^3 + \cos(60°)2x = -20x^3 + 2\cos(60°)x.$

c. $f(x) = (7-5x)^2 = (7-5x)(7-5x) = u\cdot v$ avec $u = 7-5x$ et $v' = 7-5x$; on a $u' = -5$ et $v' = -5$;
ainsi $f'(x) = u'v + uv' = -5(7-5x) - 5(7-5x) = -10(7-5x) = 50x - 70.$

d. $f(x) = 3\sqrt{x} + 8x^2 - 9x$: $f'(x) = (3\sqrt{x})' + (8x^2)' + (-9x)' = 3(\sqrt{x})' + 8(x^2)' - 9(x)' =$
$= 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 8\cdot 2x - 9\cdot 1 = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 16x - 9.$

e. $f(x) = \frac{7}{2x} + 3\sin(x)$: $f'(x) = \left(\frac{7}{2x}\right)' + (3\sin(x))' = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{x}\right)' + 3(\sin(x))' =$
$= \frac{7}{2}(x^{-1})' + 3\cos(x) = \frac{7}{2}(-x^{-2}) + 3\cos(x) = -\frac{7}{2x^2} + 3\cos(x).$

f. $f(x) = \sqrt[5]{x^4} = (x^4)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{4}{5}}$: $f'(x) = (x^{\frac{4}{5}})' = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5}\,\frac{1}{x^{1/5}} = \frac{4}{5}\,\frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}.$

Exercice 6.32

On a la courbe $y = f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 9x - 1$.
La pente de la tangente en $x = x_0$ est par définition la valeur en $x = x_0$ de la dérivée de f: $f'(x_0)$.
On doit donc résoudre $f'(x) = 13$.
On a $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 9 = 6x^2 - 10x + 9$.
Ainsi $6x^2 - 10x + 9 = 13 \Rightarrow 6x^2 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3, b = -5$ et $c = -2$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) =$
$= 25 + 24 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$; les solutions sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} =$
$= \frac{5-7}{2 \cdot 3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$.

Avec $x_1 = 2$, on a $y_1 = 2x_1^3 - 5x_1^2 + 9x_1 - 1 = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 1 = 16 - 20 + 18 - 1 = 13$.
Avec $x_2 = -\frac{1}{3}$, on a $y_2 = 2x_2^3 - 5x_2^2 + 9x_2 - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 =$
$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) - 5 \cdot \frac{1}{9} - 3 - 1 = -\frac{2}{27} - \frac{5}{9} - 4 = -\frac{2}{27} - \frac{15}{27} - \frac{108}{27} = -\frac{125}{27}$.

Les coordonnées des points cherchés sont donc $(2; 13)$ et $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{125}{27}\right)$.