Exercice 1

1. C'est une permutation avec répétitions :

nombre de lettres : 9

nombre de U : 3

nombre de R : 2

nombre de L : 2

nombre de B : 1

nombre de E : 1.

Ainsi le nombre de mots possibles est $\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 15'120.$

2. Nombre de motorisations : 4

Nombre de couleurs : 7

Toit ouvrant ou non : 2 possibilités

GPS intégré ou non : 2 possibilités

Jantes en aluminium : 2 possibilités.

Ainsi le nombre de possibilités est $4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 224.$

3. C'est une permutation avec répétitions :

nombre de boules : $6+8+3 = 17$

nombre de boules rouges : 6

nombre de boules jaunes : 8

nombre de boules bleues : 3.

Ainsi le nombre de possibilités est $\frac{17!}{6! \cdot 8! \cdot 3!} = 2'042'040.$

4. Pour les 3 volumes qui doivent rester ensemble dans le même ordre, on a les possibilités :

XXX_ _ _ _XXX_ _ _ _XXX_ _ _ _XXX , donc 4 possibilités.

Pour les 3 autres livres, c'est une permutation et le nombre de possibilités est $3! = 6$.

Ainsi on a donc au total $4 \cdot 6 = 24$ possibilités.

Exercice 2

a. Les élèves commencent par choisir globalement 18 places parmi 22 disponibles (sans tenir compte de l'ordre). C'est une combinaison et le nombre de possibilités est $C_{18}^{22} = $
$= \dfrac{22!}{18!(22-18)!}$.

Ensuite, ils peuvent se permuter dans les 18 places (sans répétition) : 18! possibilités.
Au total, on obtient donc $\dfrac{22!}{18!(22-18)!} \cdot 18! = \dfrac{22!}{(22-18)!}$, ce qui est en fait la formule d'arrangements sans répétitions : $A_{18}^{22} = \dfrac{22!}{(22-18)!} \cong 4{,}683 \cdot 10^{19}$ possibilités.

b. Le couple choisit une table parmi les 11 disponibles : 11 possibilités.
Le couple a 2 possibilités pour se placer à la table : garçon-fille ou fille-garçon.
Les 16 autres élèves se placent aux 20 places restantes.
Similairement à a., ils ont A_{16}^{20} possibilités.
Ainsi, au total, il y a $11 \cdot 2 \cdot A_{16}^{20} = 22 \cdot \dfrac{20!}{(20-16)!} \cong 2{,}23 \cdot 10^{18}$ possibilités.

c. Pour les 4 élèves seuls à une table, on a, similairement à a., A_4^{22} possibilités.
Pour les 14 autres élèves aux $22-8=14$ places restantes, c'est une permutation sans répétition : il y a 14! possibilités.
Ainsi, au total, il y a $A_4^{22} \cdot 14! = \dfrac{22!}{(22-4)!} \cdot 14! \cong 1{,}53 \cdot 10^{16}$ possibilités.

d. Puisque l'on ne tient pas compte de l'ordre, c'est une combinaison de 6 personnes parmi 18 : $C_6^{18} = \dfrac{18!}{6!(18-6)!} = \boxed{18}\,\boxed{\text{2nd}}\,\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{=}$ 18'564 possibilités.

e. Pour avoir au moins 2 filles et au moins 2 garçons dans le comité, on a les possibilités suivantes :
2 filles et 4 garçons : $C_2^{11} \cdot C_4^7 = 1925$
3 filles et 3 garçons : $C_3^{11} \cdot C_3^7 = 5775$
4 filles et 2 garçons : $C_4^{11} \cdot C_2^7 = 6930$.
Ainsi, au total, on a $1925 + 5775 + 6930 = 14'630$ possibilités.

Exercice 3

a. C'est une permutation sans répétition. Il y a $10! = 3'628'800$ possibilités.

b. On a 5 blocs formés par les couples. Il y a $5! = 120$ possibilités de les placer.
Dans chaque couple, on a 2 possibilités (homme + femme ou femme + homme).
Ainsi, au total, on a $2^5 \cdot 120 = 3840$ possibilités.

c. On peut avoir HFHFHFHFHF ou FHFHFHFHFH.
Pour chacun, le nb de possibilités est $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = (5!)^2$.
Le nombre total est donc $2 \cdot (5!)^2 = 240$ possibilités.

d. On peut avoir FFFFFHHHHH
HFFFFFHHHH
HHFFFFFHHH
HHHFFFFFHH
HHHHFFFFFH
et HHHHHFFFFF

Pour chaque cas, on a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (5!)^2$ possibilités.
Le nombre total est donc $6 \cdot (5!)^2 = 720$ possibilités.

e. On peut avoir FFFFFHHHHH ou HHHHHFFFFF.
Pour chaque cas, on a $5! \cdot 5! = (5!)^2$.
Le nombre total est donc $2 \cdot (5!)^2 = 240$ possibilités.

