

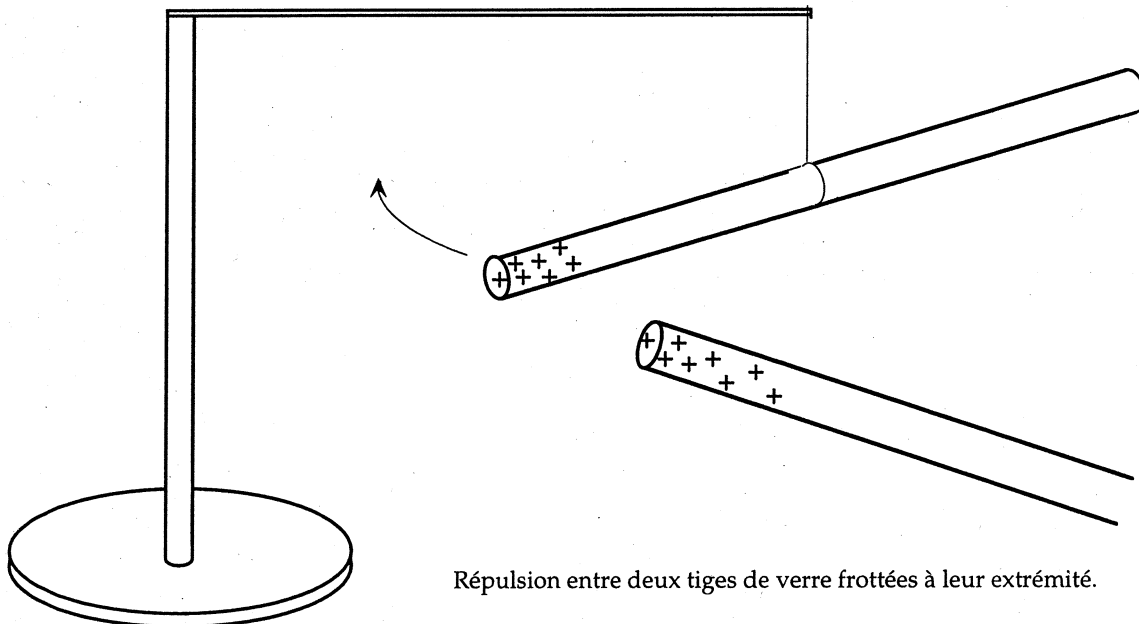
## CHARGES ET FORCES ELECTRIQUES

### I.1. Effets nouveaux et notion de charge

Deux tiges de verre, mises à proximité l'une de l'autre, ne vont en général, ni se repousser ni s'attirer; elles restent indifférentes l'une vis-à-vis de l'autre. Pourtant, il suffit de les frotter toutes deux avec un chiffon de soie sec pour qu'une force de **répulsion** mutuelle apparaisse. Cet effet est encore plus marqué lorsqu'on prend deux tiges de plexiglas et qu'on les frotte avec de la fourrure, de chat de préférence (!). Si on poursuit ce genre d'investigation et qu'on frotte la tige de verre avec la soie, la tige de plexiglas avec la fourrure, puis qu'on approche les deux tiges, on observe cette fois une **attraction** mutuelle.

Ainsi, certaines actions, comme le frottement, sur certaines substances, telles des matières solides isolantes (verre, plexiglas), ont comme conséquence de leur conférer des propriétés qui ne sont pas explicables par la mécanique seule. Les forces de répulsion ou d'attraction qui apparaissent sont bien des grandeurs mécaniques, mais elles ne résultent pas d'une modification de l'état mécanique des matières frottées: leurs masses ou leurs formes n'ont pas changé, ni d'ailleurs leur couleur ou leur température.

Il est vrai que le frottement a pu quelque peu les échauffer, mais il suffit d'attendre qu'elles se refroidissent pour constater que la force persiste et que ce n'est donc pas un effet de la chaleur.



On dit que le frottement a fait apparaître des **charges électriques** à la surface des corps frottés; les tiges ci-dessus sont donc devenues **électriquement chargées** par le frottement. Ce terme de "**charge**" est utilisé ici et dans toute l'électricité, est sans référence aucune à l'idée de masse ou de poids, comme pourrait le laisser croire le langage courant, c'est une notion spécifiquement électrique et non

mécanique; un corps électriquement chargé n'est pas "alourdi" pour autant. Cette ambiguïté possible étant levée, on laissera dorénavant tomber le qualificatif "électrique" du substantif "charge".

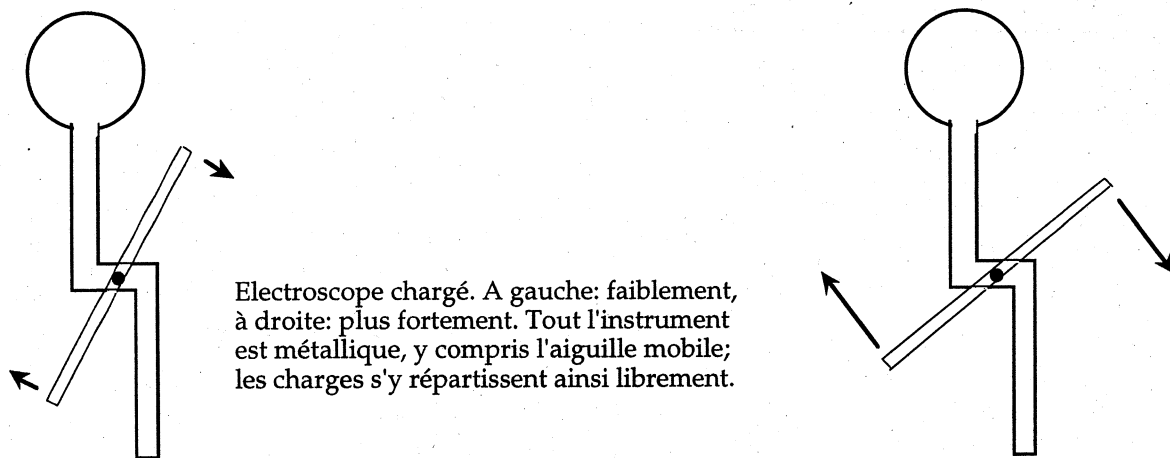
Si on admet que ces forces électriques entre deux corps (non en contact et au repos) ne peuvent être que soit attractives soit répulsives, alors on doit conclure:

- qu'il n'existe que deux sortes de charges: celle portée par le verre (par exemple) et celle portée par le plexiglas (par ex.). On se convaincra d'ici peu qu'il est judicieux de les nommer **positive** et **négative**.

- que les charges de même sorte se repoussent, alors que celles qui sont différentes s'attirent. Ceci est un principe fondamental et bien connu de l'électrostatique.

## I.2. Additivité et mesure de charges

Pour mettre en évidence des charges électriques on utilise un instrument appelé électroscope; s'il s'agit d'une mesure quantitative on utilise un électromètre, qu'on appelle plus volontiers *coulombmètre*. Le principe de fonctionnement d'un électroscope est le suivant: les charges apportées sur l'appareil se répartissent dans toute sa partie métallique (ce qui est figuré sur le dessin); l'aiguille indicatrice, mobile autour de son axe, et son support vont ainsi se repousser, de façon d'autant plus marquée que le système porte de charges.



Montrons qualitativement qu'on peut attribuer un signe (+ ou -) aux charges et qu'on peut ainsi les additionner *algébriquement*; on procède de la façon suivante:

- En touchant plusieurs fois la partie supérieure de l'électroscope avec la tige de plexiglas frottée, on charge ainsi au maximum l'instrument;

- On le touche ensuite avec la tige de verre frottée; on apporte ainsi des charges de l'autre type. On observe alors que l'aiguille s'abaisse. A chaque contact avec la tige de verre elle s'abaisse un peu plus, puis passe par la position verticale (l'électroscope n'est alors plus chargé, on l'a neutralisé) et enfin elle remonte si on continue d'amener des charges de la tige de verre.

**Explication:** les charges apportées par la tige de plexiglas étant dites négatives, elles sont progressivement compensées par les charges positives amenées par

la tige de verre. Lorsque l'annulation (neutralisation) est complète, l'aiguille est verticale, puis elle s'incline à nouveau car il y a ensuite excès de charges positives amenées par la tige de verre. Les appellations "négatives" et "positives" sont ainsi justifiées par le phénomène qui paraît être une addition algébrique des deux types de charges. Ceci et ce qui a été observé à la page 1 permet d'énoncer:

### **la loi fondamentale de l'électrostatique:**

- des charges de même signe se repoussent
- des charges de signes opposés s'attirent.

### **I.3. Point de vue microscopique**

La matière qu'on observe ou manipule n'est généralement pas chargée, elle est dite **neutre**. On sait qu'elle est formée d'atomes eux-mêmes rigoureusement neutres. Or, tout atome est constitué de trois types de particules: protons, neutrons et électrons. Les deux premiers, les nucléons, sont les constituants du noyau, alors que les électrons forment un "nuage" autour de celui-ci. Selon un modèle suggestif mais non réaliste, on peut comparer les électrons aux planètes tournant autour d'un soleil qui serait le noyau de l'atome. La structure du système solaire s'explique par la force de gravitation attractive; de façon quelque peu semblable, l'explication de la structure de l'atome nécessite l'existence d'une force attractive, dite électrostatique, qui s'exerce entre protons et électrons. Les neutrons, quant à eux, ne portent pas de charge mais ils assurent la cohésion du noyau. Les électrons ont une charge de signe opposé à celle des protons puisqu'il y a attraction mutuelle. Il a été montré que dans un atome non ionisé le nombre de protons est toujours égal à celui des électrons; il s'ensuit qu'en valeur absolue, la charge du proton est **rigoureusement égale** à celle de l'électron, l'atome étant strictement neutre.

Il a été convenu que la charge de l'électron est négative, celle du proton est donc positive. La valeur absolue de la charge de l'électron, ou celle du proton, est dite **charge élémentaire**, car il n'en existe pas de plus petite; elle est notée  $e$  ( $-e$  pour l'électron).

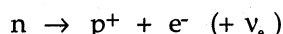
Les théories de la physique corpusculaire de pointe montrent que protons et neutrons sont constitués de "quarks", particules dont la charge est de un tiers ou deux tiers de la charge élémentaire, mais ces particules n'ont encore pu être mises en évidence expérimentalement isolément.

Ainsi, tout objet chargé porte toujours un nombre entier de charges élémentaires  $e$ . Symbolisant une charge par  $q$  (ou par  $Q$ ), on a que:  $q = n e$  avec  $n$  entier.

Une loi de la physique qui n'a encore jamais été mise en défaut est celle de la **conservation de la charge électrique**. Elle signifie qu'on ne peut jamais ni créer ni détruire une charge, *on ne peut que transférer des charges d'un corps sur un autre*. Ainsi, lorsqu'on charge par frottement la tige de verre, elle est initialement neutre, de même que le chiffon de soie, mais le frottement arrache des électrons ( $e^-$ ) à la tige qui devient ainsi positivement chargée, alors que le chiffon, ayant récolté ces  $e^-$ , devient chargé négativement. C'est l'inverse avec le plexiglas et la fourrure: le plexiglas a prélevé des  $e^-$  à la fourrure lors du frottement, elle sera donc positivement chargée, le plexiglas l'étant alors négativement.

Les grands progrès de la physique sont caractérisés par la mise en évidence des insuffisances des lois fondamentales (et non de leur fausseté). La conservation de l'énergie, la

conservation de la masse, la loi de Newton etc. ne sont valables que sous certaines conditions. Par contre les expériences les plus subtiles de la physique n'ont jamais mis en défaut la loi de la conservation de la charge. Citons comme illustration, la désintégration spontanée du neutron libre:



le proton et l'électron ont ensemble une charge nulle, comme celle du neutron. (La particule notée  $\nu_e$  est un "anti-neutrino électronique", particule sans charge (et peut-être sans masse); il est nécessaire à la **conservation** de la masse-énergie et à ce qu'on appelle la "charge leptonique".)

La charge électrique étant une notion nouvelle, il faut une unité nouvelle, sans référence aux unités de la mécanique pour la désigner; c'est le **coulomb**, noté C. Cette unité est en relation avec l'une des quatre unités de base du système MKSA: l'ampère A, qui est l'unité de courant électrique (cf. cours d'électrocinétique). Un courant étant le plus souvent des charges (des  $e^-$ ) passant dans un fil métallique, l'ampère s'exprime comme des charges par unité de temps, c'-à-d:  $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$ . Un courant de 1 A est tout à fait banal en électrocinétique, c'est environ ce qui alimente un lustre de quatre ampoules de 60 W. Par contre en électrostatique, une charge de 1 C est expérimentalement une charge énorme. Les charges qu'il est possible de transférer sans dispositifs démesurés sont plutôt de l'ordre du millionième de C ( $1 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 1 \mu\text{C}$ ). Il n'empêche que le nombre de charges élémentaires mises en cause lors de simples phénomènes électrostatiques est néanmoins gigantesque, comme peut le montrer le tableau ci-dessous en observant la petitesse de la valeur de la charge élémentaire:

particule	symbole	masse (kg)	charge (C)
proton	$p^+$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	$q_p = e = 1,60 \cdot 10^{-19}$
neutron	$n^0$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	0
électron	$e^-$	$0,91 \cdot 10^{-30}$	$q_e = -e = -1,60 \cdot 10^{-19}$

#### Remarque:

Les valeurs numériques sont données ici avec au plus trois chiffres significatifs, ce qui sera bien suffisant pour nous. Si plus de précision était mentionnée pour les masses, on constaterait que la masse du neutron est quelque peu plus élevée que celle du proton (c'est en relation avec la désintégration rapportée plus haut!). On constate aussi dans ce tableau, et c'est très important, que la masse de l'électron est beaucoup plus faible que celle d'un nucléon, d'environ 1836 fois; ce qui veut dire que pratiquement *toute la masse de l'atome est concentrée dans son noyau*, lequel est alors à peu près 4000 fois plus lourd (présence des neutrons) que la masse totale des électrons. On remarquera encore en passant ce paradoxe: le noyau, si massif, est extrêmement petit, il est de l'ordre de  $10^{-5}$  fois plus petit en diamètre que l'atome lui même, donc de l'ordre de  $10^{-15}$  fois plus petit en volume. Autrement dit, un atome, fut-il d'uranium, est essentiellement du vide!

## Charges et matière

La notion de charge ne peut pas se dissocier de celle de matière: il n'y a pas de charge sans corps matériel qui la porte. C'est déjà vrai pour les particules élémentaires car s'il n'existe pas de proton ou d'électron non chargé. Le problè-

me des interactions électrostatiques entre corps chargés est compliqué tant du point de vue de la compréhension physique que par son expression mathématique. Dans ce cours on ne fera qu'aborder le sujet dans des situations simples. La question sera d'ailleurs évoquée à plusieurs reprises dans les chapitres de ce cours.

Il y a pourtant déjà un certain nombre de notions qu'il faut assurer. Ainsi on classe la matière ordinaire en deux grandes catégories du point de vue de l'électricité: les **isolants**, qu'on appelle aussi **diélectriques**, et les **conducteurs**. Ces deux classes sont très distinctes par leurs propriétés très différentes.

Une troisième catégorie joue le premier rôle dans l'électronique moderne, il s'agit des **semi-conducteurs**, dont le **silicium** est la vedette incontestée. Ce n'est pas l'objet de ce cours.

a) **Isolants** (nommés aussi **diélectriques**):

À part certains sels à l'état solide dont la structure est schématiquement une alternance de ions positifs et négatifs (exemple  $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ ), la matière isolante est constituée de molécules neutres. Pour charger un corps isolant, il faut soit arracher des électrons parmi les plus externes, les moins liés, aux molécules de la surface du corps, soit lui apporter des électrons. Dans les deux cas, les charges excédentaires, positives ou négatives **ne se déplaceront pas** sur ou dans le corps; c'est la caractéristique essentielle des isolants: les charges ne sont pas libres.

b) **Conducteurs**:

Les **métaux** sont de loin les meilleurs conducteurs, ce sera presque exclusivement en référence aux métaux qu'on évoquera les conducteurs. Leur structure intime diffère profondément de celle des isolants en ce sens qu'ils ne sont à proprement parler formés ni d'atomes ni de molécules. Un morceau de cuivre par exemple est constitué très schématiquement d'un réseau de ions  $\text{Cu}^+$  et d'électrons libres en nombre strictement égal à celui des ions si le métal est neutre.

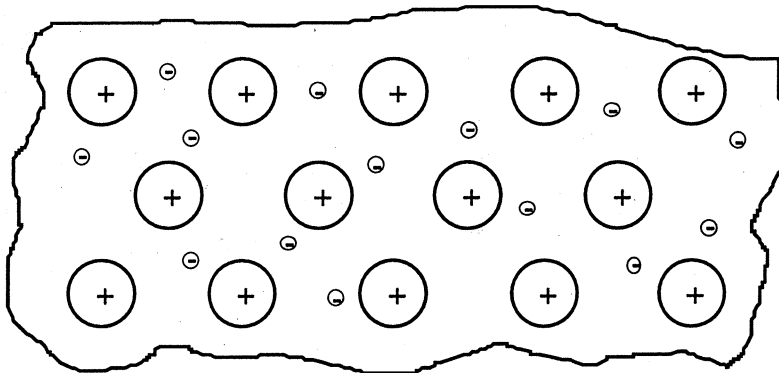


Schéma d'un morceau de métal neutre. Les ions positifs sont répartis régulièrement en un réseau cristallin. Les électrons peuvent circuler librement parmi les ions.

Lors de la condensation du métal de l'état gazeux à l'état liquide puis solide, chaque atome perd, libère un  $e^-$ . Ce sont ces  $e^-$ , libres de se déplacer dans la masse métallique, entre les ions, qui donnent à ce genre de substance ses propriétés conductrices de l'électricité; les courants électriques ne sont que des déplacements de charges, ce sera l'objet du cours d'électrocinétique.

Un métal chargé positivement aura perdu des  $e^-$  libres, un métal chargé négativement aura un excès d' $e^-$  libres.

**Remarques importantes:**

- La liberté des  $e^-$  dans un métal n'est pas complète, elle varie d'un métal à un autre et est conditionnée par la température (cf notions de *résistivité* et *résistance* dans le cours d'électrocinétique).

- Qu'une substance soit chargée négativement ou positivement, il s'agit **toujours** d'un excès ou d'un manque d'e-, aussi bien pour les isolants que pour les conducteurs; il est impossible d'atteindre le noyau des atomes pour en modifier le nombre des protons. Il est **faux** de croire qu'un corps chargé positivement a un excès de protons; non, il lui manque des électrons.

- Mais néanmoins, même pour un morceau de métal fortement chargé, le nombre d'électrons en plus ou en moins est toujours très faible vis-à-vis du nombre total d'électrons libres, et à fortiori vis-à-vis du nombre total d'électrons de la substance.

Les premiers exercices de ce chapitre sont très simples mais indispensables pour prendre conscience de ces ordres de grandeur inhabituels.

## Charges ponctuelles

Le point est un concept qui n'est rigoureux qu'en mathématique, il n'a pas de réalité physique, pas plus que celui d'infini. On a déjà utilisé la notion de *masse ponctuelle* (ou point matériel) en mécanique; de même on introduit abondamment ici celle de **charge ponctuelle** en électrostatique si l'objet qui porte la charge a une dimension, une extension spatiale négligeable en regard des distances d'interaction, c-à-d où se trouveraient d'autres charges. Le critère pour décider qu'on peut considérer une charge comme ponctuelle, donc négliger ses dimensions, est conditionné par la précision avec laquelle on veut connaître les résultats de calculs découlant de mesures expérimentales. Il faudrait donc évaluer de cas en cas. Notons pourtant que lorsque les charges en cause sont des particules élémentaires, la question ne se pose pas; surtout pas pour des électrons et très éventuellement pour des protons lorsqu'on fait de la physique nucléaire de haut niveau (structure en "quarks" du proton), ce qui ne sera pas le cas dans ce cours.

## I.4. Forces électriques : loi de Coulomb

### I.4.1. Petit rappel

On pourrait croire que la Nature n'a pas beaucoup d'imagination car il y a une forte analogie formelle entre la force de gravitation et la force électrique. On précise bien que cette analogie n'est que formelle car il n'y a pas (ou ne semble pas y avoir) de corrélation physique entre ces deux types de force. On veut dire par là que la force de gravitation entre deux astres ne fait pas intervenir la force électrique, de même que la force électrique entre deux charges ne fait pas intervenir leurs masses. Précisons cette analogie:

On doit se souvenir que la force de gravitation entre deux masses  $m_1$  et  $m_2$  fait intervenir le produit de ces masses, et que cette force décroît avec le carré inverse de la distance  $d$  entre ces masses. On résume cela par la formule:

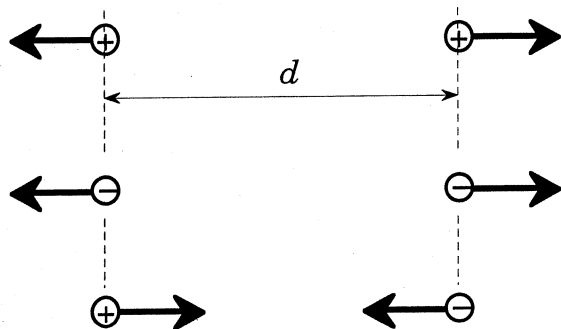
$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}, \text{ la constante } G \text{ est nécessaire pour une cohérence d'unités.}$$

(On se souvient que  $G$  est dite *constante de la gravitation universelle*).

Cette formule, dite loi de la gravitation universelle de Newton, n'avait pas été démontrée dans le cours de Mécanique. Nous ne démontrerons pas non plus tout de suite la loi de Coulomb, nous pourrons le faire au chapitre III. (Une loi se démontre-t-elle?).

Considérons alors deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  séparées par la distance

d. Examinons les forces d'interaction mutuelle:



Les trois possibilités d'interaction entre deux charges ponctuelles quelconques.

Dans les trois cas les deux forces sont égales et opposées, quelles que soient les valeurs des charges.

La force sur  $q_1$  de la part de  $q_2$  est égale, en grandeur, à la force sur  $q_2$  de la part de  $q_1$  en vertu de la troisième loi de Newton (loi des actions réciproques), quelles que soient les valeurs des deux charges; en effet, imaginons que ces deux forces ne soient pas ainsi, il en découlerait que leur résultante ne serait pas nulle et, en vertu de la deuxième loi de Newton, l'ensemble des deux charges serait accéléré "quelque part", ce qui est absurde.

Dans la formule décrivant la force doit donc apparaître chacune des deux charges et la seule possibilité pour rendre compte valablement de cette symétrie des deux forces est de faire intervenir les deux charges en leur produit  $q_1 q_2$ . La distance entre les deux charges intervient comme pour la gravitation en ce sens que la force diminue comme l'inverse du carré de cette distance:  $F \propto 1/d^2$ . Cette dépendance sera justifiée ultérieurement (ch. III). On a donc en présence une force (en newton), deux charges (en coulomb) et le carré d'une distance, on s'attend donc à devoir ajouter une constante pour assurer la cohérence des unités. On nomme provisoirement  $k$  cette constante, en attendant de montrer (ch. III aussi) qu'elle contient une des rares constantes fondamentales de l'électrodynamique. On écrit alors l'expression de la grandeur de la force sur l'une des charges (elle est de même grandeur sur l'autre!):

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{d^2}, \text{ formulation scalaire de la loi de Coulomb}$$

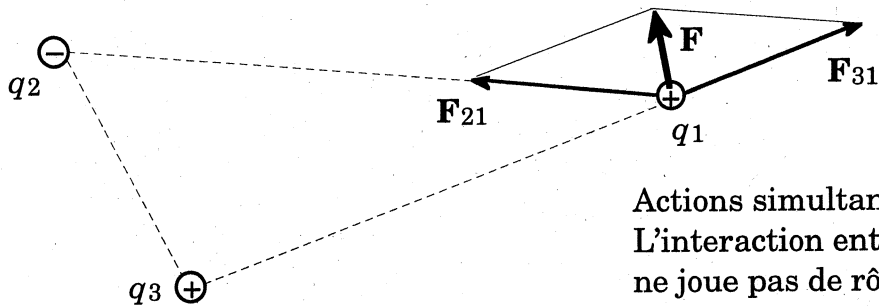
La valeur absolue est là pour garantir que la formule donne la grandeur de la force c-à-d la norme du vecteur-force et est donc toujours positive, même si l'une des charges est négative. On verra sous peu la forme vectorielle de la loi de Coulomb, plus complète que celle ci-dessus. La constante  $k$  a pour valeur:

$$k = 9.10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2} \text{ à } 0,1 \text{ \% près.}$$

### (Démonstration expérimentale)

#### Principe de superposition

Considérons trois charges ponctuelles  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  dans une configuration quelconque. Chacune des charges subit l'influence des deux autres: par exemple  $q_1$  subit une force de la part de  $q_2$  et une autre de la part de  $q_3$ . La force totale sur  $q_1$  est simplement la **résultante** (somme vectorielle) de ces deux forces. Le principe de superposition dit ainsi que dans un ensemble de charges, la force sur l'une des charges est la superposition, entendons ici la résultante, de toutes les autres forces dues aux autres charges prises individuellement. Cela signifie que les multiples interactions entre les autres charges n'interviennent pas. voyons cela sur un exemple avec trois charges:



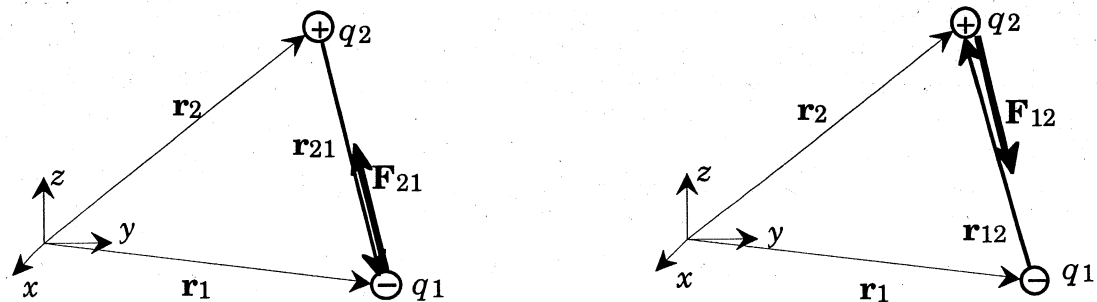
Actions simultanées sur  $q_1$ .  
L'interaction entre  $q_2$  et  $q_3$   
ne joue pas de rôle.

Cet exemple illustre que  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}$ . (Il doit être évident, selon le calcul vectoriel élémentaire, que de façon très générale:  $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}$ ).

Ce principe, qui peut sembler aller de soi, joue un grand rôle en physique, même de pointe, et évite souvent de se poser de mauvaises questions.

### Forme vectorielle de la loi de Coulomb

Une force étant toujours de nature vectorielle, il est bien plus performant et complet de la faire apparaître sous cet aspect. Installons pour cela un système d'axes afin de repérer deux charges ponctuelles. Pour éviter de surcharger le dessin, on l'a doublé de façon à regarder chacune des deux charges l'une après l'autre.



On doit observer que:

- quel que soit le signe des charges, la *direction* du vecteur-force est la même que celle du vecteur qui joint les deux charges:
- le *sens* du vecteur-force est par contre conditionné par le signe des charges et en particulier par le signe du produit  $q_1 q_2$ . On a choisi ici  $q_1 q_2 < 0$ , laissant en exercice le cas  $q_1 q_2 > 0$ .

Pour construire un vecteur-unité dans la direction de la force, on procède comme d'habitude: on prend un vecteur qui a cette direction et on le divise par sa norme.

1) **force** due à  $q_2$  sur  $q_1$ : vecteur-unité:  $\frac{\mathbf{r}_{21}}{\|\mathbf{r}_{21}\|} = \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21}$$

2) **force** due à  $q_1$  sur  $q_2$ : vecteur-unité:  $\frac{\mathbf{r}_{12}}{\|\mathbf{r}_{12}\|} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$



$$\Rightarrow \mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (\text{permutation des indices})$$

Comme il va de soi que  $q_1 q_2 = q_2 q_1$ , que  $r_{12}^3 = r_{21}^3$  et que de plus  $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21} \Rightarrow \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ , comme il se doit. De façon générale on écrira:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{loi de Coulomb}$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur reliant les deux charges et désignant celle qui subit  $\mathbf{F}$ .

**\* Remarque:**

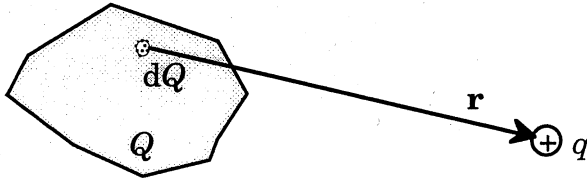
- Si  $q_1 q_2 < 0$ , alors  $\mathbf{F}$  est de sens opposé à  $\mathbf{r}$ , ce qui montre l'attraction. La répulsion est aussi contenue dans la formule car si  $q_1 q_2 > 0$ , alors  $\mathbf{F}$  est de même sens que  $\mathbf{r}$ . Cela n'était pas contenu dans la forme scalaire de la loi vue plus haut. Dans celle-ci, la distance entre les deux charges était notée  $d$ , ce  $d$  est donc devenu  $r$  dans la loi vectorielle.

**Charges non ponctuelles**

On ne fera qu'effleurer le problème car l'application de ce qu'on se propose de présenter peut se révéler parfois très difficile.

Soit une charge  $q$  ponctuelle au voisinage d'un corps pas petit et portant une charge totale  $Q$ , donc non ponctuelle. Imaginons qu'on veuille connaître la force totale due à  $Q$  sur  $q$ .

L'idée, lorsqu'on ne sait traiter que des objets ponctuels et qu'on est en face d'un qui ne l'est pas est tout simplement de le décomposer (par la pensée) en objets aussi ponctuels, et donc d'appliquer ce qu'on sait un nombre suffisant de fois. La décomposition est telle que  $Q = \int dq$ .



Par la loi de Coulomb, chaque élément  $dQ$  produit sur  $q$  une force élémentaire  $d\mathbf{F}$ ; la somme - l'intégrale - de toutes ces forces élémentaires donne la force totale  $\mathbf{F}$  due à  $Q$  sur  $q$ :

$$d\mathbf{F} = k \frac{q dQ}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \int d\mathbf{F} \quad \text{donc} \quad \mathbf{F} = \int k \frac{q dQ}{r^3} \mathbf{r} = kq \int \frac{dQ}{r^3} \mathbf{r}$$

Cette dernière intégrale peut être difficile à calculer car il faudrait encore exprimer le vecteur  $\mathbf{r}$  en fonction de la répartition des  $dQ$  dans l'espace occupé par la charge non ponctuelle  $Q$ , ce qui peut n'être pas simple du tout selon la forme de  $Q$ .

On verra quelques exemples simples au chapitre II.

*Parenthèse:* que faut-il penser d'une charge infinitésimale  $dQ$ ? Question en relation avec la charge élémentaire  $e$  qui vaut  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

**CH. I : CHARGES ET FORCES ELECTRIQUES**

**1.** Une tige de plexiglas a une masse de 30 g. En la frottant avec une fourrure de chat, on lui donne une charge de  $-10^{-8}$  C. Calculer:

- le nombre d'électrons excédentaires;
- l'augmentation relative de la masse de la tige due à ces électrons;
- le nombre total d' $e^-$  de la tige (neutre ou non). On admettra qu'il y a autant de protons que de neutrons dans les noyaux des atomes qui la constituent, ce qui n'est pas très juste pour une substance organique (pourquoi?);
- le nombre d' $e^-$  en excès par rapport au nombre total d' $e^-$ .

**Rép:** a)  $6,25 \cdot 10^{10}$  ; b)  $1,9 \cdot 10^{-18}$  ; c)  $9,0 \cdot 10^{24}$  ; d)  $7,0 \cdot 10^{-15}$  .

**2.** Faisons l'hypothèse (fausse) que la charge en valeur absolue de l'électron est très légèrement plus faible que celle du proton, par exemple que leur différence de charge est mille milliards de fois plus faible que celle du proton. Les atomes ne seraient ainsi pas exactement neutres. Calculer alors:

- la charge portée par une masse quelconque de 1 kg;
- la force électrique entre deux telles masses séparées par  $d = 1$  m;
- la force électrique qui existerait entre la Terre et la Lune; la comparer avec la vraie force de gravitation (calcul du rapport  $F_{el}/F_{gr}$ ).

**Rép:** a)  $4,8 \cdot 10^{-5}$  C ; b) 20,7 N ; c)  $6,2 \cdot 10^{31}$  N ;  $3,1 \cdot 10^{11}$  .

**3.** Quelle charge  $Q$  faudrait-il placer sur la Terre et sur la Lune pour compenser la force de gravitation? La valeur de la distance Terre-Lune est inutile.

**Rép:**  $5,7 \cdot 10^{13}$  C.

**4.** Soit une sphère de cuivre pleine ayant une masse correspondant à une mole. Admettons qu'on puisse lui ôter ses  $e^-$  libres (1 par atome). Calculer:

- le rayon de la sphère;
- sa charge;
- la force électrique entre deux telles sphères séparées par  $d = 60$  cm. Est-ce réaliste? Qu'est-ce qui alors ne l'est pas?

**Rép:** a) 1,19 cm ; b)  $9,64 \cdot 10^4$  C ; c)  $2,3 \cdot 10^{20}$  N.

**5.** Calculer la charge totale de tous les électrons contenus dans 1 litre d'eau. Si on pouvait extraire tous ces  $e^-$  et les placer à une distance de 1 m de ce qui reste, quelle serait la force d'attraction? Comparer cette force au poids du litre d'eau (rapport).

**Rép:**  $2,6 \cdot 10^{25}$  N.

**6.** Dans un noyau d'hélium, la distance moyenne entre les deux protons est d'environ 1,4 fm. Calculer la force de répulsion entre ces deux particules; comparer cette force au poids de l'atome. (Pourquoi alors les deux protons tiennent-ils ensemble?)

**Rép:** 118 N ;  $1,8 \cdot 10^{27}$ .

**7.** On admettra que dans un atome d'hydrogène, l' $e^-$  a une trajectoire circulaire autour du proton. Le rayon de l'orbite étant de  $0,53 \cdot 10^{-10}$  m, calculer:  
a) la force d'attraction entre  $p^+$  et  $e^-$ , comparer au poids de l'atome;  
b) la vitesse de l' $e^-$  sur son orbite; comparer à la vitesse de la lumière  $c$  en calculant le rapport  $v/c$ .

**Rép:** a)  $8,2 \cdot 10^{-8}$  N ; b) env. 0,7 %.

**8.** Deux charges  $q$  égales sont séparées par une distance  $d$  fixe. Admettons qu'on puisse (et on peut) transférer une fraction  $\Delta q$  de l'une sur l'autre sans changer la charge totale ( $= 2q$ ).

Montrer que le transfert ne peut que diminuer la force d'interaction.

**9.** Deux sphères métalliques identiques sont séparées par une distance  $d = 50$  cm. Elles portent des charges  $q_1$  et  $q_2$  différentes et de signes opposés. Dans cette situation, la force d'interaction est de 0,108 N.

On met ensuite ces deux sphères en contact mutuel et on les replace à la même distance  $d$ ; la force est alors de 0,036 N.

Calculer les valeurs de  $q_1$  et  $q_2$  avant la mise en contact.

**Rép:**  $\pm 1 \cdot 10^{-6}$  C et  $\pm 3 \cdot 10^{-6}$  C.

**10.** a) Donner une estimation de la distance moyenne entre deux ions  $\text{Cu}^+$  en plus proches voisins dans un morceau de ce métal;

b) calculer la force de répulsion entre ces deux ions;

c) quelle masse de cuivre cette force pourrait-elle soulever? (sur Terre);

d) à combien d'atomes de cuivre cela correspond-il?

**Rép:** a)  $2,3 \cdot 10^{-10}$  m ; b)  $4,43 \cdot 10^{-9}$  N; c) 0,45  $\mu\text{g}$  ; d)  $4,3 \cdot 10^{15}$ .

**11.** Trois charges ponctuelles sont fixées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté  $a = 3$  cm;  $q_1 = q_2 = -q_3 = 10^{-8}$  C.

a) Calculer sur  $q_1$  les forces dues à  $q_2$  et à  $q_3$ ;

b) dessiner ces forces (échelle 1 N : 50 m); construire et mesurer la résultante sur le dessin;

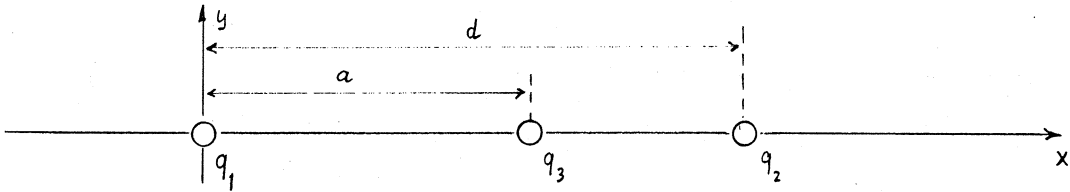
c) calculer cette résultante en examinant le dessin; comparer mesure et calcul.

**Rép:** a) 1 mN et 1 mN; c) 1 mN.

**12.** Une charge ponctuelle  $Q$  est fixée à chacun des deux sommets diagonalement opposés d'un carré. Une charge  $q$  est fixée à chacun des deux autres sommets. Etablir la relation entre  $q$  et  $Q$  si la force sur l'une des  $Q$  est nulle.

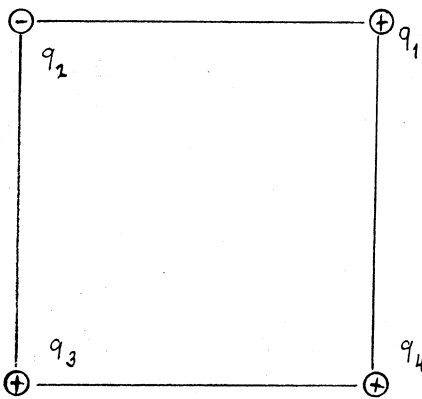
**Rép:**  $-2\sqrt{2} q$ .

**13.** Deux charges ponctuelles de même signe sont fixées sur une droite, l'axe  $Ox$ . La charge  $q_1$  est à l'origine et  $q_2$  est en  $x = d$ . Une troisième charge  $q_3$  peut se déplacer sur l'axe et prend une position d'équilibre en  $x = a$ .



- Etablir la relation entre le rapport  $q_1/q_2$  et les données de distances;
- faire de même si  $q_1$  et  $q_2$  sont de signes opposés,  $q_3$  étant en  $x = b$ .

**Rép:** a)  $q_1/q_2 = a^2/(d - a)^2$ ; b)  $q_1/q_2 = -b^2/(b - d)^2$ .



**14.** Quatre charges sont fixées aux sommets d'un carré de côté  $a = 40$  cm.

$q_1 = 0,1 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 0,2 \mu\text{C}$ ,  $q_3 = 0,3 \mu\text{C}$ ,  $q_4 = 0,4 \mu\text{C}$ .

- Calculer chaque force sur  $q_4$ ;
- dessiner ces forces ainsi que leur résultante (échelle  $1 \text{ mN} : 1 \text{ cm}$ );
- mesurer cette résultante sur le dessin;
- calculer cette résultante. On s'aidera en plaçant un système  $Oxy$  en  $q_4$  et en donnant des composantes aux forces.

**Rép:** a)  $2,25 \text{ mN}$ ;  $2,25 \text{ mN}$ ;  $6,75 \text{ mN}$ ; d)  $5,2 \text{ mN}$ .

**15.** On fixe une charge ponctuelle  $q_1 = 10^{-8} \text{ C}$  en  $(0;3)$  et une autre  $q_2 = -2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  en  $(5;0)$ ; (distances en cm).

- Une charge  $q_3 = 10^{-8} \text{ C}$  se trouve à l'origine des coordonnées; calculer la force qu'elle y subit et l'angle que forme ce vecteur avec  $Ox$ .
- Calculer la position que doit avoir  $q_4 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  pour que  $q_3$  subisse une force totale nulle.

**Rép:** a)  $1,23 \text{ mN}$ ;  $54,2^\circ$ ; b)  $(3,16; -4,39)$ .

# LE CHAMP ELECTRIQUE

## II.1. Rappels, analogies et définitions

### La gravitation

Toute masse  $m$  se trouvant au voisinage d'une autre masse  $M$  (un astre) subit une force d'attraction vers  $M$ . Cette force se dit le poids de  $m$ ,  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ , lorsque  $m$  est proche de la surface de  $M$ , ou plus généralement force de gravitation  $F_G = GmM/d^2$ , où  $d$  est la distance entre les centres de gravité des deux masses.

Cette façon de voir le phénomène fait apparaître *une action à distance*, sans contact entre les deux masses. Le mystère de cet effet est dissipé lorsqu'on fait intervenir une nouvelle invention, celle de *champ*. On exprime alors le phénomène de la manière suivante:

\* Une masse  $M$ , par sa simple existence, crée un champ de gravitation dans tout l'espace qui l'entoure. Ce champ dépend de la valeur de  $M$  et la distance au centre de  $M$ . On l'écrit (ici scalairement):  $g = GM/d^2$ .

\* Une masse  $m$  se trouvant dans un champ de gravitation  $\mathbf{g}$  y subit une force  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ .

L'introduction du concept de champ de gravitation ne fût pas indispensable lorsqu'on étudiait la gravitation. Mais le concept de champ est bien plus vaste et se montre indispensable en électromagnétisme. L'analogie entre gravitation et électrostatique est d'ailleurs frappante, comme on l'a déjà constaté et comme on va le constater ci-dessous.

### L'électrostatique

On énonce les deux principes fondamentaux qui constituent la définition du champ électrique:

\* Une charge  $Q$ , par sa simple existence, crée un champ électrique  $\mathbf{E}$  dans tout l'espace qui l'entoure.

\* Une charge  $q$  dans un champ électrique  $\mathbf{E}$  y subit une force  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ .

Le champ électrique est de nature **vectorielle**; il se définit en tout point de l'espace. Ecrivons encore cette *définition*:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$$

en français, cela se traduit par: *le champ à l'endroit où se trouve une charge est la force que subit cette charge divisée par sa valeur.*

### Remarques importantes

1) La présence d'une charge n'est utile là où il y a un champ que pour mesurer la force, mais le champ existe sans elle.

2) Une charge  $q$  dans un champ  $\mathbf{E}$  produit elle aussi son propre champ,

mais pour des raisons de symétrie évidente, il ne l'affecte pas.

3) Pour deux charges (ou plus), la situation est réciproque: si  $q_1$  crée un champ  $\mathbf{E}_1$  là où se trouve  $q_2$ , celle-ci subit la force  $\mathbf{F}_{12} = q_2\mathbf{E}_1$ ; de même,  $q_2$  crée un champ  $\mathbf{E}_2$  là où se trouve  $q_1$  qui subit la force  $\mathbf{F}_{21} = q_1\mathbf{E}_2$ ; ces deux forces sont bien sûr de grandeur égale et de sens opposé.

4) On a dit que toute charge crée un champ mais on n'a pas dit que tout champ électrique est créé par une charge. En effet, on verra vers la fin du *cours de magnétisme* qu'un champ magnétique temporellement variable est générateur d'un champ électrique.

5) Le concept de champ n'est pas un exercice de style ou une fantaisie de physicien. Même si c'est la force qui est le plus directement mesurable, c'est le champ qui est la grandeur physique fondamentale, il est la cause de la force.

### Unité du champ électrique

Par sa définition  $E = F/q$ , il découle immédiatement que dans le système MKSA, le champ électrique se mesure en N/C. Au chapitre IV on verra une autre unité pour  $E$ , mais équivalente et tout aussi en usage.

## II. 2. Champ d'une charge ponctuelle

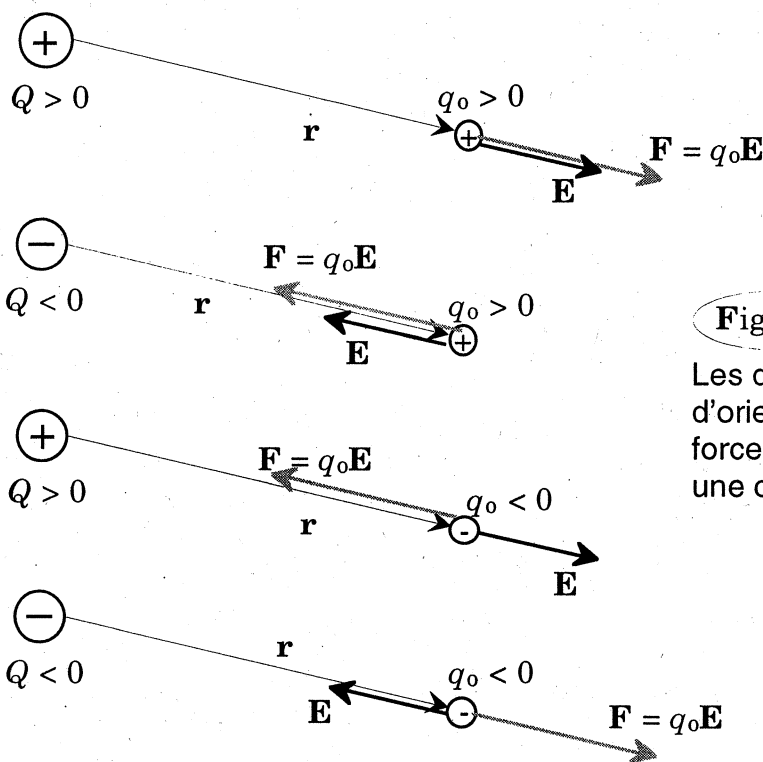


Fig. II.1

Les quatre cas possibles d'orientation relative de la force et du champ sur une charge test  $q_0$ .

Soit une charge ponctuelle  $Q$  et une autre,  $q$ , ponctuelle aussi, dans son voisinage. On sait que la force de Coulomb due à  $Q$  sur  $q$  est:

$\mathbf{F} = k \frac{Qq}{r^3} \mathbf{r}$ . Avec la définition du champ  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$  le champ dû à  $Q$  s'écrit:

$\mathbf{E} = k \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$  : champ de  $Q$  en un point repéré par le vecteur  $\mathbf{r}$  partant de  $Q$ .

Il faut bien remarquer que la charge  $q$  n'apparaît pas: c'est  $Q$  qui produit le champ, que  $q$  s'y trouve ou non.

champ, que  $q$  s'y trouve ou non.

Réécrivons le champ d'une *charge ponctuelle*, en insistant sur le fait que pour une charge non ponctuelle, il n'y a aucune raison pour que l'expression soit la même:

$$\mathbf{E} = k \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$$

Pour savoir si dans une région de l'espace règne un champ  $\mathbf{E}$ , il suffit d'y placer une charge ponctuelle test, notée  $q_0$ , et de mesurer la force qu'elle subit. (fig. II.1 ci-dessus). Le champ en chaque point désigné par  $\mathbf{r}$  sera donné alors par la force en chaque point divisée par  $q_0$ :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})/q_0$ .

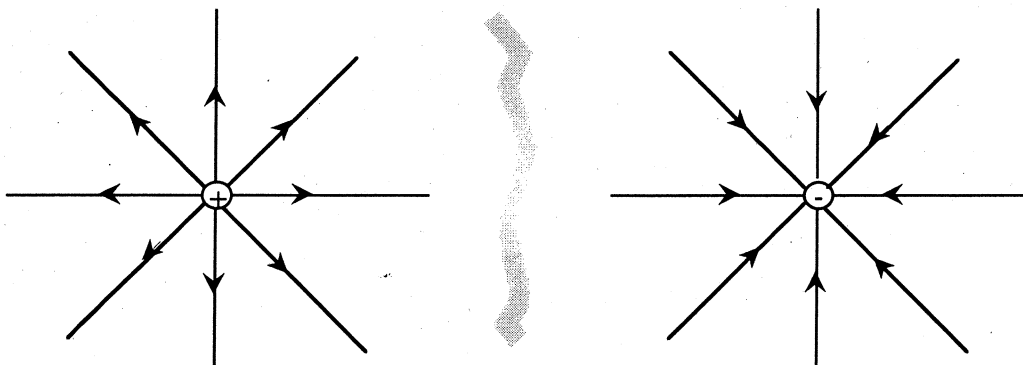
On conçoit donc qu'il est en principe possible, plaçant la charge test en un très grand nombre de points autour de  $Q$ , ou plus généralement dans une région de l'espace, d'y connaître aussi précisément qu'on le voudra la configuration du champ. Un tel travail est fastidieux et pratiquement malcommode. On se contente plutôt de figurer le champ  $\mathbf{E}$  par ses *lignes*.

### II. 3. Lignes de champ électrique

Ce sont des courbes - éventuellement des demi-droites - orientées dans le sens du champ. Elles figurent la répartition du champ électrique non pas par son intensité, mais par sa direction et son sens. En chaque point d'une ligne, on attacherait le vecteur  $\mathbf{E}$  correspondant qui serait tangent à la ligne.

**Exemples:**

a) charge ponctuelle loin de toute autre



**Fig. II.2.** Les lignes de champ sont *radiales*; elles partent de la charge si elle est positive, elles y aboutissent si elle est négative.

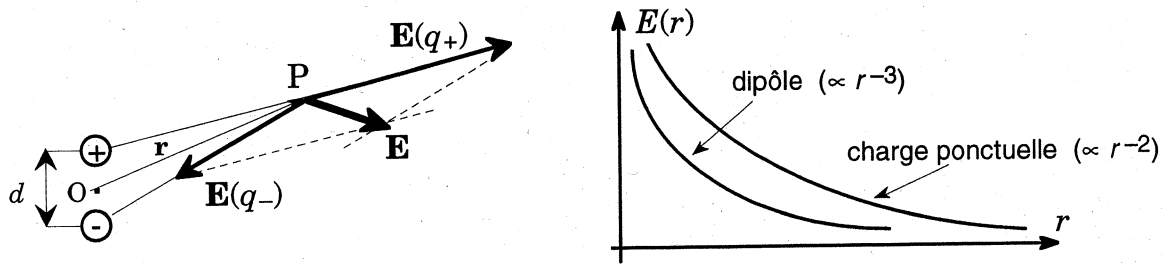
b) Deux charges ponctuelles égales

La page suivante montre l'allure des lignes de champ tout d'abord pour deux charges égales mais de signes opposés et au dessous, pour deux charges égales, signe compris. Le premier cas est le plus important des deux, c'est celui du *dipôle*, à propos duquel on fera quelques observations importantes.

Pour les deux cas, on a schématiquement représenté comment on s'y prendrait pour dessiner ces lignes à la main: on a choisi un point P quelconque à la distance  $r_1$  de l'une des charges et à la distance  $r_2$  de l'autre. On calculerait alors la longueur des deux champs produits en P par les deux charges et on en ferait la résultante vectorielle. Le dessin, aidé du calcul, permet de trouver le vecteur  $\mathbf{E}$  en grandeur, direction et sens.

### c) Le dipôle

Un dipôle électrique est donc constitué de deux charges de signes opposés et égales en valeur absolue. Sa charge totale est nulle.

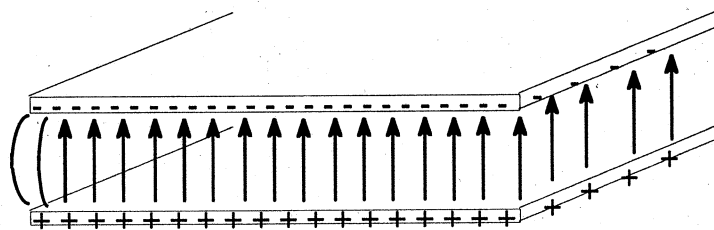


**Fig. II.3.** *A gauche:* le dessin du vecteur-champ résultant dû aux deux charges du dipôle. *A droite:* La dépendance avec la distance du champ d'un dipôle, qui décroît plus rapidement que celui d'une charge ponctuelle.

On doit remarquer que vu à grande distance, un dipôle devient presque ponctuel et semble alors avoir une charge quasi nulle. Le calcul montre en effet que la décroissance du champ est plus rapide que celle du champ d'une charge ponctuelle unique. On sait que pour cette dernière  $E \propto r^{-2}$ , alors que pour le dipôle  $E \propto r^{-3}$  si  $r \gg d$ . L'un des exercices du chapitre permet de calculer cette dépendance en  $r^{-3}$  pour deux points en des positions particulièrement simples.

### d) Champ homogène

Lorsque les vecteurs-champ sont identiques en tous les points d'une certaine région, on dit que le champ y est *homogène*. C'est un cas particulier important de configuration de champ, d'abord parce que c'est la plus simple qui soit, ensuite parce qu'elle est très utilisée et finalement parce qu'elle n'est pas difficile à obtenir pratiquement avec une bonne approximation. Pour réaliser un tel champ au moyen des charges, il suffit de disposer deux surfaces métalliques parallèlement sans qu'elles se touchent et de les charger de signes opposés. On a alors un *condensateur-plan*. Il en sera fait beaucoup usage dans ce cours, comme dans tout cours d'électrostatique d'ailleurs. Il sera étudié avec quelques détails au chapitre V. Les deux plaques métalliques d'un condensateur sont souvent nommées "armatures".



**Fig. II.4.** Le champ remplit tout l'espace entre les deux plaques métalliques et chargées. L'homogénéité est d'autant meilleure que les deux plaques sont rapprochées. Vers les bords, le champ n'est plus homogène, on a les "effets de bords". Le champ est évidemment orienté du + au -.

## II. 4. Champ d'une répartition de charges

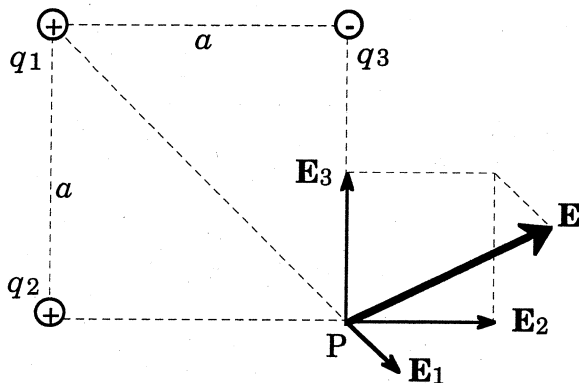
### a) Répartition discrète



Le terme "discret" en mathématique et en physique s'oppose à celui de "continu". Dans le cas présent cela signifie qu'il s'agit d'une répartition de charges ponctuelles séparées les unes des autres, le dipôle en est l'exemple le plus simple.

Pour déterminer en un point quelconque le champ dû à une telle configuration, il suffit d'appliquer le *principe de superposition* vu au chapitre précédent, c'est-à-dire de chercher les champs créés par chacune des charges au point considéré en d'en faire la résultante.

**Exemple:** Calcul et dessin du champ en un sommet d'un carré, les trois autres sommets étant occupés par des charges ponctuelles égales en valeur absolue.



**Fig. II.5.**

Les trois charges sont égales en valeur absolue et sont à trois sommets d'un carré de côté  $a$ .

Au point P, il n'y a pas de charge, mais il y a le champ dû à chacune des trois.

Pour pouvoir dessiner la résultante  $\mathbf{E}$ , il faut connaître les longueurs (relatives) des trois vecteurs-champ. Il est d'abord évident que  $E_2 = E_3$ . Pour trouver  $E_1$  on utilise l'expression du champ d'une charge ponctuelle: on sait que ce champ décroît avec le carré de la distance, or la distance de  $q_1$  à P est  $2^{1/2}a$ , donc  $E_1$  est la moitié de  $E_2$  ou  $E_3$ .