Exercice 4

a. On choisit 6 personnes parmi $7+4=11$ personnes sans tenir compte de l'ordre.
Le nombre de possibilités est alors $C_6^{11} = 462$.

b. On choisit 2 français parmi les 4 et 4 anglais parmi les 7.
Le nombre de possibilités est alors, en tenant compte de l'ordre entre les personnes,
$A_2^4 \cdot A_4^7 = 12 \cdot 840$ (en fait, si on choisit dans l'ordre, 2 français, puis 4 anglais, on a $4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 12 \cdot 180$) $= 10'080$.
On peut ensuite les permuter, et donc multiplier par $4!$
Le nombre total de possibilités est donc $4! \cdot 10'080 = 241'920$.

c. On a : nombre de possibilités avec au moins un français =
= nombre de possibilités totales − nb de possibilités avec zéro français =
= nombre de possibilités totales − nb de possibilités avec 6 anglais =
$= C_6^{11} - C_6^7 = 462 - 7 = 455$.

Exercice 5

a. Il choisit 10 questions parmi 13, sans tenir compte de l'ordre.
Il y a donc $C_{10}^{13} = 286$ possibilités.

b. S'il répond à la 1e question mais pas à la 2e, il doit répondre à 9 questions dans les 11 restantes. Il y a donc $C_9^{11} = 55$ possibilités.
S'il répond à la 2e question mais pas à la 1e, il doit répondre à 9 questions dans les 11 restantes. Il y a donc $C_9^{11} = 55$ possibilités.
Au total, on a donc $55 + 55 = 110$ possibilités.

c. Le nombre de possibilités pour répondre à 3 questions dans les 5 premières est $C_3^5 = 10$.
Il doit ensuite répondre à 7 questions parmi les 8 restantes: $C_7^8 = 8$ possibilités.
Au total, on a donc $10 \cdot 7 = 70$ possibilités.

d. S'il répond aux 2 premières questions, il doit ensuite répondre à 8 questions parmi les 11 restantes. Il y a donc $C_8^{11} = 165$ possibilités.

e. 3 des 5 premières questions: $C_3^5 \cdot C_7^8 = 70$ possibilités (voir c.).
4 des 5 premières questions: $C_4^5 \cdot C_6^8 = 5 \cdot 28 = 140$ possibilités.
5 des 5 premières questions: $C_5^5 \cdot C_5^8 = 1 \cdot 56$ possibilités.
Au total, il y a donc $70 + 140 + 56 = 266$ possibilités.

Exercice 6

a. Ici, l'ordre compte. Le nombre de possibilités est $A_5^6 = 720$ (on choisit 5 couleurs parmi 6).

b. Si on commence par ne pas tenir compte de l'ordre, il reste à choisir 3 couleurs parmi les 4 restantes : $C_3^4 = 4$ possibilités.
En permutant les 5 couleurs choisis, cela donne $5! \cdot 4 = 480$ possibilités.

c. On a les possibilités suivantes (B = bleu et V = vert) :

$$\left.\begin{array}{l} BV\_\,\_\,\_ \\ VB\_\,\_\,\_ \\ \_\,BV\_\,\_ \\ \_\,VB\_\,\_ \\ \_\,\_\,BV\_ \\ \_\,\_\,VB\_ \\ \_\,\_\,\_\,BV \\ \_\,\_\,\_\,VB \end{array}\right\} 8$$

Les 3 autres couleurs à choisir en tenant compte de l'ordre donnent $A_3^4 = 24$ possibilités.
Au total, on a donc $8 \cdot 24 = 192$ possibilités.

d. Les possibilités sont, si on met les cercles du plus petit au plus grand :
$BV\_\,\_\,\_$, $\_\,BV\_\,\_$, $\_\,\_\,BV\_$, $\_\,\_\,\_\,BV$.
On a donc $4 \cdot 24 = 96$ possibilités (voir c. pour les 3 autres couleurs).

e. Le nombre de possibilités avec B et V pas voisins =
= nb de possibilités totales − nb de possibilités où B et V voisins =
$= 720 - 192$ (voir a. et c.)
$= 528$ possibilités.