### b) Répartition continue et densité de charge

Si l'extension spatiale de l'objet chargé n'est pas très petite vis-à-vis des distances auxquelles on s'en trouve, il ne peut plus être considéré comme une charge ponctuelle. Comme cela a été fait pour le calcul de la force de Coulomb dans un tel cas (chap. I), on décompose cette charge totale  $Q$  en éléments infinitésimaux  $dQ$ , donc ponctuels, pour lesquels on exprime le champ élémentaire  $d\mathbf{E}$ . Avec le vecteur  $\mathbf{r}$  partant de  $dQ$  et allant au point P où on veut connaître le champ  $\mathbf{E}$ , on a:

$$d\mathbf{E} = k \frac{dQ}{r^3} \mathbf{r}; \text{ la résultante est donc: } \mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = k \int \frac{dQ}{r^3} \mathbf{r}$$

A ce stade, le problème comporte deux difficultés: il faut tout d'abord donner une forme convenable à l'intégrale, et il faut ensuite la calculer; la seconde difficulté n'est pas souvent la plus grande.

Dans l'expression intégrale ci-dessus, les variables d'intégration sont les coordonnées de  $\mathbf{r}$ , alors que l'élément différentiel est  $dQ$ . Il faut donc transformer  $dQ$  en différentielle des coordonnées, ce qui revient naturellement à examiner la façon dont la charge  $Q$  est répartie sur le corps qui la porte.

Pour cela, on introduit la notion de **densité de charge**. La densité au sens habituel, ou plutôt la masse volumique, représente, on le sait bien, la masse par unité de volume; suivant la même idée, la densité de charge représente la charge par unité de longueur, notée  $\lambda$ , s'il s'agit d'un fil chargé, la charge par unité de surface  $\sigma$  si le corps est superficiellement chargé, ou la charge par

unité de volume  $\rho$  si le corps est chargé aussi en son intérieur.

**a) densité linéique  $\lambda$**  : soit  $L$  la longueur d'un fil et soit  $q$  sa charge totale. La densité linéique de charge se définit par:

$$\lambda = q/L \text{ si la répartition est uniforme le long du fil; } [\lambda] = \text{Cm}^{-1}.$$

Pour une répartition non-uniforme, on considère un élément de longueur  $dL$  qui porte l'élément de charge  $dq$  et on écrit:

$$\lambda = dq/dL \Leftrightarrow dq = \lambda dL.$$

La charge totale  $q$  est la somme (l'intégrale) des  $dq$ :  $q = \int dq = \int \lambda dL$

**b) densité superficielle (ou surfacique)  $\sigma$**  : c'est certainement la plus utilisée puisque les charges apparaissent à la surface des corps isolants électrisés par frottement d'une part et, comme on le verra, les métaux ne peuvent être chargés qu'en surface d'autre part. Soit alors  $S$  la surface sur laquelle est répartie une charge totale  $q$ , la densité superficielle s'exprime par:

$$\sigma = q/S \text{ si la répartition est uniforme sur le corps; } [\sigma] = \text{Cm}^{-2}.$$

Pour une répartition non-uniforme, on considère un élément d'aire  $dS$  qui porte l'élément de charge  $dq$  et on écrit:

$$\sigma = dq/dS \Leftrightarrow dq = \sigma dS.$$

La charge totale  $q$  est la somme (l'intégrale) des  $dq$ :  $q = \int dq = \int \sigma dS$

**c) densité volumique  $\rho$**  : soit  $V$  le volume d'un corps et soit  $q$  la charge totale qui y est contenue. La densité volumique de charge se définit par:

$$\rho = q/V \text{ si la répartition est uniforme dans le volume; } [\rho] = \text{Cm}^{-3}.$$

Pour une répartition non-uniforme, on considère un élément de volume  $dV$  qui porte l'élément de charge  $dq$  et on écrit:

$$\rho = dq/dV \Leftrightarrow dq = \rho dV.$$

La charge totale  $q$  est la somme (l'intégrale) des  $dq$ :  $q = \int dq = \int \rho dV$

### Remarques:

1) La notion de densité de charge se révèle indispensable lorsque la répartition de charge n'est pas uniforme ou que le corps chargé a une extension très grande (mathématiquement infinie).

2) On le voit ci-dessus, une densité de charge apparaît de façon générale comme une dérivée, mais il ne s'agira pas d'effectuer une dérivation car ce sont souvent  $\lambda$ ,  $\sigma$  et  $\rho$  qui sont donnés en fonction de la géométrie du corps chargé. L'écriture  $dq = \sigma dS$  est en fait le changement de variable qui permet de faire l'intégration.

### Exemple de calcul:

Soit un fil en forme de boucle circulaire de rayon  $R$  et portant une charge totale  $q$  uniformément répartie sur la circonférence. On se propose de calculer le champ  $E$  dû à cet anneau en un point  $P$  de l'axe  $Ox$  pris comme axe de révolution, l'origine  $O$  étant mise au centre de l'anneau.

On examinera aussi le cas limite  $a \gg R$ , où  $a$  est la coordonnée du point  $P$  sur l'axe  $Ox$ . (dessin page suivante).

### Solution:

On décompose la charge totale  $q$  en éléments  $dq$  correspondant à des éléments de fil de longueur  $dL$ , avec  $dq = \lambda dL$ ,  $\lambda$  étant la densité linéique (ici uniforme) de charge sur le fil de longueur  $L = 2\pi R$ .

Chaque élément  $dq$  produit en  $P$  un élément de champ  $dE$ :

$$d\mathbf{E} = k \frac{dq}{r^3} \mathbf{r} = k \frac{\lambda dL}{r^3} \mathbf{r}; \text{ en grandeur: } dE = k \frac{\lambda dL}{r^2} \text{ avec } r = \sqrt{a^2 + R^2}$$

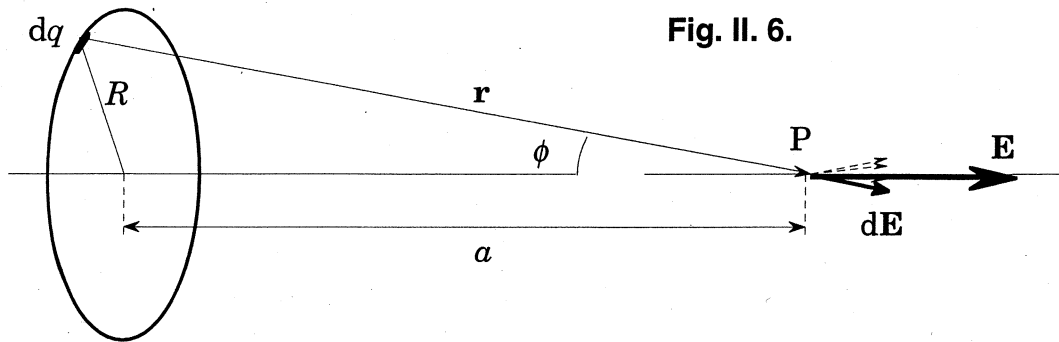


Fig. II. 6.

Les éléments  $d\mathbf{E}$  de chaque  $dq$  le long de l'anneau engendrent un cône de sommet P. La résultante  $\mathbf{E}$  sera alors orientée selon l'axe car toutes les composantes normales  $dE_{\perp}$  à l'axe vont s'annuler deux à deux par symétrie; il ne subsiste que les composantes  $dE_{\parallel}$  le long de l'axe:

$$dE_{\parallel} = dE \cos \phi = dE \frac{a}{r} = k \frac{dq}{r^2} \frac{a}{r} = k \frac{\lambda dL a}{r^3} = \frac{k a \lambda}{(a^2 + R^2)^{3/2}} dL$$

L'intégration est alors triviale puisque tout le facteur de  $dL$  est constant:

$$E = \int dE_{\parallel} = \int \frac{k a \lambda}{(a^2 + R^2)^{3/2}} dL = \frac{k a \lambda}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \int dL = \frac{k a \lambda 2\pi R}{(a^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{k q a}{(a^2 + R^2)^{3/2}}$$

Cas limite:  $a \gg R$ , on place le point P très loin de l'anneau; on s'attend à ce qu'il soit perçu de ce point comme une charge ponctuelle. En effet, le dénominateur  $(a^2 + R^2)^{3/2} \approx a^3$  et l'expression de  $E$  devient simplement:  $E \approx kq/a^2$  qui est le champ d'une charge ponctuelle  $q$  à la distance  $a$  de la charge.

**Remarque:** le champ s'annule donc à l'infini, mais comme le montre l'expression complète de  $E$ , il s'annule aussi en  $x = a = 0$ . Par conséquent, la valeur de  $E$  doit atteindre un maximum quelque part sur l'axe. Le calcul de la position du (ou des?) maximum est l'objet d'un exercice.

## II. 5. Charges dans $\mathbf{E}$ homogène - Accélérateurs de particules

Une charge  $q$  dans un champ  $\mathbf{E}$  est soumise à la force de Coulomb  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . Si  $\mathbf{E}$  est homogène dans une région, la force sur  $q$  sera constante tant que la charge reste dans cette région. Pour autant qu'il n'y ait pas d'autres forces sur  $q$  - ou que les autres forces puissent être négligées vis-à-vis de la force électrique - la charge va avoir une accélération  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$  en vertu de la deuxième loi de Newton. On rappelle qu'une charge est toujours un objet matériel et doit donc posséder une masse  $m$ . Ainsi donc, la charge aura une accélération vectoriellement constante et le mouvement sera un MUA.

La forme de la trajectoire sera conditionnée aussi par le vecteur-vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$ . Cette situation est formellement la même que celle d'une masse dans le champ de la pesanteur  $\mathbf{g}$ , pour laquelle, si  $\mathbf{g}$  est homogène, la trajectoire est une parabole comme on se souvient de la balistique.

Ce principe simple est utilisé pour accélérer des particules ( $e^-$ ,  $p^+$ ,

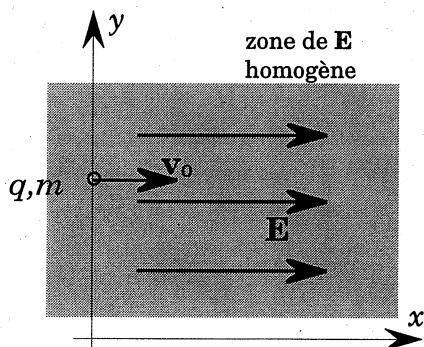
particules  $\alpha$ , ions, etc) aussi bien dans les grands accélérateurs de la physique nucléaire et corpusculaire que dans le tube cathodique d'un écran d'oscilloscope ou de TV.

On reviendra encore sur le sujet des accélérateurs quand on étudiera la force magnétique.

On examine les deux cas de vitesse initiale:

a)  $\mathbf{v}_0$  est parallèle à  $\mathbf{E}$ :

Le mouvement est un MRUA. La charge pourra être soit ralentie soit accélérée par le champ, cela dépend du signe de la charge et des sens relatifs des vecteurs  $\mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{E}$ .



Si  $q > 0 \Rightarrow \mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{F}$  sont de même sens  
 $\Rightarrow$  augmentation de la vitesse

Si  $q < 0 \Rightarrow \mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{F}$  sont de sens opposés  
 $\Rightarrow$  diminution de la vitesse

MRUA selon Ox :  $x = 0,5 at^2 + v_0 t$

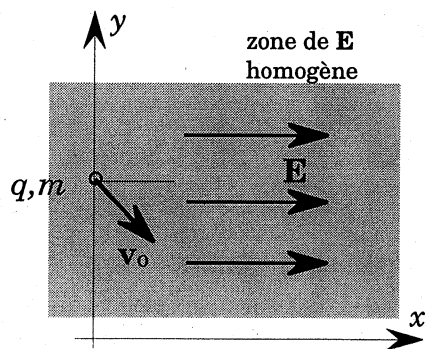
$$v = at + v_0$$

avec  $a = F/m = qE/m \Rightarrow v = qEt/m + v_0$

on s'aperçoit que pour  $q$  négatif, la vitesse s'annule après un temps  $t^*$  qu'on calcule aisément:  $t^* = -mv_0/qE$ , ce qui se produit après un parcours  $x^*$  qu'on pourrait aussi calculer sans peine.

b)  $\mathbf{v}_0$  fait un angle quelconque avec  $\mathbf{E}$ :

C'est le cas typique du MUA et analogue à la balistique:



MUA:  $x = 0,5 a_x t^2 + v_{0x} t$

$$v_x = a_x t + v_{0x}$$

$y = 0,5 a_y t^2 + v_{0y} t$

$$v_y = a_y t + v_{0y}$$

mais ici:  $a_y = 0$  et  $a_x = qE/m$ ; il s'agit par conséquent d'une trajectoire parabolique dont l'axe est parallèle à  $\mathbf{E}$ . Le sens de l'ouverture de la parabole dépend du signe de la charge.

**CH. II : CHAMP ELECTRIQUE**

**1.** Deux charges ponctuelles sont séparées par une distance  $d$  fixe. Il existe un point sur la droite qui relie les deux charges où le champ électrique est nul. Ce point n'est pas entre les deux charges; que peut-on alors conclure?

**2.** Deux charges ponctuelles  $q_1 = 5 \cdot 10^{-8}$  C et  $q_2 = -9 \cdot 10^{-8}$  C sont séparées par une distance  $d = 12$  cm.

- Calculer le champ de l'une à l'endroit de l'autre.
- Calculer le champ au point milieu.

**Rép:** a)  $5,63 \cdot 10^4$  N/C en  $q_1$  et  $3,13 \cdot 10^4$  N/C en  $q_2$ ; b)  $3,5 \cdot 10^5$  N/C.

**3.** Un électron ayant une vitesse nulle en  $t = 0$  se trouve à 1 cm d'un proton fixe.

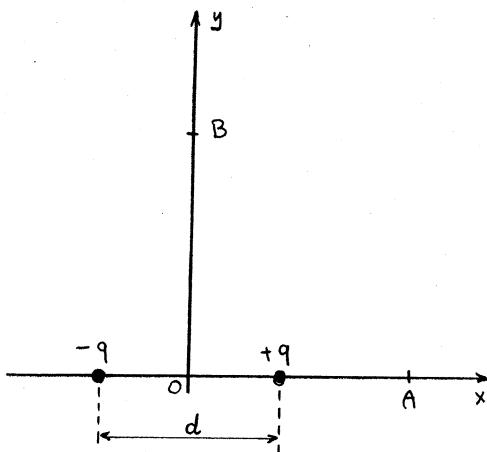
- Calculer l'accélération initiale de l'électron.
- Calculer sa vitesse au temps  $t = 2 \cdot 10^{-3}$  s. Si vous trouvez  $v = 5,06 \cdot 10^3$  m/s, vous avez tort. Pourquoi? Il n'est pas demandé de trouver la réponse juste!

**Rép:** a)  $2,53 \cdot 10^6$  m/s<sup>2</sup>.

**4.** Pour les deux charges de l'ex. 2, calculer la position du point où le champ est nul. Indiquer si ce point est entre les deux charges, sinon de quel côté.

**Rép:** 35,1 cm à gauche de  $q_1$  (si  $q_1$  est à gauche de  $q_2$ ).

**5.** Dipôle centré à l'origine des coordonnées:



a) Calculer la grandeur du champ  $\mathbf{E}$  dû au dipôle au point A de l'axe Ox;

b) montrer que ce champ varie comme  $1/x^3$  si  $x \gg d$ ;

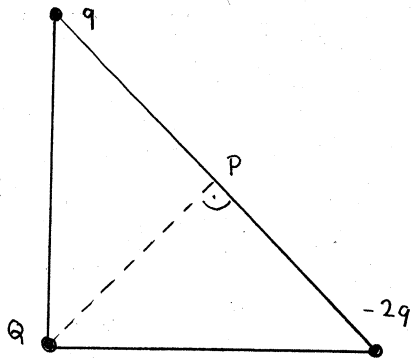
c) dessiner le vecteur  $\mathbf{E}$  dû au dipôle au point B de l'axe Oy;

d) calculer la grandeur de  $\mathbf{E}$  en ce point;

e) montrer que ce champ varie comme  $1/y^3$  si  $y \gg d$ .

**Rép:** page suivante:

a)  $\frac{2kqxd}{x^4 - x\frac{2d^2}{2} + \frac{d^4}{16}}$ ; b)  $\approx \frac{2kqd}{x^3}$ ; d)  $\frac{kqd}{(y^2 + \frac{d^2}{4})^{3/2}}$ ; e)  $\approx \frac{kqd}{y^3}$ .

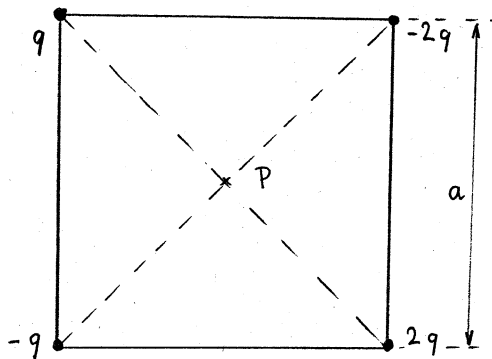


**6.** Triangle isocèle rectangle.

Quelle doit-être la valeur de  $Q$  pour que le champ résultant en  $P$  soit horizontal et dirigé vers la droite?

On donne  $q = 9 \cdot 10^{-9}$  C.

**Rép:**  $2,7 \cdot 10^{-8}$  C.



**7. a)** Dessiner au point  $P$  les champs dûs aux quatre charges;

b) dessiner la résultante;

c) calculer sa grandeur.

**Rép:** c)  $\frac{2\sqrt{2}kq}{a^2}$

**8.** Une sphère métallique a un rayon  $R = 6$  cm. Sa densité superficielle de charge est uniforme et vaut  $\sigma = 10^{-4}$  C/m<sup>2</sup>. Calculer la charge totale.

**Rép:**  $4,52 \cdot 10^{-6}$  C.

**9.** Si le calcul du champ sur l'axe d'un fil annulaire a été fait au cours, se convaincre qu'il existe un point sur l'axe où la valeur du champ atteint un maximum. Calculer la coordonnée de ce point, l'origine étant au centre de l'anneau de rayon  $R$ .

**Rép:**  $x = \pm R/\sqrt{2}$ .

**10\*.** Un fil isolant est aligné selon l'axe  $Ox$ , l'une de ses extrémités coïncidant avec l'origine. Sa densité linéique de charge varie selon l'expression  $\lambda(x) = Ax^2$  avec  $A$  constante positive. Calculer la charge totale du fil de longueur  $L$ .

**Rép:**  $AL^3/3$ .

**11\*.** Un fil rectiligne semi-infini est le long de l'axe Ox, son extrémité en  $x = a$ :



Sa densité linéique de charge  $\lambda$  est uniforme. Calculer le champ en O.

**Rép:**  $E(0) = k\lambda/a$ .

**12.** Une particule  $\alpha$  (formée de 2 protons et de 2 neutrons) se déplace en  $t_1 = 0$  à la vitesse  $v_1 = 2 \cdot 10^7$  m/s dans un champ  $\mathbf{E}$  homogène, les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{E}$  sont de même direction. La vitesse est  $v_2 = 4 \cdot 10^6$  m/s  $10^{-5}$  s plus tard.

- Calculer  $E$  et indiquer son sens relativement à  $v_1$ ;
- à quel instant la vitesse de la particule est-elle nulle ?

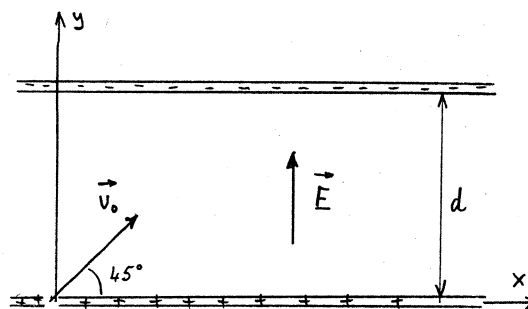
**Rép:** a)  $3,34 \cdot 10^4$  N/C; b)  $1,25 \cdot 10^{-5}$  s.

**13.** Dans un champ  $\mathbf{E}$  homogène obtenu par un condensateur-plan ( $d = 10$  cm) chargé, un faisceau d' $e^-$  pénètre par une petite ouverture comme indiqué avec la vitesse  $v_0 = 8 \cdot 10^6$  m/s.

a) Calculer la position  $P_1$  du point d'impact du faisceau sur la plaque positive si  $E = 1000$  N/C.

b) On ne fait que changer le sens du champ; quelles sont les coordonnées  $P_2$  du point d'impact?

**Rép:** a)  $P_1(36 \text{ cm}; 0)$ ; b)  $P_2(8,2 \text{ cm}; 10 \text{ cm})$ .



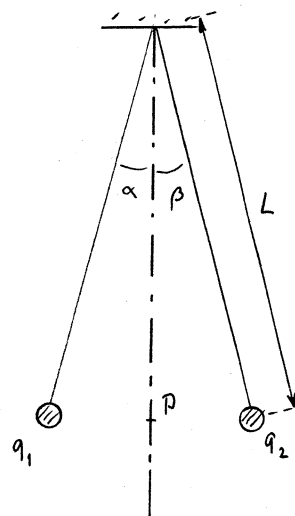
**14.** Pendule double. Les masses sont les mêmes mais les charges sont différentes.

a) Se convaincre que  $\alpha = \beta$ ;

b) se convaincre que si  $q_1 = q_2$  mais  $m_1 \neq m_2$ , alors  $\alpha \neq \beta$ ;

c) calculer (dans la situation a)) la grandeur du champ dû aux charges en P, point milieu entre les deux boules.

On pourra considérer les angles comme étant petits.



**Rép:**  $E = kq_1 - q_2 \left( \frac{4mg}{kLq_1q_2} \right)^{2/3}$

## LE FLUX ET LA LOI DE GAUSS

### III.1. La notion de flux

Comme beaucoup de termes utilisés en physique, celui de *flux* existe aussi dans le langage courant où il se rapproche de flot ou d'écoulement (en anglais: *to flow*: couler, s'écouler). Un synonyme imparfait pourrait être *débit*. Par flux, on entend donc "quelque chose qui s'écoule, qui passe", ainsi l'eau d'une rivière, des voitures sur une route, des spectateurs sortant d'un cinéma, etc.

Dans le langage courant comme en physique, la notion de flux est précisée en caractérisant d'une part ce qui "s'écoule" et d'autre part au travers de quoi cela "s'écoule". Dans le cas qui nous occupe c'est-à-dire le flux du champ électrique, il n'y a rien qui s'écoule ou passe, le champ  $\mathbf{E}$  n'est en rien matériel, mais le flux de  $\mathbf{E}$  va se définir comme dépendant de l'intensité du champ et de la surface interceptée par les vecteurs-champ. La surface en question n'aura pas forcément une réalité matérielle, elle ne sera souvent qu'une entité géométrique et d'une définition sans ambiguïté.

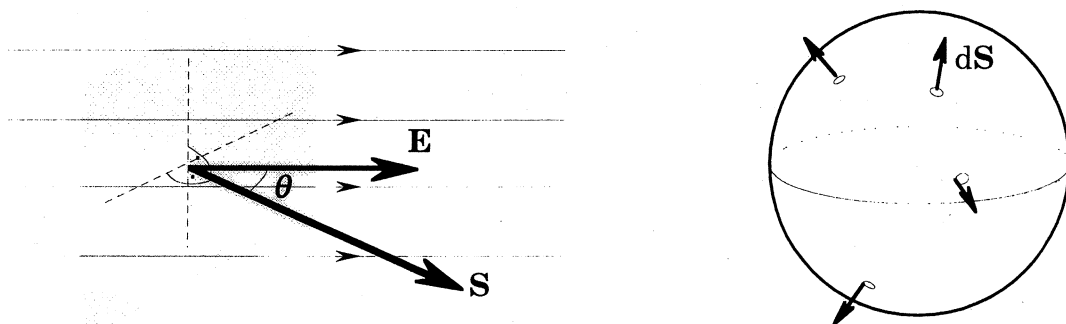
Selon une convention très bien suivie, le flux d'un champ électrique se désigne par  $\Psi$  (psi majuscule). Il s'agit maintenant de le définir de façon précise, efficace et autant que possible, simple. On n'est donc pas surpris si, en vertu de ce qui vient d'être dit:

$\Psi \propto E$  et  $\Psi \propto S$ , et que donc  $\Psi \propto ES$ . On ne peut pas faire plus simple.

Mais il faut encore préciser comment est orientée la surface par rapport au champ. On se doute que le flux sera d'autant plus grand, pour un champ donné et une surface d'aire donnée, que les vecteurs-champ seront proches de la perpendiculaire à la surface. Il est alors nécessaire de pouvoir caractériser l'orientation de la surface. Comme on le sait de la géométrie analytique dans l'espace, l'orientation d'un plan est complètement définie par un vecteur normal au plan. De même ici, la surface sera définie par un vecteur normal de norme égale à la valeur de l'aire.

#### Champ homogène et surface plane

C'est évidemment la configuration la plus simple.



**Fig. III.1.** *A gauche:* le vecteur-surface  $\mathbf{S}$  et son angle  $\theta$  avec  $\mathbf{E}$ .

*A droite:* des vecteurs-surface d'une surface fermée: vers l'extérieur.



Imaginons que la surface soit un carré, on définit alors son **vecteur-surface** en faisant le produit vectoriel des vecteurs construits sur deux côtés non opposés; le vecteur obtenu est ainsi perpendiculaire au plan du carré et de norme égale à l'aire du carré:  $\|\mathbf{S}\| = S$ . Si la surface plane n'est pas carrée, ce qui risque d'arriver, le vecteur-surface aura toujours une norme égale à l'aire de cette surface, c'est ainsi qu'on le définit.

Mettons un angle  $\theta$  entre les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{S}$ . Le flux d'un champ  $\mathbf{E}$  au travers de la surface sera nul si  $\theta = 90^\circ$  et atteint un maximum pour  $\theta = 0^\circ$ . La fonction angulaire qui représente le plus simplement cette dépendance est évidemment le cosinus de l'angle. On a donc, en plus de  $\Psi \propto ES$ ,  $\Psi \propto \cos\theta$ . On arrive alors à la définition de ce flux:  $\Psi = ES \cos\theta$ , ce qu'on peut écrire:

$\Psi = \|\mathbf{E}\| \|\mathbf{S}\| \cos\theta$ , ce qui rappelle furieusement le produit scalaire, donc:

$$\Psi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \quad \text{définition du flux d'un champ électrique homogène au travers d'une surface plane.}$$

**Unité du flux:**  $[\Psi] = [E][S] = \text{NC}^{-1}\text{m}^2$ .

### Champ quelconque et surface non plane

Le problème pourrait être beaucoup plus compliqué, mais dans son principe il ne l'est pas du tout pour ce qui est de la définition du flux dans ce cas général. Il suffit de décomposer la surface en éléments suffisamment nombreux et donc suffisamment petits pour qu'ils puissent être considérés comme plan. Le mieux à faire est de passer à la limite d'éléments infiniment petits  $dS$ . Alors même si le champ est très inhomogène, sa variation sur un élément infiniment petit sera infiniment faible. On a ainsi des flux élémentaires  $d\Psi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ ; le flux au travers de toute la surface  $S$  est par conséquent la somme (l'intégrale) de tous ces éléments de flux:

$$\Psi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{définition générale du flux}$$

On rencontre parfois cette définition avec une double intégrale ( $\iint$ ), ce qui signifie que la différentielle  $d\mathbf{S}$  est à deux dimensions, par ex.  $dS = dx dy$ .

### “Il faut qu'une surface soit ouverte ou fermée”

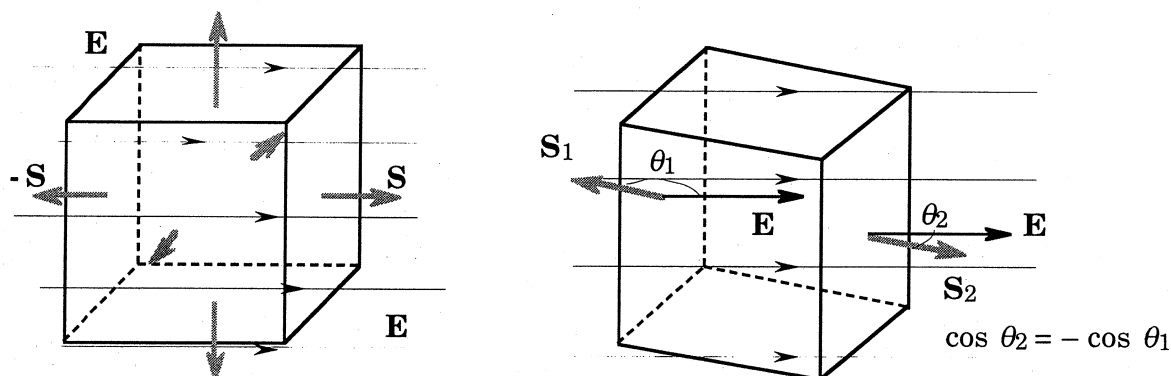
Avant d'appliquer cette définition dans nombre de situations, il est bon de faire un brin de topologie. On classe les surfaces géométriques en deux catégories: celles qui sont (hermétiquement) fermées et celles qui ne le sont pas et sont donc déclarées ouvertes. Les premières définissent, enferment un volume, c'est le cas d'une sphère, d'un cube, de la coquille d'un oeuf, d'une bouteille bouchée, etc. Celles qui sont ouvertes ont une courbe fermée pour bord (à moins qu'elles soient infinie comme le plan), c'est le cas d'un disque, un carré, un chapeau, un verre vide, etc.

Ce ne sont que les surfaces fermées qui possèdent un intérieur et un extérieur et à cause de cela il faut décider quelle orientation on donnera aux vecteurs-surface. La convention est qu'ils doivent toujours être dirigés vers l'extérieur (fig. III.1. ci-dessus).

## III. 2. La loi de Gauss

Plaçons une surface fermée, un cube, dans un champ  $\mathbf{E}$  homogène. Pour que cela soit simple, orientons le cube de façon à ce que  $\mathbf{E}$  soit parallèle à une

arête. La figure suivante, à gauche, montre que pour quatre faces, le flux de  $\mathbf{E}$  est nul puisque  $\mathbf{E}$  est perpendiculaire aux vecteurs-surface de ces faces; autrement dit, le champ ne traverse pas ces faces. Par contre, pour les deux autres faces, le flux n'est pas nul, mais les deux vecteurs-surface sont de sens opposés alors que le champ est évidemment le même sur ces deux faces. Pour l'une,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\cos\theta = 1$  et pour l'autre,  $\theta = \pi$ ,  $\cos\theta = -1$ . Il en résulte que les deux flux sont égaux mais de signes opposés et que par conséquent, le flux total au travers du cube est nul.



**Fig. III.2.** *A gauche:* un cube dans un champ homogène.  
*A droite:* le cube a tourné autour d'un axe vertical.

Ensuite, le cube est tourné d'un angle  $\theta$  autour de l'une de ses arêtes verticales. Le flux au travers des faces supérieure et inférieure est toujours nul, mais il ne l'est pas pour les quatre autres: sur les faces opposées les flux sont de signes opposés et vont s'annuler deux à deux. Le flux total au travers du cube est encore nul. On se convainc que si le cube est tourné d'un angle quelconque autour d'un axe quelconque, *le flux total sera toujours nul*, le flux de chaque face s'opposant au flux de la face qui lui est parallèle, car les vecteurs-surface sont de sens opposés.

Considérons maintenant le cas bien moins particulier d'une surface  $S$ , fermée et quelconque dans un champ  $\mathbf{E}$  inhomogène. La seule restriction, mais d'importance, est que l'intérieur de cette surface soit dépourvu de charges. On vient de comprendre que le flux d'un champ homogène au travers d'un cube est nul; décomposons donc le volume défini par  $S$  en une multitude de microcubes. Le champ qui n'est pas homogène à l'échelle de  $S$  le devient à l'échelle des microcubes et son flux est nul au travers de chaque microcube. Le flux total au travers de  $S$  n'est que la somme de flux nuls et est donc nul aussi. On condense ce résultat:

$$\Psi_0 = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{si la charge contenue dans } S \text{ est nulle}$$

**Notations:** le fait que la surface soit fermée s'indique par le  $\circ$  en indice de  $\Psi$  et par le  $O$  sur le signe intégrale.

Ce n'est pas encore la loi de Gauss mais presque, parce que si  $S$  n'est pas vide de charges le flux  $\Psi_0$  ne sera pas nul. En effet, imaginons cette surface fermée dans une région exempte de toute charges et champs extérieurs et plaçons une charge  $Q$  à l'intérieur. Elle produit un champ dont le flux au travers de  $S$  ne peut pas être nul car les produits scalaires des vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $d\mathbf{S}$  ont tous le même signe, par exemple positif si  $Q$  est positive. La relation entre la charge enfermée et le flux total qu'elle engendre est simple:  $\Psi_0 \propto Q_{\text{enf}}$ . Il faut une constante de proportionnalité, c'est  $\epsilon_0$ . On en parlera, mais énonçons la loi:

$$Q_{\text{enf}} = \epsilon_0 \Psi_0 \quad \text{ou bien} \quad \Psi_0 = \frac{Q_{\text{enf}}}{\epsilon_0} \quad \text{loi de Gauss}$$

avec  $\Psi_0$  défini plus haut.

### Remarques:

a) La constante  $\epsilon_0$  est nommée *permittivité du vide* et parfois *constante d'influence*. C'est la constante fondamentale de l'électrostatique et l'une des deux constantes fondamentale de l'électromagnétisme avec  $\mu_0$ , son pendant du magnétisme. Ces deux constantes sont liées par la formule étonnante:  $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière, ce qui montre la grande unité de l'électromagnétisme dont l'optique fait aussi partie. La valeur de cette nouvelle constante est:  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  en unités du système MKSA.

b) La loi de Gauss qu'on vient de voir est l'une des quatre lois de base de l'électromagnétisme; sous une forme un peu plus élaborée, elle devient l'une des quatre équations de Maxwell qui régissent tout l'électromagnétisme, optique comprise. En fait, cette loi de Gauss s'applique non seulement au champ électrique, comme on vient de le voir, mais aussi au champ magnétique, comme on le verra; elle a une portée très générale et s'applique à toute forme de champ ou d'onde (gravitation, lumière, son, ...) et est en relation très directe avec la forme de la source du champ ainsi on le montre dans la première application et dans d'autres au § suivant.

## III. 3. Applications de la loi de Gauss

### 1) Le champ d'une charge ponctuelle

On sait bien quelle est l'allure d'un tel champ (chap. II), mais supposons que la loi de Coulomb ne nous soit pas connue et démontrons-la au moyen de la loi de Gauss. Si on y parvient, la loi de Coulomb perdra son statut de loi pour devenir alors un théorème.

On se place à une distance  $r$  d'une charge ponctuelle  $q$  et on enferme celle-ci dans une sphère (surface fermée) qui sera notre surface de Gauss pour le problème. La charge  $q$  est au centre de la sphère. Il est clair que cette sphère n'a qu'une réalité géométrique.

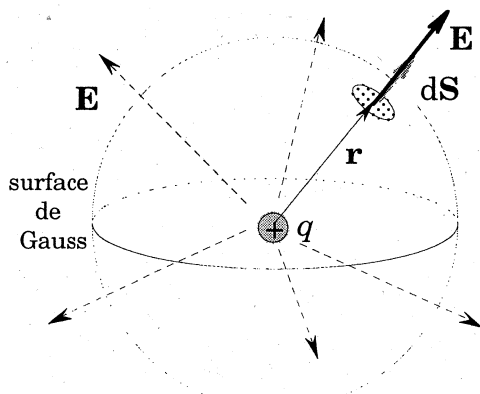


Fig. III.3.

Pour appliquer la loi de Gauss, il faut calculer le flux de  $\mathbf{E}$  au travers de la sphère. C'est ici très simple et on se doute du résultat, mais faisons-le en détail tout d'abord en exprimant le flux élémentaire  $d\Psi$  au travers de l'élément de surface  $d\mathbf{S}$ . On observe tout d'abord que  $\mathbf{E}$  et  $d\mathbf{S}$  sont parallèles, ce qui permet de remplacer le produit scalaire par le produit des normes:  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$ . Ensuite, tous les points de la sphère étant évidemment à la même distance du centre, la norme de  $\mathbf{E}$  à la même valeur sur toute la sphère, on peut donc le sortir de l'intégrale.

Le flux total est ainsi:

$$\Psi_0 = \oint_s d\Psi = \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_s E dS = E \oint_s dS = E 4\pi r^2 \quad (\text{aire d'une sphère})$$

D'autre part la loi de Gauss nous dit que:  $\Psi_0 = Q_{\text{enf}}/\epsilon_0$ , ce qui devient ici:

$E 4\pi r^2 = q/\epsilon_0$ ; par conséquent:

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \text{champ d'une charge ponctuelle}$$

On avait promis (chap. I) que la constante  $k$  de la loi de Coulomb n'était que provisoire, promesse tenue:  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ .

Avant de passer à quelques applications de la loi de Gauss pour calculer des champs dans d'autres configurations que la simple charge ponctuelle, on va montrer que les métaux ont un comportement très particulier en électrostatique et que la loi de Gauss aide à rendre compte des phénomènes.

## 2) Conducteurs et champs électriques

**a) On affirme que le champ électrique est toujours nul à l'intérieur d'un conducteur, qu'il soit chargé ou non, dans un champ extérieur ou non.**

Il faut se souvenir de la structure d'un métal: pour le cuivre par exemple, les ions  $\text{Cu}^+$  sont en positions fixes et des électrons quasi-libres en nombre (presque) égal aux ions peuvent se déplacer parmi ces ions. Si le métal est dans un champ externe, des  $e^-$  vont se déplacer à l'intérieur de la masse métallique et le métal sera *polarisé*. Ce mouvement des charges libres se produit extrêmement rapidement pour atteindre un état d'équilibre, dit précisément *électrostatique*. Cette réorganisation de la répartition des  $e^-$  par le champ externe est telle que le champ interne dû à la polarisation compense exactement le champ externe. Raisonnons par l'absurde: si cette compensation n'était pas parfaite, il subsisterait un champ interne qui mettrait en mouvement les  $e^-$  libres de la masse métallique et la situation ne serait pas électrostatique.

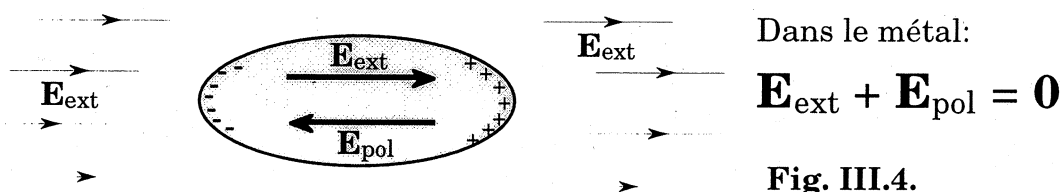


Fig. III.4.

**b) On affirme que la charge totale intérieure d'un conducteur, chargé ou non, est toujours nulle.**

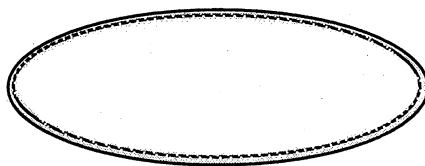
Un conducteur contient donc des  $e^-$  libres et des ions positifs fixes. Utilisons la loi de Gauss pour montrer qu'il doit y avoir exacte neutralité à l'intérieur.

On considère un morceau de métal, chargé ou non, et on imagine une surface de Gauss  $S$  qui enferme l'intérieur du métal, c'est-à-dire qu'elle est juste sous sa surface physique. On applique la loi de Gauss:

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \oint_S \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{S}, \text{ or } \mathbf{E}_{\text{int}} = 0 \text{ par la propriété a) } \Rightarrow Q_{\text{int}} = 0$$

Fig. III.5.

surface de Gauss juste sous la surface du métal



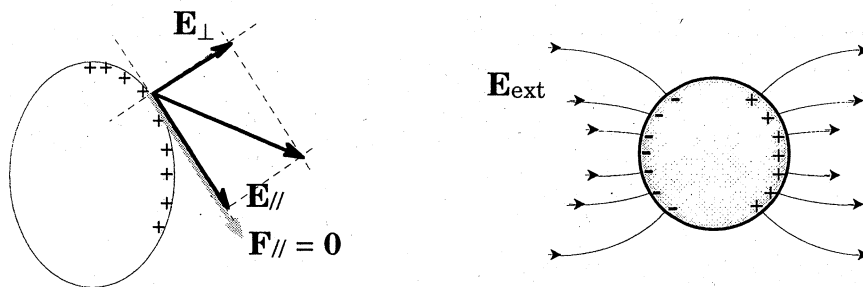
*l'épaisseur* de la surface du métal ! Disons simplement que physiquement, elle est de l'ordre du nm, c-à-d de quelques couches de ions, zone où se trouve les charges excédentaires quand il y en a.

**c) On affirme que les charges excédentaires d'un conducteur sont exclusivement en surface.**

C'est une conséquence immédiate de la propriété précédente: si les charges excédentaires ne se trouvent pas à l'intérieur, elles sont à coup sûr en surface. Argumentons un peu et prenons un morceau de métal chargé négativement; les e- en excès se repoussent les uns les autres et vont par conséquent s'éloigner les uns des autres le plus possible, jusqu'à ce qu'ils se retrouvent tous en surface.

**d) On affirme que le champ  $\mathbf{E}$  en surface d'un conducteur est toujours normal à la surface.**

Que le métal soit chargé ou neutre mais polarisé, il y a des charges excédentaires sur sa surface; ces charges produisent un champ  $\mathbf{E}$  à l'extérieur (et pas à l'intérieur) du métal. Raisonnons encore par l'absurde et supposons que ce champ a une orientation à priori quelconque, dépendant par exemple de la forme de la surface. Il est permis de décomposer ce vecteur-champ  $\mathbf{E}$  en une composante  $E_{\perp}$  normale à la surface et une composante  $E_{\parallel}$  tangentielle telles que  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_{\parallel}$ . L'effet de  $\mathbf{E}_{\parallel}$  sera de provoquer une force  $\mathbf{F}_{\parallel} = q\mathbf{E}_{\parallel}$  sur les e- libres de surface et de les mettre en mouvement, créant des courants superficiels. La situation ne sera alors plus électrostatique.  $\mathbf{E}_{\parallel}$  est donc nul et il ne peut y avoir que  $\mathbf{E}_{\perp}$ .



**Fig. III.6.** Dans toute situation électrostatique, le champ et les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface du conducteur.

Ces quatre propriétés fondamentales des conducteurs étant maintenant présentées, revenons aux calculs de champs électriques par l'application de la loi de Gauss.

### 3) Champ à l'extérieur d'une sphère chargée

Que la sphère soit métallique ou diélectrique est sans importance tant qu'on ne considère que le champ extérieur que crée les charges qu'elle porte. On n'examine que le cas où la répartition des charges est *isotrope* (la même dans toutes les directions vues du centre), ce qui implique que la sphère n'est pas dans un champ produit pas d'autres charges, lequel pourrait provoquer une polarisation, détruisant l'isotropie.

Soit donc une sphère de rayon  $R$  et portant une charge totale  $Q$  qu'on choisit positive. On imagine alors une sphère de Gauss, concentrique à la sphère chargée, de rayon  $r \geq R$  et on exprime le flux du champ dû à  $Q$  au travers de la sphère de Gauss (Fig. III.7. ci-dessous).

Par symétrie évidente,  $\mathbf{E}_{\text{ext}} \parallel d\mathbf{S}$  et de même sens ( $Q > 0$ ), de plus  $E_{\text{ext}}$  reste le même à la surface de la sphère de Gauss. On a donc:

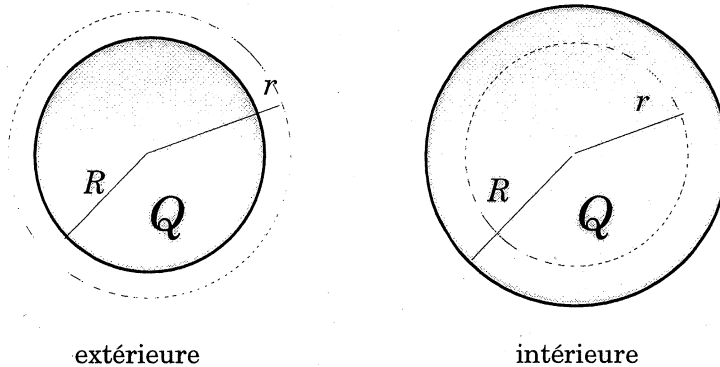
$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \Psi_0 = \oint_s d\Psi = \oint_s \mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{S} = \oint_s E_{\text{ext}} dS = E_{\text{ext}} \oint_s dS = E_{\text{ext}} 4\pi r^2 \Rightarrow E_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

ce qui n'est autre que le champ d'une charge ponctuelle  $Q$ .

Ainsi, le champ hors d'une charge sphérique isotrope ou celui d'une charge ponctuelle ne se distinguent pas.

Fig. III.7.

Sphères  
de Gauss:



#### 4) Champ à l'intérieur d'une sphère chargée

On l'a vu, le champ à l'intérieur d'un métal est nul, c'est donc le cas d'une sphère diélectrique qu'on examine. Elle est de rayon  $R$  et de charge totale  $Q$ . Cette charge est répartie uniformément dans tout le volume de la sphère.

Cela peut poser un problème pratique pour obtenir un tel objet. Il est certain qu'il n'aura pas été chargé avec une peau de chat puisque le frottement n'affecte que la surface; c'est une technique spéciale qu'il faut mettre en oeuvre pour charger un corps en son intérieur. Cette technique s'utilise par exemple pour fabriquer des *électrets*, diélectriques chargés en permanence et qui équipent certains types de microphones.

Pour traiter notre problème, il faut imaginer une surface de Gauss; on la prend évidemment sphérique et concentrique à la sphère chargée mais elle lui est intérieure, donc  $r \leq R$  (Fig. III.7. ci-dessus). Il faut donc maintenant exprimer la fraction  $Q'$  de la charge totale  $Q$  qu'elle contient. La charge de notre sphère est donc telle que la densité volumique de charge  $\rho$  est uniforme; par définition de  $\rho$ :

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}; \quad Q' = \rho V' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow Q' = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

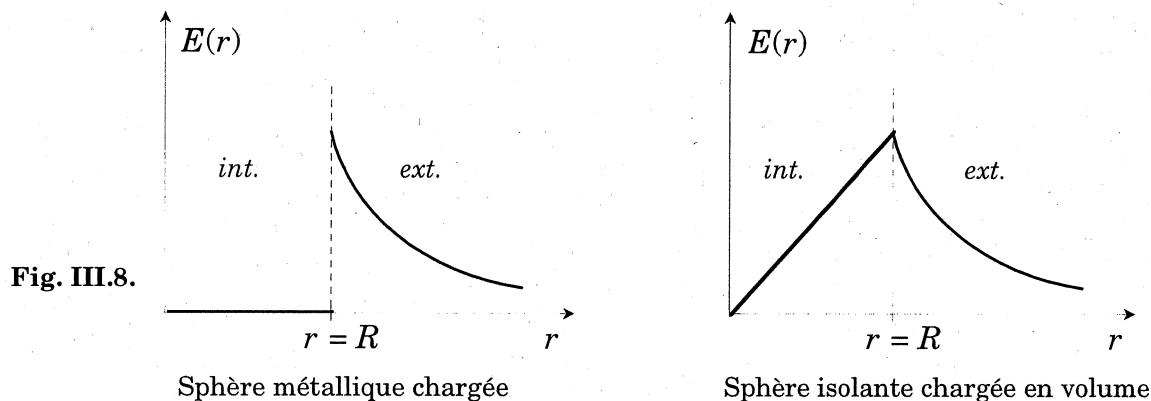
La symétrie sphérique permet de nouveau de supprimer le produit scalaire et de sortir  $E$  de l'intégrale pour le calcul du flux:

$$\begin{aligned} \frac{Q'}{\epsilon_0} = \Psi_0 &= \oint_s d\Psi = \oint_s \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{S} = \oint_s E_{\text{int}} dS = E_{\text{int}} \oint_s dS = E_{\text{int}} 4\pi r^2 \\ \Rightarrow E_{\text{int}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{r^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \end{aligned}$$

Malgré les apparences, cette dernière expression de  $E_{\text{int}}$  est très différente de celle de  $E_{\text{ext}}$  de l'application 3). En effet, le champ à l'extérieur de  $Q$  varie comme  $r^{-2}$  mais le champ à l'intérieur *croît linéairement* avec la distance au centre:  $E_{\text{int}} \propto r$ .

Il faut encore contrôler la continuité, c'est-à-dire examiner si le champ

atteint la même valeur à la surface de la sphère chargée, venant de l'intérieur ou de l'extérieur; cela revient à voir si:  $E_{\text{int}}(r=R) = E_{\text{ext}}(r=R)$ , ce qui est immédiat; le champ est donc continu en surface pour une sphère diélectrique chargée uniformément en volume. Il n'y aurait évidemment pas continuité pour une sphère *métallique* chargée puisqu'on sait que  $E_{\text{int}} = 0$ .



### 5) Champ très près de la surface d'un conducteur

Par "très près", on entend en des points à des distances nettement inférieures aux dimensions de l'objet chargé. Dans un petit domaine de cette région, le champ doit pouvoir être considéré comme homogène, c'est l'hypothèse qu'on se fixe.

Examinons un conducteur portant des charges, elles sont naturellement en surface. Une petite portion  $\Delta S$  de cette surface porte une fraction  $\Delta q$  de la charge totale. Enfermons cette charge dans une surface de Gauss adéquate:

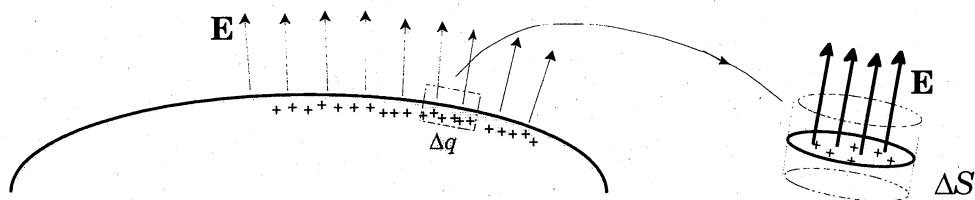


Fig. III.9. Surface de Gauss enfermant une petite portion  $\Delta q$  des charges de surface.

On la choisit en forme de cylindre droit et plat, comme une boîte à fromage ou de Petri, la surface  $\Delta S$  étant parallèle au fond et au couvercle. Le flux de  $\mathbf{E}$  au travers de la surface totale du cylindre se compose de trois parties:

a) surface latérale:  $\Psi_1 = 0$  puisque  $\mathbf{E}$  est perpendiculaire au conducteur et donc parallèle à la surface latérale du cylindre;

b) surface de base, intérieure au métal:  $\Psi_2 = 0$  puisque  $\mathbf{E}$  y est nul;

c) surface supérieure:  $\Psi_3 = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S} = E \Delta S = \Psi_0$ , flux total. Gauss dit ici que:

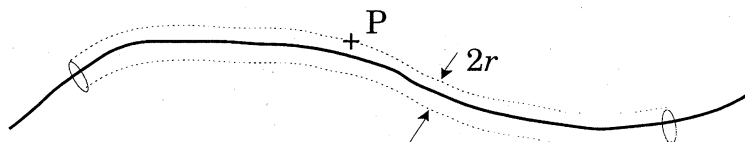
$$\Psi_0 = \frac{\Delta q}{\epsilon_0}, \text{ donc: } E \Delta S = \frac{\Delta q}{\epsilon_0}; \text{ or, par définition: } \sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}, \text{ par conséquent:}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ champ très près de la surface d'un conducteur.}$$

### 6) Champ au voisinage d'un fil chargé uniformément

Soit un fil, de longueur "infinie" ou non, dont la densité linéique de charge  $\lambda$  est uniforme. On s'intéresse au champ qu'il crée en des points P à des distances  $r$  faibles vis-à-vis de la longueur du fil:  $r \ll L$ . De plus, ces points ne doivent pas être trop près des extrémités du fil. Par contre, il n'est pas nécessaire que le fil soit rectiligne, pour autant que sa courbure ne soit pas trop marquée ( $R \gg r$  où  $R$  est le rayon de courbure). Toutes ces hypothèses étant prises, on choisit une surface de Gauss en forme de tube de rayon  $r$  et de longueur  $L$ .

Fig. III.10.



La densité  $\lambda$  étant uniforme et le fil n'étant pas trop courbé, le champ  $\mathbf{E}$  est perpendiculaire au fil; son flux au travers des extrémités du tube est donc nul. Le champ étant perpendiculaire au fil, il l'est aussi à la surface latérale  $S$  du tube; son flux est donc simplement le produit du champ par cette aire  $S$ . Le flux total est donc:  $\Psi_0 = \mathbf{E}S = \mathbf{E}2\pi rL$ . Soit d'autre part  $q$  la charge de la longueur  $L$  de fil; on applique la loi de Gauss:

$$\Psi_0 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} = \mathbf{E}2\pi rL \quad \text{et } L \text{ disparaît, le champ est donc:}$$

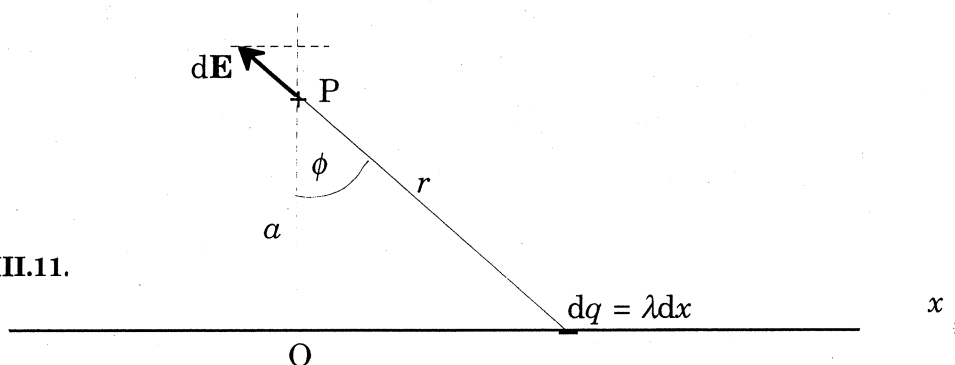
$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{champ au voisinage d'un fil uniformément chargé}$$

On doit remarquer la décroissance en  $1/r$ , caractéristique de la symétrie cylindrique, la décroissance en  $1/r^2$  caractérisant la symétrie sphérique.

#### Remarque:

Le résultat ci-dessus peut aussi être obtenu au moyen de la loi de Coulomb. Le calcul est alors moins facile: il faut décomposer le fil en éléments de longueur  $dL = dx$  portant une charge  $dq$ , exprimer le champ  $d\mathbf{E}$  que  $dq$  crée en P à la distance  $a$  (fixe) du fil et  $r$  (variable) de  $dq$  puis intégrer sur la longueur du fil.

Fig. III.11.



... laissé en exercice...



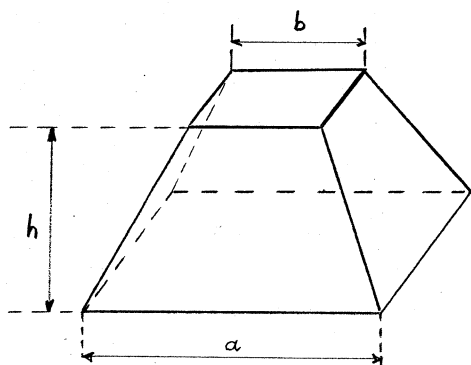
**CH. III : FLUX ET LOI DE GAUSS**

**1.** Un filet à papillons est dans un champ  $E = 1000 \text{ N/C}$ . Le cerceau sur lequel est fixé le filet est un cercle de rayon  $R = 9 \text{ cm}$  et dont le plan est perpendiculaire au champ. Calculer le flux de  $\mathbf{E}$  au travers du filet.

**Rép:**  $25,4 \text{ Nm}^2/\text{C}$ .

**2.** Le plan d'un carré de côté  $a = 10 \text{ cm}$  forme un angle de  $30^\circ$  avec un champ homogène  $E = 1000 \text{ N/C}$ . Calculer le flux de  $\mathbf{E}$  au travers du carré.

**Rép:**  $5 \text{ Nm}^2/\text{C}$ .



**3.** Une pyramide tronquée à base carrée constitue une surface fermée. Elle est dans un champ  $\mathbf{E}$  homogène perpendiculaire à sa base.

a) Calculer le flux de  $\mathbf{E}$  au travers de chacune de ses faces;

b) sans utiliser la loi de Gauss, montrer alors que le flux au travers de la surface totale de la pyramide est nul.

**Rép:** a) pour une face latérale:  $E(a^2 - b^2)/4$ .

**4.** Une charge ponctuelle  $q$  se trouve à l'un des sommets d'un cube d'arête  $a$ . Au moyen de la loi de Gauss, déterminer le flux du champ dû à cette charge au travers de chacune des faces du cube.

**Rép:** zéro pour certaines et  $q/(24\epsilon_0)$  pour les autres.

**5.** Au cours il a été dit que le champ à l'intérieur d'un conducteur est toujours nul. Par intérieur on entend dans la masse métallique.

Est-ce aussi vrai s'il s'agit d'un conducteur creux, chargé ou non, et qu'on considère un point dans la cavité vide ?

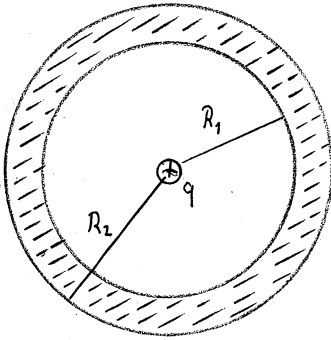
**Rép:** oui.

**6.** Un conducteur creux de forme irrégulière porte une charge totale  $Q = -8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ . Dans la cavité, de forme irrégulière aussi, se trouve une charge ponctuelle  $q = 3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  qui n'est pas en contact avec le conducteur.

a) Déterminer la charge portée par les surfaces intérieure et extérieure;

b) dessiner schématiquement la répartition des charges.

**Rép:** a) int.:  $-3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ ; ext.:  $-5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .



**7.** Un conducteur métallique a la forme d'une coquille sphérique de rayon intérieur  $R_1 = 6$  cm et extérieur  $R_2 = 8$  cm. Il est chargé à la valeur  $Q = 6 \cdot 10^{-8}$  C, charge uniformément répartie. Au centre de la sphère se trouve une charge ponctuelle  $q = 3 \cdot 10^{-8}$  C.

Calculer la densité superficielle de charge sur les deux surfaces du conducteur.

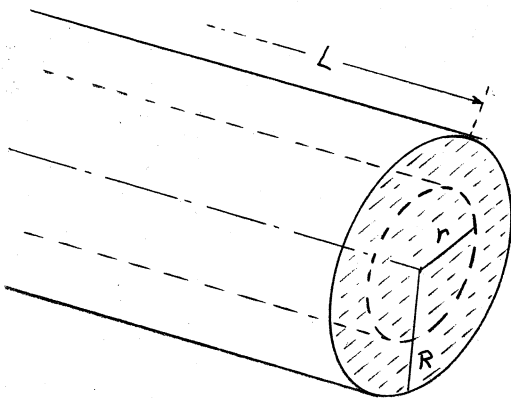
**Rép:** int.:  $-6,63 \cdot 10^{-7} \frac{C}{m^2}$ ; ext.:  $1,12 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$

**8.** Pour le système de l'exercice précédent, calculer le champ pour  $r_1 = 4$  cm,  $r_2 = 7$  cm et  $r_3 = 10$  cm.

**Rép:**  $1,69 \cdot 10^5$  N/C; 0 ;  $0,81 \cdot 10^5$  N/C:

**9.** Calculer l'accélération d'un e- se trouvant à l'extérieur et à 2 cm de la surface d'une sphère diélectrique pleine de rayon  $R = 5$  cm. Elle est chargée uniformément dans son volume; sa densité volumique de charge est  $\rho = 4 \cdot 10^{-4}$  C/m<sup>3</sup>.

**Rép:**  $6,75 \cdot 10^{16}$  m/s<sup>2</sup>.

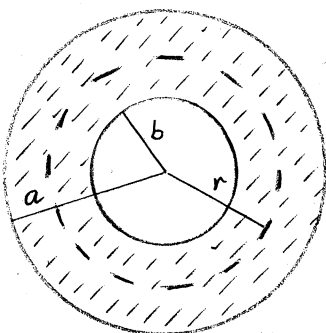


**10.** Cylindre droit de matière isolante et portant une charge totale  $Q$ ; La densité volumique de charge est uniforme. Le rayon est  $R$  et la longueur est  $L$  avec  $L \gg R$ .

Au moyen de la loi de Gauss, calculer le champ dû à la répartition de charge et loin des extrémités:

- a) à l'intérieur du cylindre ( $0 \leq r \leq R$ );
- b) à l'extérieur du cylindre ( $r \geq R$ );
- c) vérifier la continuité de  $E$  en  $r = R$ .

**Rép:**  $E^{int} = \frac{Qr}{2\pi\epsilon_0 R^2 L}$ ;  $E^{ext} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}$



**11.** Sphère isolante de rayon  $a$  et comportant une cavité sphérique concentrique et de rayon  $b$ . Elle porte une charge totale  $Q$ , la densité volumique de charge étant uniforme.

Exprimer la charge partielle  $Q'$  enfermée dans une sphère de rayon  $r$  variable ( $b \leq r \leq a$ ).

**Rép:**  $Q' = Q \frac{r^3 - b^3}{a^3 - b^3}$

## LA TENSION ET LE POTENTIEL

### IV.1. Rappels de mécanique

Les deux notions nouvelles apparaissant dans ce chapitre ne le sont en fait pas vraiment car elles ont beaucoup d'analogies avec celles de *travail* et d'*énergie potentielle*. Il est donc judicieux de rappeler les résultats fondamentaux relatifs à ces deux concepts.

**Théorème de l'énergie cinétique:**  $A_{1,2} = E_c(2) - E_c(1)$

**Définition de l'énergie mécanique:**  $E_m = E_c + E_p$  où  $E_p$  : énergie potentielle.

**Conservation de l'énergie mécanique:**  $\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow$

**Théorème de l'énergie potentielle:**  $A_{1,2} = -\Delta E_p = E_p(1) - E_p(2)$ , ce qui peut être aussi une *définition* de l'énergie potentielle.

Dans la situation où l'énergie mécanique est conservée, c-à-d où il est judicieux de définir une énergie potentielle, le travail s'exprime comme une différence d'énergies potentielles. Il est alors loisible de choisir un point pour lequel l'énergie potentielle sera nulle; soit R ce point de référence, donc  $E_p(R) = 0$ . Ainsi, l'énergie potentielle en un point P quelconque s'écrit:

$$E_p(P) = E_p(P) - E_p(R) = A_{P,R}.$$

La force de Coulomb étant *conservative*, cela permettra d'appliquer les propriétés rappelées ci-dessus.

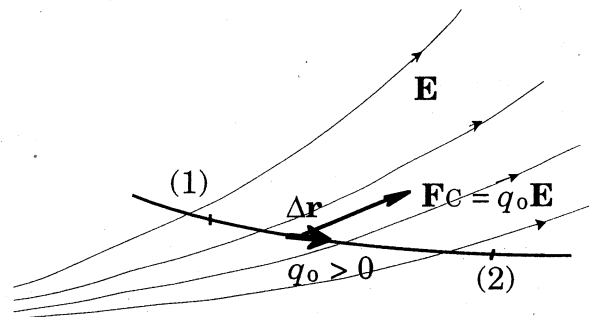
### IV.2. Tension dans un champ électrostatique

En électricité, il y a deux grandeurs qui dominent, et on les connaît déjà, ce sont le *courant* et la *tension*; on les a rencontrées dans le cours d'**électrocinétique**. Elles dominent largement parce qu'elles sont des grandeurs qui *se mesurent* facilement; pour la tension, l'instrument adéquat est un *voltmètre*. Ici on examine la tension avec un regard un peu différent:

#### Définition:

Considérons un champ électrique  $\mathbf{E}$  quelconque et une charge-test  $q_0$  qu'on y poserait. Elle est soumise à la force de Coulomb  $\mathbf{F}_c$  et donc va se déplacer :

Fig. IV.1



La force de Coulomb effectue ainsi un travail entre deux points (1) et (2) du champ:

$$A_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q_0 \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

On définit alors la tension entre les deux points par:

$$U_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{A_{1,2}}{q_0}$$

### Remarques:

1) Résultant d'un produit scalaire, la tension est un scalaire: *nombre* positif, négatif ou nul, cela dépend du sens de parcours entre (1) et (2) et du sens du champ.

2) Comme on l'a déjà dit à propos de la définition du champ, la tension est indépendante de la charge  $q_0$  qu'on a placé dans le champ. Entre deux points d'un champ  $\mathbf{E}$ , une tension  $U$  existe, c'est ainsi.

3) On insiste sur le fait que ce n'est qu'entre deux points d'un champ que la notion de tension a un sens, tout comme pour le travail pour lequel cela ne veut rien dire que de parler du travail en un point.

### Unités de la tension et du champ:

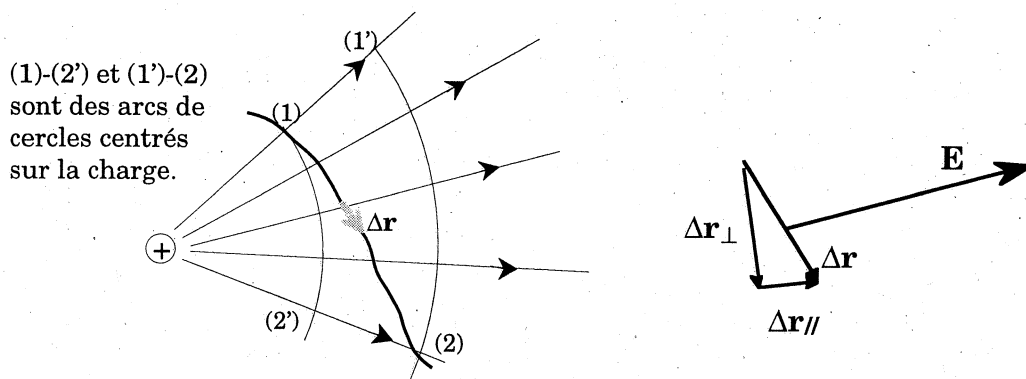
Dans le système MKSA, la tension se mesure en volts:  $[U] = V$ .

Par la relation de définition ci-dessus  $U = A/q$ , on déduit que  $1 V = 1 J/C$ . Comme d'autre part, la tension est le produit d'un champ par une distance, le champ électrique peut s'exprimer (et se mesurer) en V/m. Cette nouvelle unité pour  $E$  est la même que le N/C précédemment introduite (chap. II) puisque c'est toujours le système MKSA, mais elle est beaucoup plus utilisée car une tension et une distance se mesurent bien plus facilement qu'une force et une charge.

## IV.3. Propriétés de la tension

Les propriétés de la *tension* sont en fait celle du *travail* d'une force conservative, la force de Coulomb, puisqu'il n'y a qu'un facteur  $q$  entre tension et travail.

a) *La tension entre deux points est indépendante du chemin allant d'un point à un autre.*



**Fig. IV.2** A gauche: chemins (1) à (2) dans un champ électrique. A droite: agrandissement de la décomposition d'un élément de chemin.

Il y a une infinité de chemins possibles entre (1) et (2), par exemple (1)→(1')→(2) ou (1)→(2')→(2). Tout chemin orienté peut être décomposé en éléments vectoriels  $\Delta \mathbf{r}$  - donc rectilignes - suffisamment petits pour suivre le parcours au plus près. De plus, chaque  $\Delta \mathbf{r}$  peut à son tour être décomposé en fonction de l'orientation de  $\mathbf{E}$  à l'endroit du  $\Delta \mathbf{r}$ . Ainsi,  $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_{//} + \Delta \mathbf{r}_{\perp}$ , les indices se rapportant à l'orientation de  $\mathbf{E}$ ; en notation de différentielles:  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{//} + d\mathbf{r}_{\perp}$ . La tension entre (1) et (2) s'écrit:

$$U_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot (d\mathbf{r}_{//} + d\mathbf{r}_{\perp}) = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_{//} + \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_{\perp}$$

Or, par définition de  $d\mathbf{r}_{\perp}$ :  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_{\perp} = 0$ . Il reste:

$$U_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_{//} = \int_1^{1'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

où le chemin (1)→(2) selon  $d\mathbf{r}_{//}$  revient à suivre un chemin *radial* (1)→(1') ou (2')→(2), les contributions à la tension le long d'arcs de cercles tels (1)→(2') ou (1')→(2) sont nulles.

### b) Additivité de la tension

Comme pour le travail, cette propriété résulte de la distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition:

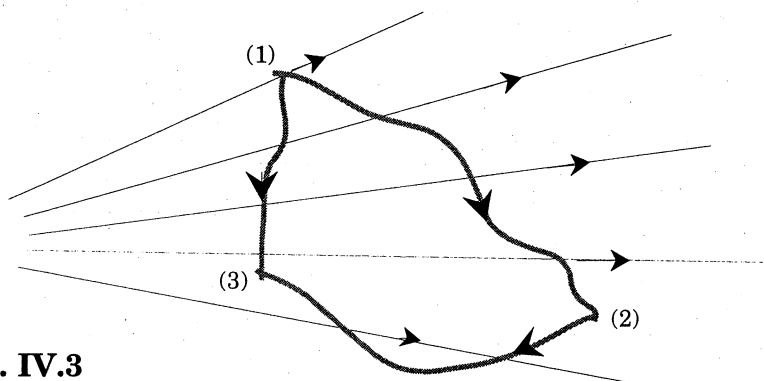


Fig. IV.3

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{c-à-d:} \quad U_{1,2} + U_{2,3} = U_{1,3}$$

ce qui est une autre façon d'exprimer l'indépendance de chemin montrée en a).

### c) Signe de la tension

Si on parcourt un chemin en sens inverse dans un champ donné, cela correspond à changer le signe de la tension puisque dans le produit scalaire qui la définit, cela change le sens des vecteurs-chemin  $d\mathbf{r}$ :

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_2^1 \mathbf{E} \cdot (-d\mathbf{r}) = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{c-à-d:} \quad U_{1,2} = - U_{2,1}$$

### d) La tension est nulle sur un chemin fermé

Cette propriété est un peu le point d'orgue de la liste; elle ne fait pourtant que découler des autres:

De b) et de c), on déduit:  $U_{1,2} + U_{2,1} = 0$ , les parcours (1)→(2) et (2)→(1) pouvant être différents et quelconques.

On se souvient que le travail d'une force conservative, comme le poids, ou la force de gravitation ou encore la force élastique, est nul sur un parcours fermé. On

le redit, la force de Coulomb est conservative; son travail est donc nul sur un tel parcours, et par conséquent la tension aussi puisque  $U = A/q$ .

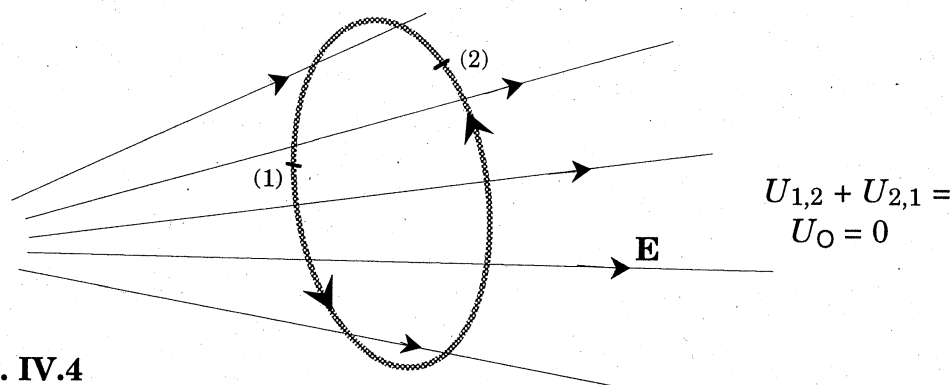


Fig. IV.4

e) *Tension dans un champ homogène*

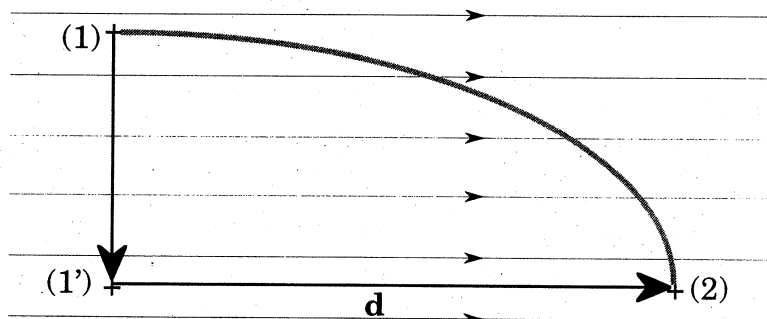


Fig. IV.5

C'est vraiment très simple:

$$U_{1,2} = U_{1',2} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \quad \text{car } U_{1,1'} = 0.$$

Mais il faut se méfier des apparences parce que cela reste un produit scalaire: même si les deux vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{d}$  sont parallèles, il subsiste la question de leur *sens* relatif, qui conditionne le *signe* de la tension. Un exemple va surgir ci-dessous.

#### IV.4. Accélération de particules chargées - oscilloscope

C'est un problème qui a déjà été quelque peu traité par la cinématique (chap. II). Il y a moyen maintenant de l'examiner un peu plus efficacement, comme le font les spécialistes des hautes énergies, en utilisant le théorème de l'énergie cinétique et la notion de tension.

Soit donc une particule - ou un faisceau de particules identiques - de masse  $m$  et de charge  $q$  ayant une vitesse  $v_1$  en un point (1) d'un champ électrique. Le champ agit avec la force de Coulomb sur les particules de façon à ce qu'elles aient une vitesse  $v_2$  à un autre point du champ.

Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = A_{1,2} = q U_{1,2} \quad \text{d'où on tire } v_2:$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2qU_{1,2}}{m}}$$

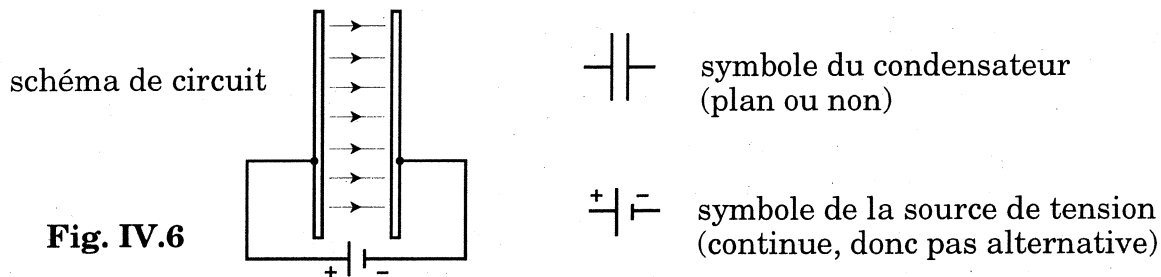
**Il faut bien observer que :**

\*  $v_2 > v_1$  si  $q U_{1,2} > 0$ , ce qui se produit si  $q$  et  $U_{1,2}$  sont de même signe; si  $q < 0$ , il faut que  $U_{1,2}$  le soit aussi;

\*  $v_2$  peut s'annuler si  $v_1^2 = -2qU_{1,2}/m$  ;  $q$  et  $U_{1,2}$  sont alors de signes différents;  
 \*  $v_2$  peut ne pas exister si  $v_1^2 < -2qU_{1,2}/m$ . Cela signifie-t-il quelque chose? Oui, que la particule est ralentie par le champ et que sa vitesse  $v_1$  n'est pas suffisante pour atteindre le point (2). Elle revient alors en arrière.

### Symboles :

Pour dessiner des circuits électriques, un symbolisme est nécessaire pour en représenter sans ambiguïtés les différents éléments. Pour l'instant, en électrostatique, seuls apparaissent les symboles de source de tension et de condensateur. Soit le circuit tout simple d'un condensateur connecté à une source de tension de façon à ce qu'un champ électrostatique existe entre ses armatures:



Une source de tension est parfois appelée *générateur*. Pour son symbole, la borne positive se distingue de la borne négative par un trait plus long. Ceci étant défini, cela permettra de ne plus mentionner le + et le - sur le symbole. Des fils de connection sont évidemment utilisés pour relier la source au condensateur. Les bornes de la source, les fils de connection et les armatures du condensateur sont métalliques, par conséquent, la tension aux bornes de la source se retrouve entre les armatures: si  $U$  est la tension donnée par la source et si  $d$  est l'écartement entre les plaques du condensateur-plan ( $\Rightarrow \mathbf{E}$  homogène), la valeur du champ sera simplement  $E = U/d$ , sans s'occuper des signes.

### L'électron-volt

En physique des particules (atomique, nucléaire, corpusculaire), l'énergie des particules accélérées ne se mesure pas en joule mais dans une unité beaucoup plus commode pour cela: *l'électron-volt*. Prenons des exemples:

1) Un proton initialement immobile est placé dans un champ électrique produit par une tension de 1 V. Le champ va l'accélérer et lui communiquer une énergie qu'on calcule par le théorème de l'énergie cinétique, les indices (1) et (2) notant les points entre lesquels cette tension est de 1 V:

$$qU_{1,2} = A_{1,2} = E_c(2) - E_c(1) = E_c(2) = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Si la particule avait été un électron ou un atome quelconque mais une fois ionisé, tel  $\text{Pb}^+$ , le résultat serait exactement le même, la masse de la particule n'intervient pas. Par contre, différentes seraient les vitesses puisque  $E_c = mv^2/2$ , mais ce n'est pas ce qu'on veut montrer ici. On définit cette nouvelle unité d'énergie en disant simplement que ces particules,  $p^+$ ,  $e^-$ ,  $\text{Pb}^+$ , etc. dans ces conditions recevraient une énergie de 1 électron-volt (1 eV).

2) Un proton et un ion  $\text{Pb}^+$  initialement immobiles sont placés dans un champ électrique produit par une tension de 10 000 V. Ils y acquièrent alors tout deux une énergie de 10 000 eV = 10 keV.

3) Un  $e^-$  possédant déjà une énergie de 20 keV arrive dans un champ produit par une tension de 10 kV. Selon les sens relatifs du champ et de la vitesse initiale, l' $e^-$  va recevoir ou perdre une énergie de 10 keV; son énergie, à la sortie du champ sera alors de 30 keV ou de 10 keV.

4) Une particule alpha, c-à-d un noyau d'hélium  $\text{He}^{++}$ , initialement immobile est placée dans un champ électrique produit par une tension de 1 V. Le même calcul qu'avec le proton fait en 1) va lui donner une énergie deux fois plus élevée, c-à-d  $3,2 \cdot 10^{-19}$  J puisque la charge est ici deux fois plus grande. En électron-volts, cela correspond à une énergie de 2 eV. On voit qu'il suffit de multiplier la tension d'accélération par le nombre de charges élémentaires de la particule: une pour un proton ou un électron, deux pour une particule alpha, etc.

Les multiples de l'eV et les domaines d'utilisation sont:

- \* 1 eV, 1 keV ( $= 10^3$  eV): physique moléculaire et atomique
- \* 1 keV, 1 MeV ( $= 10^6$  eV): physique nucléaire
- \* 1 MeV, 1 GeV ( $= 10^9$  eV): physique nucléaire et corpusculaire
- \* 1 GeV, 1 TeV ( $= 10^{12}$  eV): physique corpusculaire et cosmologie

**L'oscilloscope** (schéma explicatif: page suivante)

C'est un instrument universel et trouve une place indispensable dans tout laboratoire de physique ou d'électronique. En médecine, il est utilisé pour des examens ECG ou EEG. De façon générale, il permet de visualiser et de mesurer des événements très rapides, pouvant durer moins d'un millionième de seconde. Un oscilloscope est en fait un voltmètre très performant: la tension à mesurer n'agit pas sur une aiguille mobile ou sur les chiffres d'un cadran comme sur un banal voltmètre mais sur un faisceau d'électrons très rapides dont l'impact est un point lumineux mobile sur un écran.

**Exemple de calcul:** Dans un oscilloscope, les e- sont émis avec une vitesse initiale  $v_0$  négligeable, puis accélérés par une tension  $U_a = 5$  kV. Ils sont ensuite déviés verticalement par le champ d'un condensateur-plan horizontal dont les plaques ont une longueur  $L_1 = 20$  mm et un écartement  $d = 3$  mm. Ce condensateur est alimenté par une tension  $U_v = 100$  V. Calculer:

- a) la vitesse  $v_1$  donnée par  $U_a$ ;
- b) la composante verticale de vitesse à la sortie du second condensateur;
- c) l'angle de déviation et le déplacement du spot sur l'écran dû à cette déviation; l'écran se trouve  $L_2 = 30$  cm ( $\gg L_1$ ) des plaques de déviation.

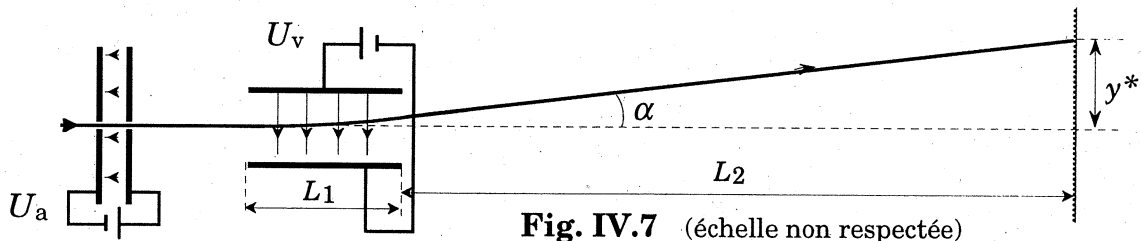


Fig. IV.7 (échelle non respectée)

**Solution:**

$$a) \quad \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = q U_a \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2eU_a}{m}} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$b) \quad v_y = at = \frac{eE_v}{m} t = \frac{eU_v}{md} t ; \quad v_x = v_1 = \frac{L_1}{t} \Rightarrow t = \frac{L_1}{v_x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{eU_v L_1}{md v_x} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$c) \quad \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = 3,8^\circ ; \quad y^* \approx L_2 \tan \alpha = 2 \text{ cm.}$$



# L'oscilloscope

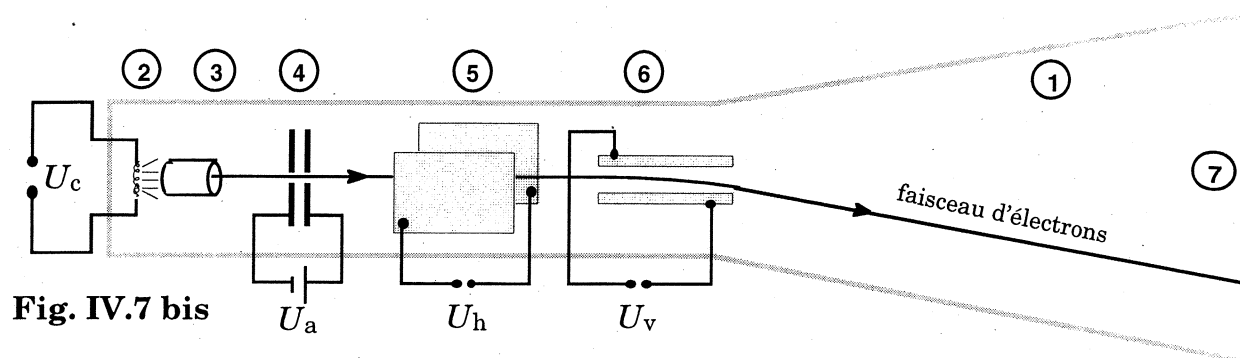


Fig. IV.7 bis

(1) Tube dit *cathodique* en verre épais vidé de son air pour ne pas freiner les e-. Une extrémité du tube est l'écran (7).

(2) Filament de tungstène incandescent. La haute température lui fait émettre des e-. Le chauffage du filament est produit par une tension  $U_c$  souvent de 6,3 V et alternative.

(3) Electrodes de focalisation pour que les e-, émis dans tous les directions par le filament, forment un fin faisceau pour la suite de leur parcours.

(4) Electrodes d'accélération principale, alimentées par une tension fixe  $U_a$  de plusieurs kV. Plus cette tension est élevée, plus l'oscilloscope peut mesurer des tensions à variation rapide (et plus il est cher).

(5) Première paire de plaques de déviation du faisceau; celles-ci provoquent son déplacement horizontal périodique, dit *balayage*. Cette tension  $U_h$ , interne à l'oscilloscope, fait se déplacer périodiquement le *spot* (point lumineux) sur l'écran de gauche à droite à une vitesse pouvant aller de quelques mm/s à quelques  $10^6$  m/s (!). Un bouton sur le devant de l'appareil permet de choisir cette vitesse.

(6) Deuxième paire de plaques de déviation du faisceau; celles-là provoquent son déplacement vertical. La tension  $U_v$ , préalablement amplifiée, est celle qui est à mesurer et justifie l'appellation de voltmètre ultra-rapide pour un oscilloscope. Cette tension est donc appliquée extérieurement et n'est pas interne comme toutes les autres. Un bouton sur la face avant de l'appareil permet le choix de l'amplification et joue le rôle de sélecteur d'échelle d'un voltmètre standard.

(7) Ecran arrêtant les e- qui perdent ainsi leur énergie cinétique au profit d'énergie lumineuse grâce à la substance luminescente qui revêt la surface interne de l'écran. En fait, seule une petite fraction de l'énergie cinétique devient lumière (très souvent verte), le reste étant perdu en chaleur.

N.B. La plupart des oscilloscopes affichent au moins deux traces (un spot qui se déplace rapidement est perçu comme une ligne lumineuse, une *trace*).

**Note ajoutée en 2003 :** Pour aussi bien les oscilloscopes que les moniteurs d'ordinateurs ou de TV, la tendance actuelle est de remplacer systématiquement les écrans à tubes, encombrants, lourds et gourmands en énergie par des écrans plats, à cristaux liquides ou mettant en oeuvre une technologie n'ayant plus beaucoup de points commun avec les tubes cathodiques. C'est un joli progrès.

## IV.5. Potentiel

### Définition

Encore une fois, on utilise une analogie mécanique pour définir cette nouvelle notion. On se souvient que lorsqu'une force est conservative, il est très fructueux de lui associer une énergie potentielle, comme on l'a fait pour les forces de pesanteur, élastique, de gravitation et, récemment pour la force de Coulomb. Ecrivons donc:

$$qU_{1,2} = A_{1,2} = -\Delta E_p = E_p^{(1)} - E_p^{(2)} \quad \text{et divisant par } q:$$

$$U_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{q} = -\frac{\Delta E_p}{q} = \frac{E_p^{(1)}}{q} - \frac{E_p^{(2)}}{q} = V_1 - V_2 = -\Delta V$$

où  $V$  est le *potentiel*.

Ainsi, une *tension* entre deux points se définit comme la *différence des potentiels* de ces deux points:

$$U_{1,2} = V_1 - V_2.$$

A quoi cela peut-il bien servir? La réponse est la même à la même question à propos de l'énergie potentielle: celle-ci permet d'éviter le calcul d'une intégrale de force sur un chemin pour trouver son travail; de même le potentiel évite le calcul d'une intégrale de champ sur un chemin pour trouver la tension.

D'un point de vue plus pratique, *un potentiel se mesure* avec un voltmètre, de la même façon qu'une tension:

*le potentiel d'un point est la tension entre ce point et un point de référence* où le potentiel est déclaré nul, par choix commode.

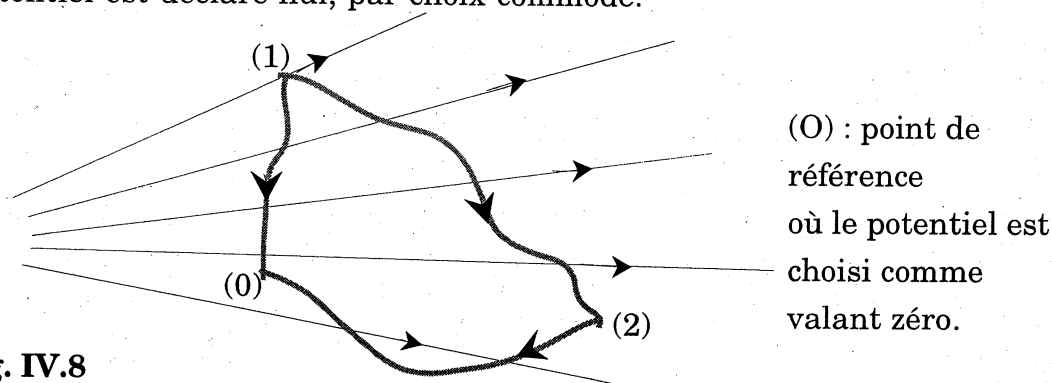


Fig. IV.8

$$U_{1,2} = U_{1,0} + U_{0,2} = U_{1,0} - U_{2,0} = V_1 - V_2$$

Le choix de l'endroit, du point pour lequel  $V = 0$  est arbitraire mais il doit être judicieux de façon à simplifier les calculs, les mesures ou le montage expérimental. Dans les réalisations pratiques de circuits électriques, on choisit souvent le potentiel nul à *la masse*, ce qui est généralement le boîtier métallique de l'appareil électrique, ou encore mieux à *la terre*, ce qui est très concrètement une liaison avec le terrain par un gros conducteur planté profondément dans le sol; les canalisations d'eau peuvent parfois jouer ce rôle. Un circuit, un appareil électrique qui n'est pas à la masse ou relié à la terre est dit *flottant*; c'est le cas d'appareils dont le cordon d'alimentation ne comporte que deux fils, le fil de terre étant absent, mais alors la carcasse de l'appareil doit absolument être en matière isolante, pour éviter qu'un défaut de connexion interne vienne mettre la vie de l'utilisateur en danger si jamais il touche le boîtier mis accidentellement à *la phase*.

Cela dit, on rappelle qu'une tension est une différence de potentiel, c'est pourquoi, pour le fonctionnement d'un appareil, peu importe où se trouve le zéro.

**Exemples de choix du point de référence** pour un circuit très simple : un condensateur chargé par un générateur :

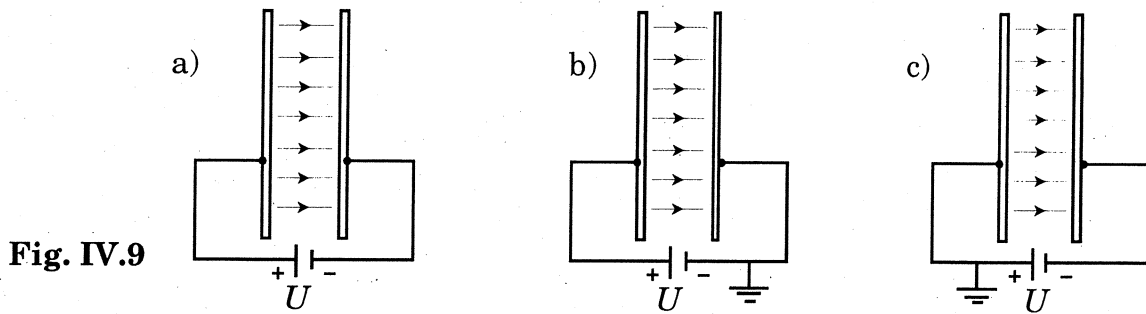


Fig. IV.9

a) Aucun point n'est mis à la terre, le circuit est flottant.

b) La borne négative de la source est mis à la terre, elle est à un potentiel nul, de même par conséquent que la plaque de droite du condensateur; la plaque de gauche est à un potentiel positif. Cela ne change en rien la tension donnée par la source ainsi que la tension entre les plaques.

c) La borne positive de la source est mis à la terre, elle est à un potentiel nul, de même par conséquent que la plaque de gauche du condensateur; la plaque de droite est à un potentiel négatif. Cela ne change en rien la tension donnée par la source ainsi que la tension entre les plaques. Ce choix pour le point où  $V = 0$  est moins souvent fait que le précédent.

**Remarque:**

Le choix du point où  $V = 0$  ne modifie donc pas la *différence de potentiel*, c-à-d la tension entre les plaques du condensateur, de même que le champ  $\mathbf{E}$ .

On a montré (ch. II) que le champ est orienté du + au -, or ceci est maintenant à préciser car dans le cas b) ci-dessus par exemple, la borne - est au potentiel nul, elle n'est donc plus vraiment négative! Dans le cas c) la borne + est au potentiel nul, elle n'est donc plus positive. Peu importe, on généralise alors en disant que:

*le champ  $\mathbf{E}$  est dirigé vers les potentiels décroissant.*

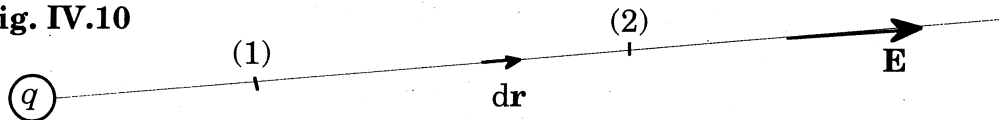
On n'est ainsi plus conditionné par le choix du point de référence.

**Potentiel d'une charge ponctuelle**

Ce qu'on va établir pour une charge ponctuelle sera aussi valable pour des points à l'extérieur d'un objet sphérique chargé de façon isotrope; on se souvient que le champ produit par un tel objet est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrique et portant la même charge (ch. III).

Le calcul du potentiel passe par celui de la tension et de sa définition:

Fig. IV.10



$$U_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 E dr \quad \text{car } \mathbf{E} \text{ et } d\mathbf{r} \text{ sont parallèles et de même sens } (q > 0)$$

La grandeur de  $\mathbf{E}$  est:  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \Rightarrow U_{1,2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dr}{r^2}$

$$\text{Intégrant: } U_{1,2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} \right)_1^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \left( -\frac{1}{r_1} \right) \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\text{Or, } U_{1,2} = V_1 - V_2, \text{ on écrit donc: } V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + c \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2} + c$$

où  $c$  est une constante arbitraire qui disparaît pour la différence  $V_1 - V_2$ .

Pour un point quelconque  $P$  à la distance  $r$  de  $q$ , le potentiel est ainsi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + c. \text{ Le choix du point de référence où } V = 0 \text{ va déterminer } c.$$

Pour une charge ponctuelle, le plus simple est de choisir le point à l'infini, là où le champ est nul, ce qui impose  $c = 0$ . Finalement:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{potentiel d'une charge ponctuelle}$$

### Remarques:

- 1) Le potentiel est une grandeur non vectorielle !
- 2) Le potentiel d'une charge a le signe de cette charge.
- 3) Lorsque le point de référence  $R$  où  $V = 0$  est mis à l'infini, l'expression générale de la tension entre deux points dans tout champ  $\mathbf{E}$  permet d'écrire une expression générale pour le potentiel en un point puisque  $V(P) = U_{P,R}$  :

$$V(P) = U_{P,R} = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{si le point de référence } R \text{ est à l'infini.}$$

Cela devrait rappeler la définition générale de l'énergie potentielle au moyen du travail de la force:

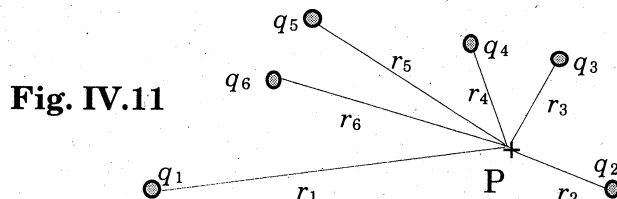
$$E_{\text{pot}}(P) = A_{P,R} = \int_P^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{si le point de référence } R \text{ est à l'infini.}$$

### Potentiel d'une distribution de charges

#### a) ponctuelles (distribution discrète)

Au chapitre II a été examiné le calcul du champ dû à une telle distribution. L'expression générale est facile à écrire, son calcul peut l'être beaucoup moins parce qu'il s'agit d'une somme de vecteurs et que la sommation doit se faire pour chaque composante. Avec le potentiel, le labeur est souvent bien moins grand puisque le potentiel est une grandeur scalaire. Le principe de superposition appliqué pour les champs devient une simple somme algébrique des potentiels.

Soient des charges ponctuelles  $q_i$  réparties et exprimons le potentiel qui existe en un point  $P$  dû aux champs de ces charges:



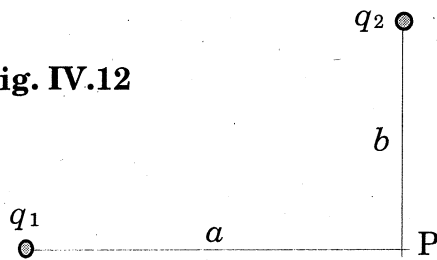
$$V(P) = \sum V_i(P) \quad \text{c'est-à-dire:}$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$

#### Exemple de calcul:

Trouver le potentiel en  $P$  dû à l'ensemble  $q_1$  et  $q_2$  (Fig. 12 p. suiv.):

Fig. IV.12



$V(P) = V_1(P) + V_2(P)$ , c'est-à-dire :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{b} \right)$$

**b) non ponctuelles (distribution continue)**

La charge  $q$  est ici répartie sur un objet trop gros pour pouvoir être considéré comme ponctuel. L'idée est donc de le décomposer en éléments ponctuels  $dq$  donnant chacun un élément de potentiel  $dV$  en un point P à la distance  $r$  de  $dq$ :

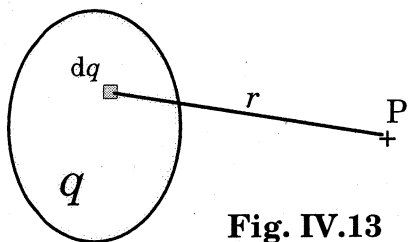


Fig. IV.13

$$dV(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} ; \quad V(P) = \int dV(P)$$

$$\Rightarrow V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

Signalons que pour un point P qui ne serait pas hors de l'objet portant  $q$  mais à l'intérieur ou en surface, il ne serait pas judicieux de placer à l'infini le point de référence où  $V = 0$ .

**Exemple de calcul:**

Un fil rectiligne est chargé uniformément. Trouver le potentiel qu'il crée à une distance  $a$  de l'une de ses extrémités.

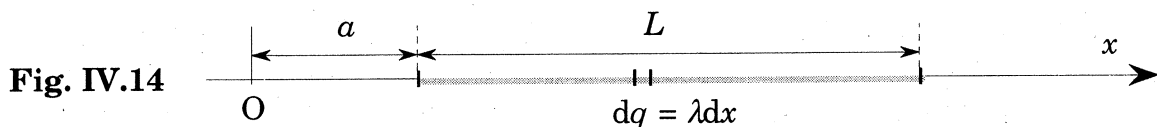


Fig. IV.14

On place tout naturellement un axe  $Ox$  le long du fil:

$$dq \text{ est à la distance } x \text{ de } O : dV(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x} \Rightarrow$$

$$V(O) = \int dV(O) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+L} \frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\ln(a+L) - \ln(a)] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)$$

tel est le résultat. Voyons deux cas limite:

1°) Si  $a \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow \infty$ .

2°) Si  $a \gg L \Rightarrow \ln(1 + L/a) \approx L/a$  et le potentiel de ce fil très éloigné de l'origine ressemble à celui d'une charge ponctuelle, comme il se doit.

**Potentiel et conducteurs**

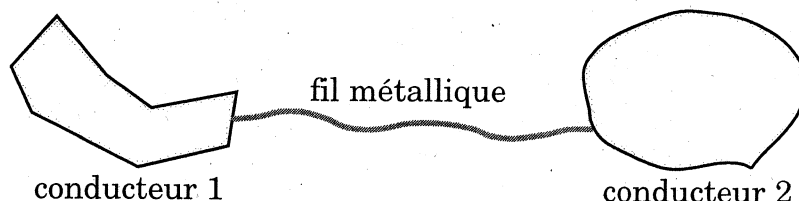
Au chapitre III, on a montré que les charges d'un conducteur sont à sa surface et produisent un champ  $\mathbf{E}$  qui est toujours *normal* à la surface du

conducteur. Du point de vue du potentiel, cela a des conséquences. En effet, la tension entre deux points quelconques d'un conducteur *en électrostatique* est toujours nulle, sinon, un courant de surface circulerait entre ces deux points. Par conséquent et par définition de la tension et du potentiel:

*Tous les points d'un conducteur quelconque sont au même potentiel.*

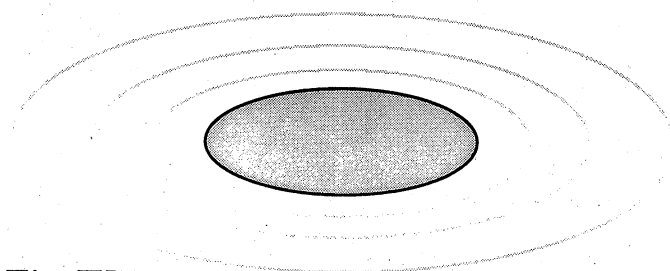
**Fig. IV.15**

$$\begin{aligned} V_{(\text{cond.1})} &= \\ V_{(\text{fil})} &= \\ V_{(\text{cond.2})} & \end{aligned}$$



Ainsi, la surface d'un conducteur en électrostatique est une *surface équipotentielle*.

Les lignes de champ, perpendiculaires au conducteur, donc à la surface équipotentielle qu'il constitue, continuent d'être normales à toutes les autres surfaces équipotentielles. Il y a là une très intéressante propriété mathématique entre surfaces et lignes orthogonales, mais qui dépasse le cadre de ce cours; un bref exemple est suggéré ci-dessous:



**Fig. IV.16**

Un conducteur en forme d'ellipsoïde est chargé. Les surfaces équipotentielles sont des ellipsoïdes aussi. On montrerait que les lignes de champ, qui sont en tous points orthogonales aux surfaces équipotentielles, sont des hyperboloïdes de mêmes foyers que les ellipsoïdes (non dessinés).

A part le plan uniformément chargé, l'exemple le moins compliqué est la sphère uniformément chargée: les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques et les lignes de champ sont des demi-droites ayant le centre des sphères comme point commun; elles sont donc toutes normales aux sphères.

## IV.6. Energie potentielle électrostatique

Une charge  $q$  dans un champ  $\mathbf{E}$  est soumise à la force de Coulomb  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . Si la charge se déplace dans le champ sous l'effet de cette force, son travail entre deux points est, par définition de  $U$  et de  $V$ :

$$A_{1,2} = qU_{1,2} = qV_1 - qV_2$$

D'autre part, la force de Coulomb est conservative, son travail peut s'exprimer comme une différence d'énergie potentielle:

$$A_{1,2} = W_1 - W_2$$

en utilisant désormais le symbole  $W$  pour l'énergie potentielle électrostatique plutôt que  $E_{\text{pot}}$  pour éviter les risques de confusion avec la grandeur du champ électrique  $E$ . Ces deux relations permettent d'écrire:

$$qV_1 - qV_2 = W_1 - W_2$$

Si le zéro du potentiel a été choisi au même point que le zéro de l'énergie

potentielle, ce qui est recommandé, alors, pour un point P quelconque dans le champ:

$$qV(P) = W(P)$$

**Interprétation:**  $W$  est l'énergie potentielle de la charge  $q$  à l'endroit où existe un potentiel  $V$ . Ce potentiel est celui d'un champ produit par d'autres charges, celles qui exercent une force sur  $q$ ; ce potentiel n'est pas celui de  $q$ , c'est celui dans lequel  $q$  se trouve.

**Exemple de calcul:**

Un noyau atomique de charge  $Q$  ( $Q = Ze$ ) est immobile; un proton (charge  $q = e$ ) s'approche du noyau sur une trajectoire rectiligne passant par  $Q$ . Lorsqu'il est à une distance  $r_1$  de  $Q$ , sa vitesse est  $v_1$ . A quelle distance  $r_2$  du noyau sa vitesse  $v_2$  sera-t-elle nulle?

**Solution:**

Le noyau exerce une force de répulsion sur le proton et le freine. L'énergie mécanique du proton est conservée car la force est conservative. Au champ  $\mathbf{E}$  du noyau est associé un potentiel  $V$  à une distance  $r$  de  $Q$ :  $V(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r$ . L'énergie potentielle du proton est donc  $W = qV = qQ/4\pi\epsilon_0 r$ . On a donc pour  $E_{\text{méc}} = \text{const}$ :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

d'où on extrait  $r_2$  en imposant que  $v_2 = 0$ . Cela donne:

$$r_2 = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{2\pi\epsilon_0 m v_1^2}{qQ} \right)^{-1}$$

Le problème serait moins simple si la direction du proton incident ne passait pas par le noyau, la trajectoire ne serait pas rectiligne mais hyperbolique. En effet, le problème serait très semblable à un problème de gravitation où une comète s'approcherait d'un astre, à la différence près que si l'astre attire la comète, le noyau repousse le proton. Comme en gravitation, la conservation du moment cinétique est nécessaire puisque la force de Coulomb est aussi une force centrale (dont le moment de force par rapport au centre de force est nul). La trajectoire du proton ne pourrait être ni parabolique ni elliptique (pourquoi?).

**Remarque:**

Le *signe* de l'énergie potentielle est important. La force de gravitation est toujours attractive et on se souvient que l'énergie potentielle de gravitation est toujours négative. En électrostatique, la situation est très semblable sauf que les deux signes sont possibles puisque le produit  $qQ$  dans  $W = qQ/4\pi\epsilon_0 r$  peut être positif ou négatif. Mais comme en gravitation,  $W < 0 \Leftrightarrow \text{attraction}$ , et  $W > 0 \Leftrightarrow \text{répulsion}$ . La différence est qu'en électrostatique l'attraction se produit lorsque les charges sont de signes différents alors qu'en gravitation, les masses ne peuvent qu'être du même signe.

**CH. IV : TENSION ET POTENTIELS**

**1.** Une surface métallique plane de grandes dimensions est uniformément chargée:  $\sigma = 5 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$ . Quelle doit être la distance minimale  $d$  entre deux points hors de la surface pour que la tension entre ces deux points due au champ de la plaque soit de 1000 V ?

**Rép:** 17,7 mm.

**2.** A quelle distance  $r$  d'une charge ponctuelle  $q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  la tension entre deux points radialement séparés de 1 mm est-elle de 1 V ?

**Rép:** 42,4 cm.

**3.** Un proton et une particule  $\alpha$  (noyau d'He) sont accélérés par une tension  $U$ . Ils ont tous deux la même vitesse initiale nulle. Calculer:

a) le rapport de leurs énergies cinétiques  $E_c(p)/E_c(\alpha)$ ;

b) le rapport de leurs vitesses:  $v(p)/v(\alpha)$ .

**Rép:** a) 1/2; b)  $\sqrt{2}$ .

**4.** Des  $e^-$  arrivent avec une vitesse initiale  $v_1 = 10^7 \text{ m/s}$  dans un champ électrique homogène produit par un condensateur-plan dont les plaques sont distantes de 10 mm et alimenté par une tension  $U = 500 \text{ V}$ . Le vecteur  $\mathbf{v}_1$  est de même sens que le champ. Quelle distance vont-ils parcourir dans le champ avant de revenir en arrière ?

**Rép:** 5,7 mm.

**5.** Quelle est la tension nécessaire à diminuer d'un facteur 2 la vitesse de protons de 100 keV ?

**Rép:** 75 kV.

**6.** Calculer l'énergie (en eV ou multiples) des particules suivantes, pour que leur vitesse soit de 10% de celle de la lumière (dans le vide):

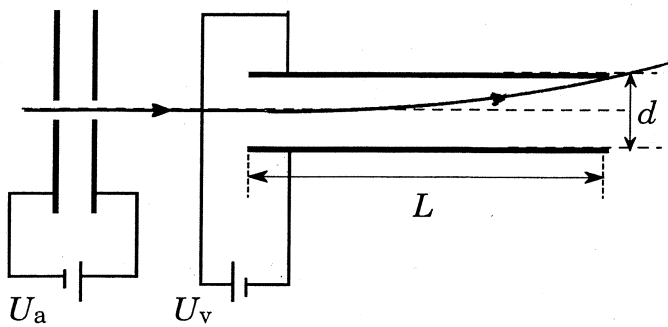
a)  $e^-$ ; b)  $p^+$ ; c)  $\alpha$ . Calculer la tension d'accélération correspondante.

**Rép:** a) 2,56 keV, 2,56 kV; b) 4,70 MeV, 4,70 MV; c) 18,7 MeV, 9,35 MV.

**7.** On veut obtenir des deutons de 2 MeV (noyaux de deutérium, isotope lourd de l'hydrogène:  $1p + 1n$ ). Quelle sera la tension nécessaire et quelle sera la vitesse acquise ?

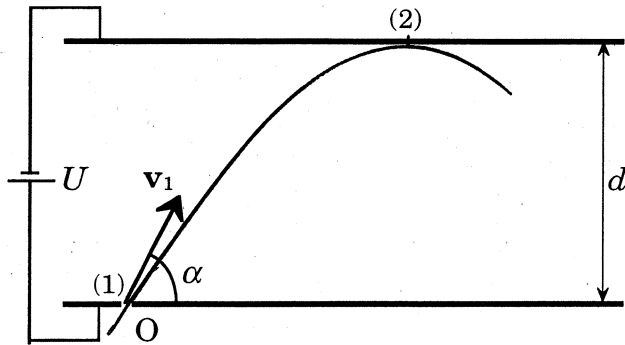
**Rép:** 2 MV;  $1,38 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ .





**8.** Oscilloscope: les  $e^-$ , de vitesse initiale négligeable, sont tout d'abord accélérés par une tension  $U_a = 5 \text{ kV}$  puis déviés par une tension  $U_v$ . Calculer quelle peut être la tension  $U_v$  maximale pour que les  $e^-$  puissent tout juste ressortir des plaques de déviation, sans heurter la plaque supérieure. On donne  $d = 3 \text{ mm}$  et  $L = 2 \text{ cm}$ .

**Rép:** 225 V.



**9.** Entre les deux plaques d'un condensateur-plan alimenté par une tension  $U$ , on envoie un faisceau d' $e^-$  par l'ouverture O comme indiqué.

Calculer, en fonction de  $m$ ,  $e$ ,  $v_1$ ,  $d$  et  $\alpha$ , le champ  $E^*$  qui permet aux  $e^-$  d'atteindre tout juste la plaque supérieure.

(Indication: utiliser judicieusement le théorème de l' $E_{\text{cin}}$ ).

**Rép**  $E^* = \frac{m v_1^2}{2ed} \sin^2 \alpha$

**10.** Soit une charge ponctuelle  $q$ . Sur l'une de ses lignes de champ on mesure une tension de 10 V entre deux points distants de 20 cm, le plus rapproché de la charge en étant à 40 cm. Calculer la valeur de cette charge.

**Rép:**  $1,33 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ .

**11.** A la distance  $r = 50 \text{ cm}$  du centre d'une sphère métallique chargée, on mesure un potentiel de 1000 V ( $V = 0$  à l'infini). On mesure d'autre part que le champ électrique à la surface de la sphère est de 3 kV/cm. Calculer la charge  $q$  et le rayon  $R$  de cette sphère.

**Rép:**  $q = 5,56 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  ;  $R = 4,08 \text{ cm}$ .

**12.** Un proton est envoyé exactement dans la direction d'un noyau d'uranium immobile. Lorsqu'il en est très éloigné ("à l'infini") sa vitesse est  $v_1 = 10^5 \text{ m/s}$ . Calculer la distance minimale d'approche.

**Rép:**  $2,54 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ .

**13.** Des particules  $\alpha$  de 3 MeV sont envoyées contre une cible constituée par une mince feuille d'or (expérience de Rutherford, 1911). Pour les rares  $\alpha$  qui sont déviés de  $180^\circ$  par des noyaux d'or, calculer leur distance minimale d'approche. (Pour ceux qui sont déviés de  $< 180^\circ$ , il faudrait faire intervenir la conservation du moment cinétique).

Rép:  $7,6 \cdot 10^{-14}$  m.

**14. Arc électrique:** le champ électrique maximum  $E^*$  qui peut exister dans l'air sec est de 8 kV/cm; pour  $E > E^*$ , l'air est brutalement ionisé et il y a production d'un éclair. ( $E^*$  est plus faible dans l'air humide, orages). Calculer:

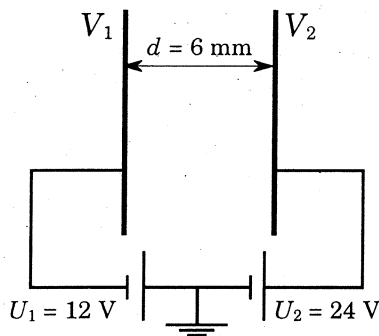
a) la densité superficielle de charge  $\sigma$  maximum que peut porter un conducteur dans l'air sec;

b) le potentiel max. ( $V = 0$  à l'infini) auquel on peut porter une sphère métallique chargée uniformément. On calculera pour des rayons  $R$  de 1 et 10 cm.

Rép: a)  $7,1 \cdot 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup>; b) 8 kV et 80 kV.

**15.** Soient deux gouttes de mercure de même rayon  $R$  et chargées à la même valeur  $q$ . Elles sont donc au même potentiel  $V$  ( $V = 0$  à l'infini). Quel sera le potentiel  $V'$  de la goutte sphérique formée par la réunion des deux gouttes?

Rép:  $V' = 2^{2/3}V$



**16.** Condensateur-plan alimenté par deux batteries en série:

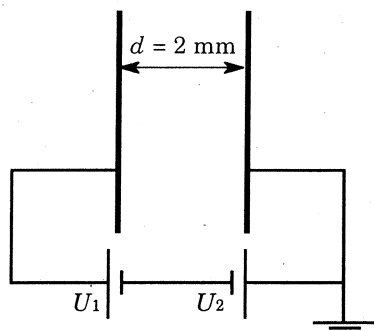
a) Quel est le potentiel de chaque plaque?

b) Quelle est la tension  $U$  (en val. abs.) entre les plaques?

d) A quelle distance  $d'$  de la plaque de gauche le potentiel est-il nul?

c) Comment est orienté le champ?

Rép: a)  $V_1 = -12$  V,  $V_2 = 24$  V; b)  $U = 36$  V; d)  $d' = 2$  mm.



**17.** Des électrons placés sur la plaque de gauche vont être accélérés par le champ électrique homogène entre les plaques qui est de 4 kV/m. La batterie de droite fournit une tension  $U_2 = 20$  V. Quelle est la tension  $U_1$  donnée par celle de gauche?

Rép: 12 V.

## CONDENSATEURS ET CAPACITE

### V.1. Définitions

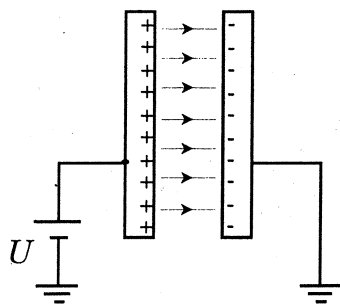
Le condensateur est déjà apparu dans ce cours lorsqu'on avait besoin d'un champ homogène; les armatures dans ce cas doivent être planes et peu écartées l'une de l'autre; c'est le *condensateur-plan*, mais c'est de loin pas le seul type. Le but du chapitre est de définir et exploiter les caractéristiques des condensateurs.

De façon générale, un condensateur est constitué de deux surfaces conductrices isolées l'une de l'autre par un diélectrique de faible épaisseur. L'isolant peut être le vide (rarement) ou l'air, mais le plus souvent il s'agit de matériaux plastiques, de mica, de la céramique, etc.

Le rôle d'un condensateur dans un circuit est d'accumuler temporairement des charges pour les déverser, tout ou partiellement, dans une autre portion du circuit; son usage est très vaste en électricité et en électronique; on l'utilise très souvent comme *filtre* lorsqu'il s'agit de purifier un signal électrique, ou pour sélectionner une bande de fréquence acoustique. Lorsqu'on règle les basses et les aiguës sur un ampli hifi, on agit sur des filtres passe-haut et passe-bas, qui ne sont rien de plus que des condensateurs associés à des résistances.

Un condensateur est dit *chargé* lorsque l'une de ses armatures porte une charge  $+Q$  et l'autre une charge  $-Q$ , égale en valeur absolue. Donc en fait, la charge *totale* d'un condensateur, chargé ou non, est toujours nulle !

Pour *charger* un condensateur, le plus simple est de relier ses armatures à une source de tension. Comme un métal est équipotentiel en électrostatique, chaque armature sera au même potentiel que la borne de la source à laquelle elle est reliée et la tension entre les armatures sera celle donnée par la source. Un montage possible est celui-ci:



**Fig. V.1.**

Les charges positives apparaissant sur l'armature reliée à la borne positive de la source vont charger négativement l'autre armature par influence: les électrons libres du métal vont être attirés par les charges positives, en étant "pompées" de la terre, réservoir inépuisable d'électrons.

Seules les faces *intérieures* sont chargées.

On appelle *capacité* d'un condensateur tout simplement sa "capacité" à contenir des charges. Comme pour un récipient, la capacité dépend de la forme géométrique, mais pour le condensateur, ce n'est pas vraiment le volume qui intervient, comme on le verra; et comme pour un récipient, la capacité d'un condensateur est toujours *définie positive*.

Naturellement, la charge d'un condensateur dépend de la tension existant entre ses armatures; il n'est pas difficile de montrer qu'il y a simple proportionnalité entre charge et tension: d'une part, un champ  $\mathbf{E}$  est toujours proportionnel à la charge  $Q$  qui le crée:  $E \propto Q$ ; d'autre part, une tension, par définition, dépend linéairement du champ existant;  $U \propto E$ ; par conséquent:  $Q \propto U$  où le facteur de proportionnalité est précisément la capacité  $C$ , puisqu'il doit apparaître les dimensions du condensateur.

On obtient ainsi la relation, facile à mémoriser (!):

$$Q = CU$$

ce qu'on peut écrire aussi:  $C = Q/U$ , ce qui permet de dire que la capacité est la charge par unité de tension, ou le nombre de coulomb que peut contenir le condensateur pour chaque volt de tension entre ses armatures.

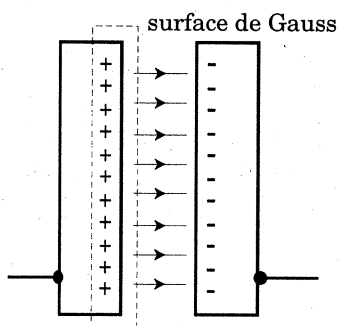
### Unité de capacité:

De la relation ci-dessus, on tire  $[C] = C/V = F$ , le farad (en l'honneur de Michael Faraday). Comme le coulomb, le farad est une très grosse unité et dans la pratique, ce sont les sous-multiples qui sont utilisés:

$$(1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F}); 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}; 1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}; 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}.$$

## V.2. Le condensateur-plan

Le but est de trouver une expression de la capacité d'un tel condensateur en fonction de ses dimensions.



**Fig. V.2.**

Les deux armatures sont planes, de même aire  $S$ , parallèles et en regard; leur espacement  $d$  est faible de façon à ce que le champ soit homogène.

Choisissons une surface de Gauss qui enferme complètement la charge portée par l'armature positive.

L'application de la loi de Gauss donne:

$$\Psi_o = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_o}. \quad \mathbf{E} \text{ est homogène et n'existe que sur les faces intérieures}$$

$$\Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E dS = ES; \text{ d'autre part, grâce à l'homogénéité: } E = \frac{U}{d}$$

$$\text{donc } \frac{Q}{\epsilon_o} = \frac{US}{d}; \text{ mais: } C = \frac{Q}{U}; \text{ on en tire l'expression de } C:$$

$$C = \frac{\epsilon_o S}{d} \quad \text{capacité d'un condensateur-plan}$$

La capacité est d'autant plus grande que les plaques sont grandes, ce qui est "logique", mais aussi d'autant plus qu'elles sont rapprochées, ce qui l'est peut-être moins; pourtant, c'est bien lorsque que le champ sera le plus élevé ( $d$  faible pour  $U$  fixé) que les charges apparaîtront nombreuses.

### Exemple numérique:

Calculons la capacité du condensateur de démonstration pour lequel  $S = \pi R^2$  avec  $2R = 26 \text{ cm}$ ; on règle  $d$  à  $1 \text{ mm}$ . On trouve alors  $C \approx 0,47 \text{ nF}$ . On doit constater cette très faible valeur au vu du volume considérable occupé par l'instrument; on serait en droit de s'étonner de trouver dans des circuits électroniques des condensateurs dont la capacité est  $10^6$  fois plus élevée et dont le volume total est de l'ordre du  $\text{cm}^3$ . Il y a là derrière des prouesses de technologie qui réussit à fabriquer des alternances (sandwich) conducteur-diélectrique extrêmement minces. Le matériau diélectrique intervient aussi dans la valeur de la capacité, ce qu'on n'avait pas encore mentionné:

l'expression ci-dessus  $C = \epsilon_0 S / d$  n'est valable que pour un condensateur où le diélectrique serait le vide, ou l'air. On en reparlera (§ V.6).

### V.3. Groupements de condensateurs

Imaginez-vous être l'électronicien devant monter le circuit que vous avez calculé. Vous fouillez dans votre tiroir à condensateurs et, évidemment, il n'y a justement pas celui que vous cherchez. Quoi donc alors y faire? Réponse: il suffit de savoir comment grouper des condensateurs en nombre et en valeurs diverses pour obtenir la valeur cherchée.

Il y a deux et seulement deux façons de grouper des éléments de circuit, tels des condensateurs. Toute autre combinaison peut se ramener à ces deux façons.

#### a) Groupement en série (ou en chaîne).

Le but est de trouver l'expression de la capacité équivalente  $C_{\text{éq}}$  à un ensemble de  $n$  condensateurs de capacités  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mis en série:

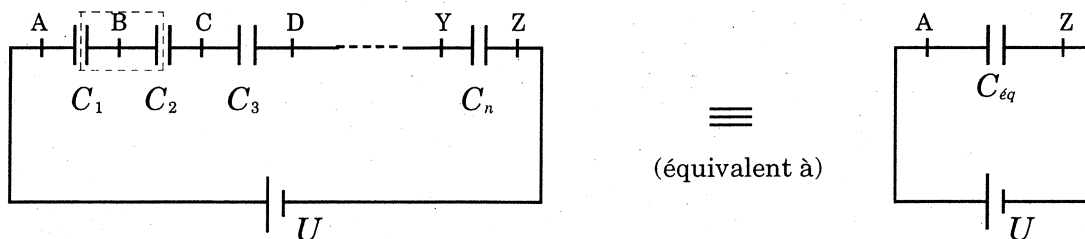


Fig. V.3. Groupement en série.

Il faut tout d'abord utiliser le fait que la tension est une grandeur additive:

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + \dots + U_{YZ} = U_{AZ} = U \quad (*) \quad \text{tension de la source}$$

et ensuite utiliser le fait, moins évident, que *tous les condensateurs, quels qu'ils soient, portent tous la même charge, parce qu'ils sont en série*. Pour le comprendre, il faut regarder la portion de circuit en "H" entourée par un pointillé: elle englobe l'armature de droite de  $C_1$ , la connexion à  $C_2$  et l'armature de gauche de  $C_2$ . Tout cela est métallique et ne forme qu'un seul conducteur; lorsque le circuit n'est pas branché sur la source, aucune charge ne se trouve sur ce H. Etant complètement isolé du reste du circuit par les isolants de  $C_1$  et de  $C_2$ , il ne peut que rester globalement neutre lorsque le circuit est branché sur la source. Par conséquent, les deux armatures du H portent des charges égales et opposées; comme elles appartiennent à des condensateurs différents, on en conclut que les deux condensateurs sont chargés à la même valeur. On peut poursuivre le raisonnement pour les autres condensateurs de la série et aboutir à l'affirmation en italique au début de ce §.

$$\text{Ainsi donc: } Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n = Q \quad (**)$$

Ecrivons chaque tension de (\*) sous la forme  $U_{KL} = Q/C_i$ , c-à-d:

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_n} = \frac{Q}{C_{\text{éq}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_{\text{éq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

#### Remarques:

1) La capacité équivalente à plusieurs mises en série est plus petite que la plus petite du lot. C'est de l'arithmétique:  $c < a$  et  $< b$  si  $1/c = 1/a + 1/b$ .

2) La tension de la source est partagée entre les divers condensateurs, elle est

d'autant plus élevée que la capacité est faible.

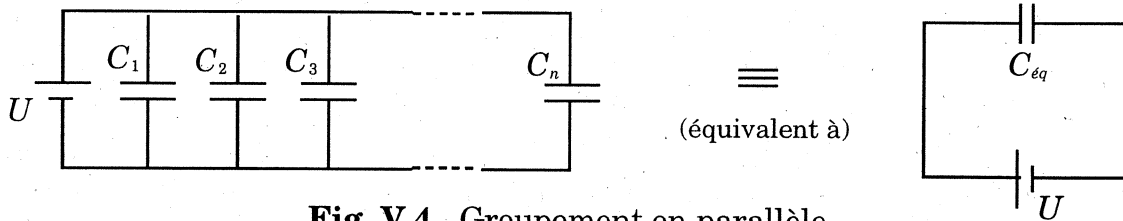
3) Pour deux (et seulement deux) condensateurs en série on peut utiliser une formule parfois plus maniable:

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{\text{éq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{le produit divisé par la somme.}$$

### b) Groupement en parallèle

Le but est de trouver l'expression de la capacité équivalente  $C_{\text{éq}}$  à un ensemble de  $n$  condensateurs de capacités  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mis en parallèle.

Des éléments de circuit mis en parallèle ont *tous la même tension à leurs bornes*, c'est une *définition* de ce genre de groupement.



**Fig. V.4.** Groupement en parallèle.

On utilise ici le fait que la charge totale est la somme des charges de chaque condensateur:  $Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = Q$ . (\*)

D'autre part, dans un groupement en parallèle:  $U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U$ .

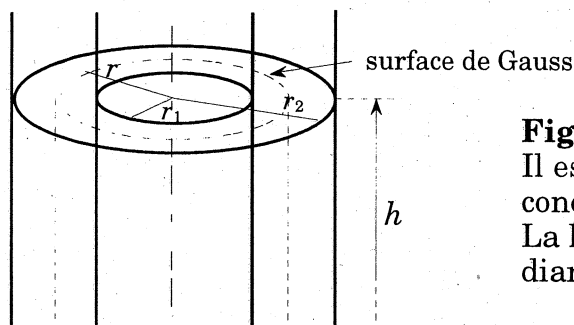
La relation (\*) devient, au moyen de  $Q = CU$ :

$$C_{\text{éq}} U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 + \dots + C_n U_n = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n) U ; \text{c-à-d:}$$

$$C_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^n C_i$$

## V.4. Le condensateur cylindrique

Un exemple concret est le *câble coaxial*, servant à transporter des hautes fréquences ou des hautes tensions; le conducteur intérieur est protégé des perturbations électromagnétiques par le conducteur extérieur, qu'on nomme souvent *blindage*.



**Fig. V.5.** Condensateur cylindrique: Il est fait de deux tubes métalliques et concentriques. La hauteur  $h$  est très supérieure au diamètre.

Dans le but de trouver l'expression de la capacité d'un tel condensateur, c'est encore la loi de Gauss qui se montre efficace pour ce genre de calcul. Puisque  $C = Q/U$ , il faut calculer  $U$ , et pour cela, d'abord calculer  $E$ , la grandeur du champ dans l'espace entre les deux tubes. Comme surface de Gauss, on choisit naturellement un tube coaxial aux deux conducteurs. Le calcul de ce type de champ a déjà été fait: il s'agissait (ch. III) de trouver le champ au voisinage d'un fil uniformément chargé. Ici, la symétrie est la même, elle est axiale (ou cylindrique), le champ a donc la même allure; on refait pourtant ce calcul:

$$\Psi_0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E dS = E \oint dS = E 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r h}$$

Ayant le champ, on peut alors calculer la tension  $U_{1,2}$  entre les armatures, le vecteur  $d\mathbf{r}$  est le long du rayon  $r$  entre de  $r_1$  à  $r_2$ ; si c'est l'armature intérieure qui est chargée positivement,  $d\mathbf{r}$  est parallèle et de même sens que  $\mathbf{E}$ :

$$U_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Puisque  $U = Q/C$ , la capacité est le facteur de  $1/Q$  dans l'expression de  $U_{1,2}$ :

$$\text{donc finalement: } C = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Comme on le voit, il n'y a que des variables géométriques.

#### Approximation:

On rencontre souvent le cas où le diélectrique entre les armatures est très mince, ce qui augmente la capacité; les rayons  $r_1$  et  $r_2$  sont ainsi très voisins:  $r_2 = r_1 + \Delta r$  avec  $\Delta r \ll r_1$  et  $r_2$ . On connaît l'approximation  $\ln(1+x) \approx x$  si  $x \ll 1$ . On l'applique ici:

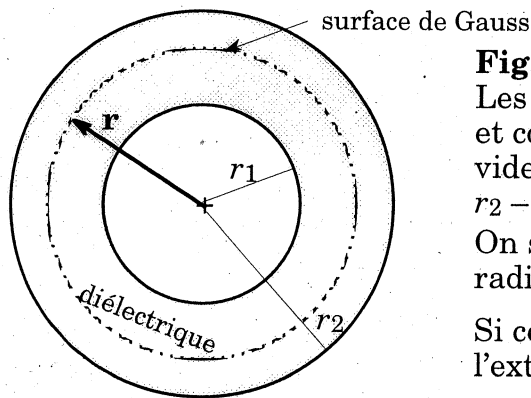
$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \frac{r_1 + \Delta r}{r_1} = \ln \left(1 + \frac{\Delta r}{r_1}\right) \approx \frac{\Delta r}{r_1}; \quad (r_1 \approx r_2 \approx r \text{ au dénominateur})$$

$\Delta r$  est en fait l'épaisseur du diélectrique, on la nomme  $d$ ; l'expression de  $C$  devient:

$$C \approx \frac{2\pi r h \epsilon_0}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{où } S \text{ est la surface latérale du cylindre}$$

ce qui n'est autre que l'expression de la capacité d'un condensateur-plan. Ainsi, le condensateur cylindrique peut être considéré comme un condensateur-plan "enroulé" à condition que l'espacement des armatures soit très faible.

## V.5. Le condensateur sphérique



**Fig. V.6.**

Les armatures sont deux sphères conductrices et concentriques. L'espace entre les sphères est vide ou contient un diélectrique d'épaisseur  $d = r_2 - r_1$ .

On sait que le champ entre les armatures est radial, comme celui d'une charge ponctuelle.

Si ce condensateur chargé, le champ est-il nul à l'extérieur du condensateur?

La surface de Gauss est une sphère concentrique de rayon  $r_1 \leq r \leq r_2$ . Le calcul du flux donne l'expression du champ pour une telle symétrie:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \quad \text{où } \mathbf{r} \text{ est parallèle à } \mathbf{E}.$$

La tension entre les armatures se calcule en appliquant sa définition:

$$U_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Sachant que, comme d'habitude,  $U = Q/C$ , on extrait l'expression de  $C$ :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad \text{condensateur sphérique}$$

#### Approximation:

Dans le cas où l'espacement entre les armatures est faible:  $d = r_2 - r_1 \ll r_1$  ou  $r_2$ , on remplace le produit  $r_1 r_2$  par  $r^2$  et leur différence par  $d$ ; il vient  $4\pi r^2$  au numérateur, ce qui est l'aire  $S$  de la sphère. Comme on l'a montré pour le condensateur cylindrique, on retrouve aussi l'expression correspondant à la capacité d'un condensateur-plan:

$$C \approx \frac{4\pi r^2 \epsilon_0}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{valable si } d \ll r.$$

#### Capacité d'une sphère seule

Il s'agit d'une autre approximation: si le rayon de la sphère extérieure devient grand, à la limite, tend vers l'infini, on n'a plus de condensateur proprement dit, mais uniquement l'armature intérieure qui est une sphère conductrice seule. Voyons qu'elle possède toujours une capacité. Dans l'expression de  $C$ , on fait donc tendre  $r_2$  vers l'infini:

$$C_s = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 4\pi\epsilon_0 r_1$$

Ainsi, la capacité d'une sphère de rayon  $r$  est simplement  $C_s = 4\pi\epsilon_0 r$ , et est donc proportionnelle à son rayon.

#### Exemples numériques:

a) Capacité de la Terre, sphère non métallique mais conductrice tout de même, de



rayon  $R_t = 6370$  km. On trouve que sa capacité est d'environ  $700 \mu\text{F}$ , ce qui est souvent bien plus faible que la capacité d'un condensateur électrolytique, tel qu'on en trouve dans certains types de circuits (redressement et lissage de tensions).

b) Capacité de la sphère d'un générateur van de Graaf de démonstration. Elle est métallique et de rayon  $R = 6$  cm. On calcule que sa capacité est alors de  $6,7 \text{ pF}$ , ce qui est vraiment très faible; mais si elle est chargée pour atteindre un potentiel  $V$  de  $30$  kV, valeur mesurable, la charge qu'elle porte se calcule par  $Q = CV$  et on obtient  $Q = 0,2 \mu\text{C}$ , ce qui est déjà une charge importante. Néanmoins, cet exemple permet de voir la petitesse des charges apparaissant en électrostatique.

### Effet de pointe

Sur un conducteur chargé et de forme irrégulière, la charge ne se répartit pas du tout uniformément sur sa surface. On va montrer que la densité de charge superficielle  $\sigma$  est d'autant plus grande que la courbure est marquée. C'est l'*effet de pointe*, qui explique, entre autre, le principe du paratonnerre.

Soit donc un conducteur comme ci-dessous; il est chargé parce qu'il est connecté à une source de tension qui le porte à un potentiel  $V$ . Pour que le calcul soit simple mais pourtant correct, on schématise ce conducteur par deux sphères reliées par un fil métallique. Le tout étant conducteur, la surface est équipotentielle à la valeur  $V$  de la source.

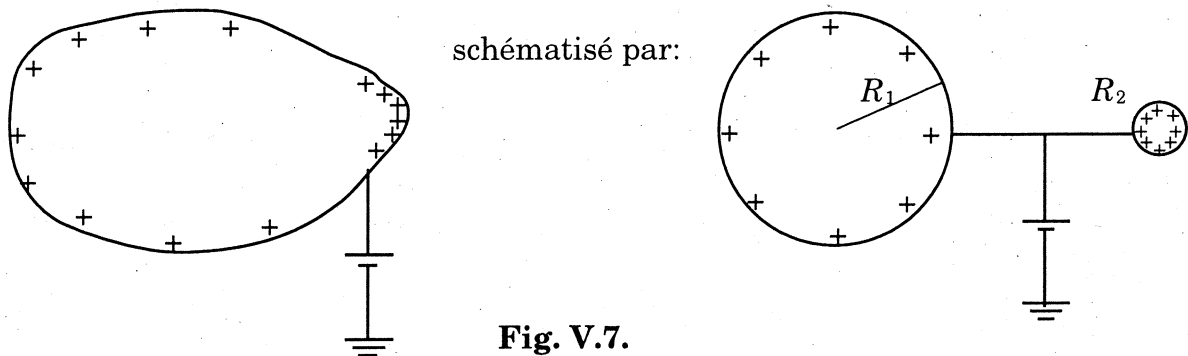


Fig. V.7.

\* On considère que chacune des deux sphères du modèle est assez éloignée de l'autre pour pouvoir écrire sa capacité comme celle d'une sphère seule:

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \quad \text{et} \quad C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2$$

\* La charge de chaque sphère s'exprime au moyen de la densité de charge  $\sigma$ :

$$Q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2 \quad \text{et} \quad Q_2 = \sigma_2 4\pi R_2^2$$

\* Le potentiel est le même sur les deux sphères:  $V = Q_1/C_1 = Q_2/C_2$

Remplaçant les  $Q$  et  $C$  dans cette dernière relation, on aboutit à:

$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$ , ou:  $\sigma R = \text{const}$  ou encore:  $\sigma/k = \text{const}$  sur tout le conducteur; cela montre que la densité de charge est proportionnelle à la courbure  $k$  de la surface (on définit une courbure par  $k = 1/R$ ).

Au chapitre III on a montré que le champ électrique très près de la surface d'un conducteur est simplement:  $E = \sigma/\epsilon_0$ ; la relation pour  $\sigma$  ci-dessus devient:

$$ER = \text{const},$$

ce qui explique pourquoi les étincelles se produisent le plus souvent sur les objets pointus; il faut en effet que  $R$  soit le plus grand possible pour que  $E$  soit le plus faible. La foudre par exemple, qui est une brutale ionisation de l'air par un très fort champ électrique, est plus attirée par un corps pointu. Les charges du nuage attirent les charges du paratonnerre, créant ainsi entre ciel et terre des champs électriques pouvant atteindre plusieurs centaines de kV/m.

## V.6. Condensateur avec diélectrique

Pour tout ce qui a précédé dans ce chapitre, il a été tacitement supposé que l'espace entre les armatures des condensateurs était le vide, c'est-à-dire de n'avoir pas d'autre propriété que celle d'être un parfait isolant. Or, dans la pratique, c'est une substance matérielle qui remplit cet espace. Pour les condensateurs du commerce, c'est un diélectrique solide comme du papier, du mica, de la céramique ou des matériaux synthétiques divers. Comme on va le montrer, les propriétés électriques de ces substances interviennent pour modifier la capacité du condensateur qui les enferme.

### Expérience:

Entre les armatures du condensateur de démonstration, on glisse une plaque de verre et on charge le condensateur. On le débranche ensuite de la source de tension mais si l'isolation est bonne, il reste chargé. On mesure la tension entre les armatures au moyen d'un voltmètre électrostatique. Puis on retire la plaque de verre; on observe alors sur le voltmètre que la tension *augmente* fortement.

Si la charge portée par les armatures est restée la même après avoir ôté la plaque de verre et que la tension a par contre augmenté, cela signifie que la capacité du condensateur a diminué; en effet:  $Q = C_1 U_1 = C_2 U_2$  et si  $U_2 > U_1$  alors  $C_2 < C_1$ . Cela revient à dire que la présence du verre *multiplie la capacité* par un certain facteur, caractéristique de la matière. Restons dans le cas où le diélectrique remplit complètement le volume entre les armatures; dans cette situation, on écrit:

$$C(\text{avec diélectrique}) = \epsilon_r C(\text{vide})$$

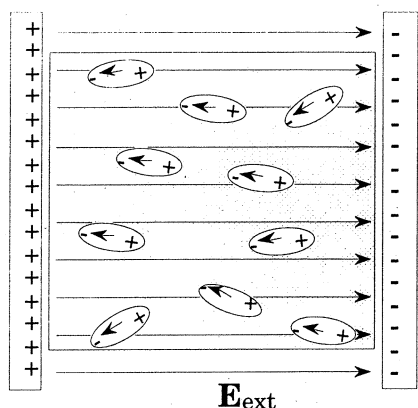
où  $\epsilon_r$  est la *constante diélectrique* de la substance, caractéristique de ses propriétés électrostatique, au même titre que l'indice de réfraction  $n$  est la caractéristique des propriétés optiques d'une substance ou la chaleur massique  $c$  l'est des propriétés thermiques. On trouve des valeurs de  $\epsilon_r$  dans le *Formulaire*, ainsi pour le vide  $\epsilon_r = 1$ , rigoureusement, à peine plus pour l'air:  $\epsilon_r = 1,0006$ ; pour la plupart des corps isolants,  $\epsilon_r$  dépasse rarement 6 ou 7. L'eau est encore une fois exceptionnelle avec la valeur de 81. On ne l'utilise pourtant pratiquement jamais comme diélectrique dans des condensateurs parce qu'il est trop difficile de l'obtenir à la pureté nécessaire et qu'un diélectrique liquide n'est que rarement adéquat. Cette particularité de l'eau tient à sa structure moléculaire. On sait en effet que la molécule d'eau est un dipôle permanent et s'oriente ainsi préférentiellement dans la direction d'un champ appliqué.

L'appellation officielle de la constante diélectrique  $\epsilon_r$  est: *permittivité relative*, et le fameux  $\epsilon_0$  est alors la *permittivité du vide*. Notons que pour cette dernière, on rencontre parfois l'appellation (malheureuse) de *constante d'influence*. La *permittivité absolue* est  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , ce qui explique le qualificatif de *relatif*:  $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ .

### Aspect microscopique

La physique devient toujours très compliquée quand elle tente de comprendre la structure et le comportement de la *matière* parce qu'elle doit l'examiner dans son intimité atomique et moléculaire, ce qui met en jeu les multiples interactions entre les particules en nombre gigantesque. Essayons pourtant, tout en restant simple.

Les substances diélectriques peuvent se diviser en deux grandes catégories: celles dont les molécules sont des dipôles permanents, telle  $H_2O$ , et celle dont les molécules ne sont pas polaires mais le deviennent sous l'effet d'un champ électriques; elles acquièrent une polarisation dite *induite*. Cette dernière catégorie est bien plus peuplée que la première: il existe beaucoup plus de substances à molécules non polaires que de substances à molécules polaires.



**Fig. V.8.**

Matière diélectrique placée entre les plaques d'un condensateur-plan pour y subir un champ électrique  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ . Ce champ polarise et oriente les molécules de la substance, provoquant ainsi un champ interne  $\mathbf{E}_{\text{int}}$  qui est de sens opposé à  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  et diminue ainsi le champ global. Ce champ  $\mathbf{E}_{\text{int}}$  est la résultante de tous les micro-champ dûs à chaque dipôle induit.

La polarisation induite s'explique ainsi: un atome (ou une molécule) placé dans un champ électrique se déforme un peu: les électrons sont tirés dans un sens et le noyau est poussé dans l'autre. Il en résulte une polarisation de l'atome puisqu'il y a plus de charges négatives à un bout qu'à l'autre. Cette molécule (ou cet atome) devenue dipôle induit par le champ, crée à son tour un nouveau champ qui est de sens opposé au champ qui l'a créé, comme on peut le voir sur la figure V.8. Les dipôles ne sont pas parfaitement alignés dans la direction du champ à cause de l'agitation thermique qui tend à désorganiser cet arrangement, ce qui fait que la polarisation dépend de la température, mais on ne s'en inquiétera pas ici.

Soit  $\mathbf{E}'$  le champ moléculaire induit et  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  le champ appliqué par le condensateur, le champ total induit sera la résultante sur toutes les molécules:  $\mathbf{E}_{\text{int}} = \sum \mathbf{E}'$ , il est de sens opposé à  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ : le champ résultant global  $\mathbf{E}$  sera alors de même sens que  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  mais plus faible en grandeur:

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{int}} \Rightarrow E = E_{\text{ext}} - E_{\text{int}} \Rightarrow E < E_{\text{ext}}$ . La tension entre les plaques du condensateur (distances de  $d$ ) s'en trouve plus faible aussi lorsqu'il contient le diélectrique:

$$U(\text{avec diél.}) = Ed < U(\text{vide}) = E_{\text{ext}} d, \text{ ce qu'on peut écrire, avec } \epsilon_r \geq 1:$$

$U(\text{vide}) = \epsilon_r U(\text{avec diél.})$ , sans oublier que l'expérience s'est faite avec le condensateur chargé mais débranché de la source, c-à-d à charge constante. Ceci achève la démonstration.

## V.7. Energie d'un condensateur

On sait maintenant comment s'y prendre pour charger un condensateur: on connecte ses armatures aux bornes d'une source de tension, ou bien on dépose des charges sur ses armatures au moyen d'une baguette de matière isolante frottée. Pour introduire l'idée d'énergie associée à un condensateur, on va procéder autrement, au moins en théorie, car en pratique, cela serait plutôt malcommode.

Soit donc un condensateur initialement déchargé: ses deux armatures métalliques sont neutres. Prélevons un électron de l'armature de gauche et allons le déposer sur celle de droite; le condensateur est désormais chargé, bien que sa charge *totale* soit toujours nulle. Pour faire ce transport, il a fallu agir avec une force sur l'électron qui laissait derrière lui un métal devenu alors positif et qui donc l'attirait. Cette force a effectué un travail en se déplaçant d'une armature à l'autre. Or ce travail fait a donné naissance à une *tension* entre les armatures. Poursuivons ce transfert avec un deuxième électron pris sur la plaque de gauche. Pour l'en extraire, l'effort est déjà plus grand que pour le premier puisque d'une part la plaque qu'il quitte est plus positive qu'avant et celle vers laquelle on le traîne est maintenant négative.

Pour examiner ce problème, considérons qu'on transfère des éléments de charge  $dQ$  et que cela nécessite chaque fois un petit travail  $dA = U dQ$ , où la tension  $U$

$dQ$  et que cela nécessite chaque fois un petit travail  $dA = U dQ$ , où la tension  $U$  apparaissant ainsi entre les armatures augmente un peu lors de chaque transfert. (La notation "dA" n'est pas correcte, mais tant pis). On sait bien que cette tension dépend de la charge accumulée:  $U = Q/C$ , où  $Q$  est la charge résultant de l'accumulation des  $dQ$ , et  $C$  est évidemment la capacité du condensateur, ne dépendant que de sa géométrie.

Le travail total effectué pour charger le condensateur jusqu'à la valeur  $Q$  est donc:

$$A = \int_0^Q U dQ = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{C} \int_0^Q Q dQ = \frac{1}{C} \left( \frac{Q^2}{2} \right)_0^Q = \frac{Q^2}{2C}$$

La difficulté évoquée pour charger de plus en plus le condensateur par transferts successifs apparaît ici par l'allure *quadratique* en  $Q$  de  $A$ .

Ce travail, produit par un agent extérieur, a donné de l'énergie au condensateur, il est désormais chargé et donc susceptible de se décharger au travers d'un conducteur qui relierait ses armatures; cette décharge constituerait un courant électrique qui pourrait par exemple allumer une ampoule si le conducteur en était le filament. Cette énergie que contient le condensateur est donc à l'état potentiel, mais capable de se manifester par exemple sous forme d'énergie cinétique des électrons du courant de décharge puis en énergie lumineuse et thermique dans le filament de l'ampoule. Cette énergie  $W_E$  est tout naturellement nommée *énergie potentielle* du condensateur:

$$W_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2 \quad \text{énergie d'un condensateur}$$

(on a simplement remplacé  $Q = CU$  pour obtenir la dernière égalité).

### Densité d'énergie

Elle se définit comme une densité, en l'occurrence comme de l'énergie par unité de volume, le volume étant celui compris entre les armatures, donc celui où il y a le champ électrique. On note  $w_E$  le symbole pour cette densité d'énergie. Si le champ est homogène (condensateur-plan):

$$w_E = \frac{W_E}{V}$$

mais si le champ n'est pas homogène, il faut décomposer le volume  $V$  en éléments  $dV$  dans chacun desquels il y a une énergie élémentaire  $dW_E$ ; la densité d'énergie s'exprime alors par:

$$w_E = \frac{dW_E}{dV} \Rightarrow dW_E = w_E dV$$

l'énergie totale dans le volume  $V$  est la somme des  $dW_E$ :

$$W_E = \int dW_E = \int w_E dV \quad \text{on en verra un exemple d'application,}$$

mais tout d'abord, il faut établir l'expression générale de cette densité d'énergie. Pour cela on choisit, paradoxalement, le cas particulier du condensateur-plan parce que la démarche est simple et que le résultat ne souffre pas d'hypothèses relatives au type de condensateur.

Soit donc un condensateur-plan; son énergie, sa tension, sa capacité et le volume entre les plaques sont respectivement:

$$W_E = \frac{1}{2} C U^2, \quad U = E d, \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{et} \quad V = S d$$

pour obtenir la densité d'énergie  $w_E$ , on y remplace tout cela:

$$w_E = \frac{W_E}{V} = \frac{\frac{1}{2} C U^2}{S d} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} E^2 d^2}{S d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Cette expression est tout à fait remarquable en ce sens qu'elle ne contient aucune caractéristiques du condensateur, elle ne fait intervenir que le champ électrique.

En fait, ce qu'on vient d'établir par le biais du condensateur-plan n'est autre que l'expression générale de la *densité d'énergie du champ* électrique, dans un condensateur quelconque ou même sans condensateur, pourvu qu'il y ait du champ. Cette formule est aussi valable pour les ondes électromagnétiques et l'énergie qu'elles transportent, mais c'est au delà de nos objectifs.

Au § V.6. qui précède celui-ci, on a traité la situation d'un champ dans un condensateur rempli de diélectrique de constante  $\epsilon_r$ , et dans ce paragraphe, on n'en parle plus ! Disons simplement que si l'espace où il y a du champ électrique n'est pas le vide mais un diélectrique de constante  $\epsilon_r$ , alors la densité d'énergie prend la forme:

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \quad \text{densité d'énergie du champ électrique}$$

### Exemple d'application:

Calculons l'énergie  $W_E$  contenue dans un condensateur sphérique chargé:

$$W_E = \int w_E dV \quad \text{avec} \quad w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{et} \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

où on admet que le diélectrique est le vide. Remplaçant  $E^2$  puis  $w_E$  dans l'intégrale:

$$E^2 = \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}, \quad w_E = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \Rightarrow W_E = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{1}{r^4} dV$$

La question est maintenant d'exprimer l'élément de volume  $dV$  pour y faire apparaître la variable  $r$ . La symétrie sphérique du problème incite, et même impose, un élément  $dV$  qui soit une couche sphérique, genre pelure, d'épaisseur archi-mince  $dr$  et de rayon  $r$  variant entre  $r_1$  et  $r_2$ . Le volume de cette pelure est alors:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

L'intégrale pour  $W_E$  s'écrit cette fois avec ses bornes:

$$W_E = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

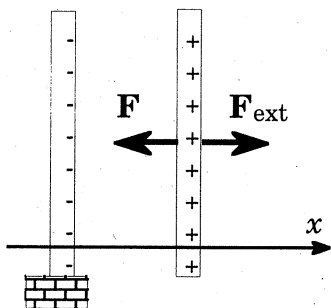
On peut se priver du plaisir de calculer cette intégrale si on se souvient qu'on a établi il y a peu l'expression de  $W_E$  faisant apparaître la capacité:

$$W_E = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{où} \quad C = \frac{4\pi \epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{condensateur sphérique})$$

remplaçant  $C$  dans  $W_E$ , on arrive à la même expression que par intégration, ce qui est un moyen de contrôle de la façon de traiter ce genre de problème: la méthode paraît correcte pour un problème dont on connaît la solution, il devrait en être de même pour d'autres problèmes. Il faut cependant toujours rester circonspect et vérifier que les hypothèses validant la méthode restent applicables pour le problème à résoudre.

## V.8. Force d'attraction entre les plaques d'un condensateur

Les armatures d'un condensateur chargé portent des charges de signes opposés, elles doivent donc s'attirer. Pour les empêcher de se coller l'une à l'autre, il faut donc une force. De plus, si le condensateur est rempli d'un diélectrique, les armatures vont exercer une pression sur l'isolant.



**Fig. V.9.**

Les plaques s'attirent avec une force  $\mathbf{F}$  puisque les charges qu'elles portent sont de signes opposés. Une force  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ , due à un agent extérieur, s'oppose à l'attraction.

En grandeur:  $F = F_{\text{ext}}$ .

Serait à calculer le travail de la force  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  qui s'oppose à la force électrique  $\mathbf{F}$  d'attraction. Cette force sert à écarter les plaques de  $x = 0$  à  $x = d$  pour un condensateur-plan. Ce travail a fourni de l'énergie potentielle  $W_E$  au condensateur: chaque augmentation infinitésimale d'écartement  $dx$  a apporté un supplément d'énergie  $dW_E$  tel qu'il n'est pas nécessaire de calculer explicitement ce travail:

$$F_{\text{ext}} dx = dW_E \Rightarrow F_{\text{ext}} = \frac{dW_E}{dx} \quad \text{avec} \quad W_E = \frac{Q^2}{2C}$$

Avec cette expression-là pour  $W_E$ , cela signifie que le condensateur a été chargé puis qu'on l'a débranché de sa source: sa charge  $Q$  ne varie pas lorsqu'on diminue sa capacité  $C$  en en écartant les plaques.

Prenons bien sûr le cas simple du condensateur-plan:

$$W_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 \frac{\epsilon_0 S}{x}} = \frac{Q^2 x}{2 \epsilon_0 S}$$

$$F_{\text{ext}} dx = dW_E \Rightarrow F_{\text{ext}} = \frac{dW_E}{dx} = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S}$$

La force d'attraction des plaques est opposée à la force d'écartement; elles ont même valeur:

$$F = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S} \quad (Q = \text{const.})$$

Il est quelque peu surprenant de constater que cette force est constante, en ce sens que la distance entre les plaques n'intervient plus. Il est cependant bien évident que cela n'est possible que si le condensateur reste un condensateur-plan, c'est-à-dire que le champ y reste homogène, sinon l'expression de la capacité n'est plus valable et le calcul ci-dessus par conséquent non plus.

Une toute autre expression de la force surgit si on écarte les plaques alors que le condensateur reste branché sur la source de tension. Dans ce cas,  $U$  reste fixe et  $Q$  diminue parce que  $C$  diminue. Examinons cela avec l'expression adéquate pour  $W_E$ :

$$W_E = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x} U^2$$

Comme pour le cas précédent, la force est la dérivée de l'énergie:

$$F_{\text{ext}} dx = dW_E \Rightarrow F_{\text{ext}} = \frac{dW_E}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} U^2 \quad (U = \text{const.})$$

Cette fois la force n'est pas du tout constante mais elle décroît comme le carré de l'écartement. C'est la même dépendance de force que pour des charges ponctuelles mais cela n'a rien à voir.

Du point de vue du travail effectué pour écarter les plaques, les deux situations évoquées sont très différentes:

Dans le premier cas ( $Q = \text{const.}$ ), la diminution de  $C$  en écartant les plaques provoque bien une augmentation de l'énergie potentielle du condensateur puisque  $C$  apparaît au dénominateur de  $W_E$ ; il faut *travailler* pour cela.

Par contre, dans le second cas ( $U = \text{const.}$ ), la diminution de  $C$  diminue l'énergie potentielle puisqu'elle est maintenant proportionnelle à  $C$ . On interprète cela en examinant le rôle de la source de tension qui reste branchée: lorsqu'on écarte les plaques, on fait diminuer  $C$  et donc  $Q$  car  $Q = CU$  et la source récupère des charges! Autrement dit, l'effort fait pour tirer sur les plaques est au bénéfice de la source: on recharge la batterie à la main!

### Pression

Examinons le cas où  $U = \text{const.}$  c-à-d lorsque le condensateur reste branché sur la source. La force d'attraction entre les plaques devient une *pression* si on l'exprime par unité de surface, autrement dit si on calcule  $p = F/S$ ,  $S$  étant l'aire d'une plaque. Il est d'autre part intéressant de faire apparaître la grandeur du champ entre les plaques séparées de  $d$  par la relation  $U = E/d$ . En utilisant l'expression de la force d'attraction  $F$  établie ci-dessus, on arrive à:

$$F = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d^2} U^2 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{d^2} U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Encore un résultat surprenant: la formule est exactement la même que celle de la densité d'énergie  $w_E$ ! La surprise s'atténue un peu si on remarque que:

$$[w_E] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} \quad \text{et} \quad [p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

### Exemple numérique:

Prenons le champ le plus élevé qui puisse exister dans l'air (sec) sans en provoquer la ionisation et produire un éclair:  $E^* \approx 8 \text{ kV/cm} = 8 \cdot 10^5 \text{ V/m}$ . La pression correspondante n'est alors que:  $p = \epsilon_0 E^2/2 \approx 3 \text{ Pa}$ , donc environ 30.000 fois moins que la pression atmosphérique normale.

**CH. V : CONDENSATEURS - CAPACITE**

**1.** Le volume entre les plaques d'un condensateur-plan (c-p) est  $V = 1 \text{ cm}^3$ . Sa capacité est  $C = 10 \text{ pF}$ . Calculer la surface  $S$  et l'espacement  $d$ .

**Rép:**  $S = 10,6 \text{ cm}^2$ ;  $d = 0,94 \text{ mm}$ .

**2.** Entrant avec une vitesse initiale négligeable dans un c-p, des électrons y acquièrent une accélération  $a = 1,76 \cdot 10^{16} \text{ m/s}^2$  et une vitesse de 5 % de  $c$  (vitesse de la lumière) à la sortie. La surface des plaques est  $S = 10 \text{ cm}^2$ .

Calculer la capacité de ce condensateur.

**Rép:**  $1,39 \text{ pF}$ .

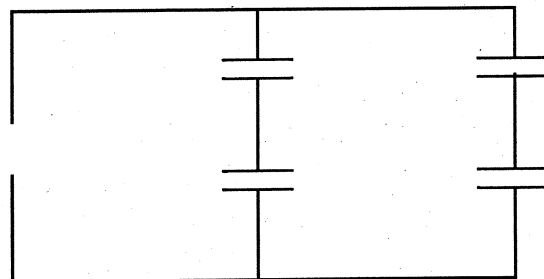
**3.** Un c-p de capacité  $C$  est branché sur une source de tension  $U$  fixe.

a) Se convaincre que si on augmente la distance entre les plaques, leur charge diminue.

b) On refait l'expérience, mais après avoir débranché la source de tension (le condensateur reste chargé). Se convaincre que la tension entre les plaques augmente si on augmente l'écartement.

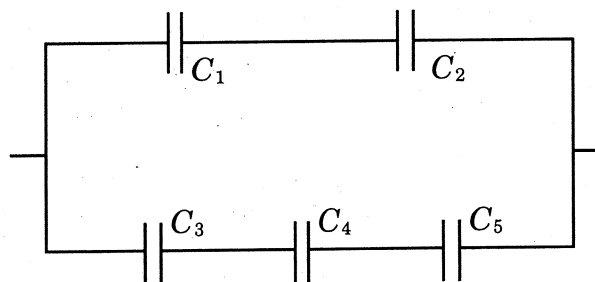
**4.** Trouver la capacité équivalente  $C_{\text{eq}}$  du groupement ci-contre, formé de quatre condensateurs identiques, de capacité  $C$ .

**Rép:**  $C_{\text{eq}} = C$ .



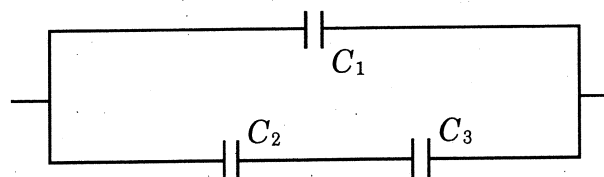
**5.** Calculer la capacité équivalente  $C_{\text{eq}}$ , où:  $C_1 = 1 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 2 \text{ nF}$ ,  $C_3 = 3 \text{ nF}$ ,  $C_4 = 4 \text{ nF}$  et  $C_5 = 5 \text{ nF}$ .

**Rép:**  $C_{\text{eq}} = 1,94 \text{ nF}$ .



**6.**  $C_1 = 10 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 20 \text{ nF}$ ,  $C_3 = ?$  pour que  $C_{\text{eq}} = 25 \text{ nF}$ .

**Rép:**  $C_3 = 60 \text{ nF}$ .

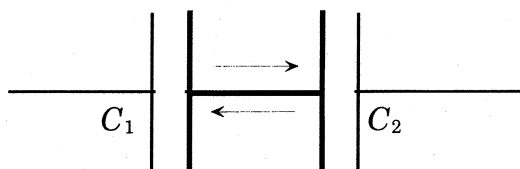




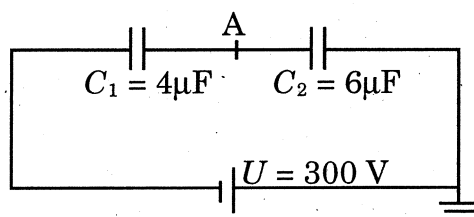
**7.** On dispose de 4 condensateurs identiques de capacité  $C = 10 \text{ nF}$ . Dessiner le schéma donnant une capacité équivalente de  $25 \text{ nF}$ .

**8.** S'inventer des exercices où on se donne un nombre quelconque de condensateurs identiques et où il faut trouver plusieurs groupements possibles donnant tous la même capacité équivalente.

**9.** Ces deux c-p ont la même surface  $S$ . Montrer que si on déplace latéralement le "H" central, la capacité équivalente ne change pas.



**10.** Calculer la charge de chaque condensateur et le potentiel du point A si  $U = 300 \text{ V}$ .



**Rép:**  $Q_1 = Q_2 = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ;  $V_A = -120 \text{ V}$ .

**11.** Un condensateur de capacité  $C_1 = 3 \mu\text{F}$  porte une charge de  $2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ . On le relie en parallèle avec un condensateur de capacité  $C_2 = 7 \mu\text{F}$  mais déchargé. Calculer la nouvelle charge de chaque condensateur et la tension aux bornes.

**Rép:**  $Q_1' = 6 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ ;  $Q_2' = 14 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ ;  $U = 20 \text{ V}$ .

**12.** Pour construire un condensateur cylindrique de hauteur  $h = 8 \text{ cm}$ , on dispose d'un rectangle de tôle de  $8 \times 6 \text{ cm}^2$ . Quelles doivent être les largeurs des deux découpes pour que la capacité du condensateur soit de  $100 \text{ pF}$ ?

On néglige l'épaisseur de la tôle.

**Rép:**  $2,93 \text{ cm}$  et  $3,07 \text{ cm}$ .

**13.** Deux sphères métalliques concentriques forment un condensateur sphérique. La distance entre les armatures est de  $10 \text{ mm}$ . Les densités superficielles de charges sont  $\sigma_1 = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$  et  $\sigma_2 = -3,8 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$ . Calculer:

- les rayons des deux sphères et la capacité du condensateur;
- la tension entre les armatures.

**Rép:** a)  $19,5 \text{ cm}$  et  $20,5 \text{ cm}$ ;  $0,44 \text{ nF}$ ; b)  $4,5 \text{ kV}$ .

**14.** Deux sphères métalliques sont très éloignées l'une de l'autre. La 1<sup>ère</sup> a une capacité  $C_1 = 8 \text{ pF}$  et porte une charge  $Q_1 = 20 \text{ nC}$ ; la 2<sup>ème</sup> a une capacité  $C_2 = 5 \text{ pF}$  et sa charge est  $Q_2 = 40 \text{ nC}$ . On les relie ensuite par un long fil métallique très fin. Calculer:

- le rayon de chaque sphère est leur potentiel respectif ( $V = 0$  à l'infini);
- leur nouvelle charge et le nouveau potentiel après connexion;
- à quel potentiel  $V^*$  faut-il les porter, lorsqu'elles sont connectées, pour que le champ sur l'une des deux atteigne  $E^* = 8 \text{ kV/cm}$ , champ qui provoque un éclair dans l'air sec. Sur quelle sphère se produira-t-il?

**Rép:** a)  $7,2$  et  $4,5 \text{ cm}$ ;  $2,5$  et  $8 \text{ kV}$ ; b)  $36,9$  et  $23,1 \text{ nC}$ ;  $4,62 \text{ kV}$ ; c)  $36 \text{ kV}$ .

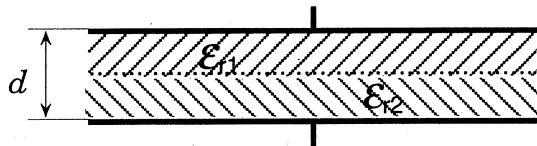
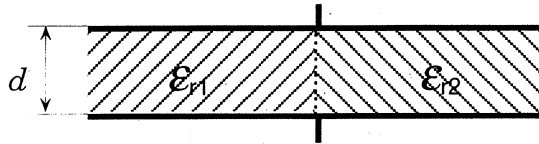
**15.** Un fabricant doit réaliser de gros condensateurs-plan dont le diélectrique est du mica ( $\epsilon_r = 7,5$ ) et dont la capacité doit être de  $0,47 \mu\text{F}$ . Ils doivent pouvoir supporter une tension de  $6 \text{ kV}$  alors que le champ maximal que peut supporter le mica est de  $50 \text{ kV/mm}$ . Calculer l'épaisseur et la surface de feuille de mica à utiliser.

**Rép:**  $0,12 \text{ mm}$  et  $0,85 \text{ m}^2$ .

**16.** Montrer que la capacité des condensateurs ci-contre s'écrit:

$$C_1 = (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \epsilon_0 S / 2d.$$

$$C_2 = 2\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}\epsilon_0 S / (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})d.$$



**17.** Quelles doivent-êtré les dimensions ( $S$  et  $d$ ) d'un c-p à air ( $\epsilon_r = 1$ ) pour que l'énergie électrique emmagasinée soit de  $1 \text{ J}$  si la tension entre les plaques est de  $1000 \text{ V}$ , le champ maximum pouvant être de  $8 \text{ kV/cm}$  ?

**Rép:**  $1,25 \text{ mm}$  et  $282 \text{ m}^2$  (!).

**18.** Soient deux condensateurs identiques et une source de tension de valeur  $U$  fixe. Déterminer quel est le groupement (parallèle ou série) qui contient le plus d'énergie. Calculer pour cela le rapport  $W_{\text{par}} / W_{\text{sér}}$ .

**Rép:** 4.

**19\*.** Calculer l'énergie  $W$  du champ électrique contenue dans une sphère diélectrique ( $\epsilon_r = 1$ ) de rayon  $R$  uniformément chargée en volume. Utiliser l'expression de  $E$  à l'intérieur et la densité d'énergie. Intégrer sur le volume.

**Rép:**  $W = Q^2 / 40\pi\epsilon_0 R$ .

**20\*.** a) Calculer l'énergie  $W$  du champ d'une sphère métallique de rayon  $R$  portant une charge  $Q$ . Se calcule de deux façons: soit simplement avec l'expression de la capacité d'une sphère seule, soit au moyen de la densité d'énergie et en intégrant.

**Rép:**  $W = Q^2 / 8\pi\epsilon_0 R$ .