Lycée Denis-de-Rougemont — Mathématiques de niveau 1

TE de révision - GEOMETRIE DANS L'ESPACE

CORRIGÉ — A

---

(1)

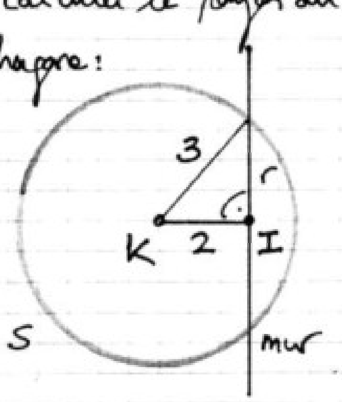
1\. a) L'équation de la sphère est : $S : (x-2)^2 + (y-2)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Son centre est donc $K(2;2;3)$ et son rayon est 3 $(3^2 = 9)$.

Comme le centre a une cote de 3 est que le rayon de la sphère est 3, on en déduit que <u>le sol est tangent à la sphère</u>.

b) Le centre du cercle d'intersection correspond à la projection du centre K de la sphère sur le mur. Le centre I du cercle est donc <u>$I(0;2;3)$</u>.

Pour calculer le rayon du cercle d'intersection, on va utiliser le théorème de Pythagore :



on a $3^2 = 2^2 + r^2$, i.e. $9 = 4 + r^2$, i.e. $r^2 = 5$, i.e. <u>$r = \sqrt{5}$</u>.

c) Voir feuille ci-jointe.

2 d) Pour dessiner les traces du plan, on cherche les intersections du plan avec les axes :

intersection avec l'axe x : on a $y = z = 0$;
ainsi $2x - 24 = 0$, i.e. $2x = 24$, i.e. $x = 12$;
donc $I_x(12;0;0)$

intersection avec l'axe y : on a $x = z = 0$;
ainsi $y - 24 = 0$, i.e. $y = 24$;
donc $I_y(0;24;0)$;

intersection avec l'axe z : on a $x = y = 0$;
ainsi $2z - 24 = 0$, i.e. $2z = 24$, i.e. $z = 12$;
donc $I_z(0;0;12)$.

On peut alors dessiner les intersections de Π avec les axes et, en les reliant 2 à 2, les traces de plan (voir feuille ci-jointe).

e) Pour cela, on va calculer la distance du centre K de la sphère au plan Π et vérifier qu'elle est strictement supérieure au rayon de la sphère.

On a : $K(2;2;3)$

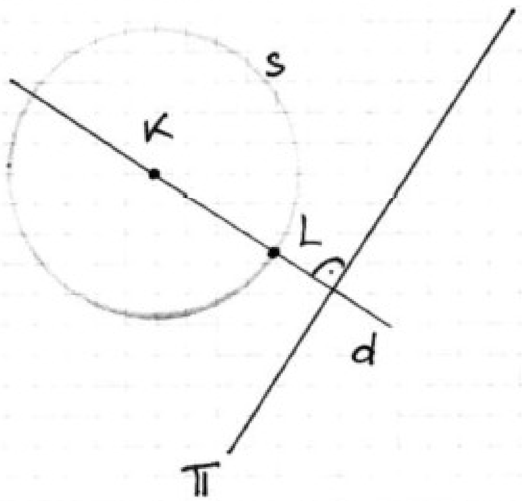
$\Pi : 2x + y + 2z - 24 = 0$.

Ainsi la distance de K à Π est $\dfrac{|2.2+2+2.3-24|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} =$ ②

$$= \frac{|4+2+6-24|}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4 > 3.$$

Donc <u>Π ne coupe pas la sphère s.</u>

e)



Le point L de s le plus proche de Π correspond à l'intersection de la droite perpendiculaire à Π passant par K et de la sphère s.
Cherchons les équations paramétriques de cette droite, d.
Elle passe par $K(2;2;3)$. Son vecteur directeur est un vecteur perpendiculaire à Π.

Un vecteur perpendiculaire à Π: $2x+y+2z-24=0$ est le vecteur $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. On va prendre ce vecteur comme vecteur directeur de d.
Ainsi les équations paramétriques de d sont:
$$\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+2\lambda. \end{cases}$$

Par substitution dans s, on obtient:

$$\begin{aligned}
(2+2\lambda-2)^2+(2+\lambda-2)^2+(3+2\lambda-3)^2 &= 9 && \text{calculs} \\
(2\lambda)^2+\lambda^2+(2\lambda)^2 &= 9 && \text{calculs} \\
4\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2 &= 9 && \text{réduction} \\
9\lambda^2 &= 9 && :9 \\
\lambda^2 &= 1 && \sqrt{} \\
\lambda &= \pm 1
\end{aligned}$$

Si $\lambda=1$, on obtient le point: $x = 2+2\cdot1 = 4$
$y = 2+1 = 3$
$z = 3+2\cdot1 = 5$, i.e. $(4;3;5)$.

Si $\lambda=-1$, on obtient le point: $x = 2+2\cdot(-1) = 0$
$y = 2-1 = 1$
$z = 3+2\cdot(-1) = 1$, i.e. $(0;1;1)$.

Il faut encore déterminer lequel des 2 est le plus proche de Π.
En utilisant la formule de distance d'un point à un plan, on trouve:

distance de $(4;3;5)$ à $\Pi = \dfrac{|2\cdot 4+3+2\cdot 5-24|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} =$

$= \dfrac{|8+3+10-24|}{\sqrt{9}} = \dfrac{3}{3} = 1$;

distance de $(0;1;1)$ à $\Pi = \dfrac{|2\cdot 0+1+2\cdot 1-24|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} =$

$= \dfrac{|1+2-24|}{\sqrt{9}} = \dfrac{21}{3} = 7.$

Ainsi le point le plus proche de Π est $\underline{L(4;3;5)}$.

3. g) Il faut trouver les équations paramétriques de la droite a.

Elle passe par R.

Un vecteur parallèle à R est $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

En divisant ce vecteur par 4, on peut prendre $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de a.

Ainsi, les équations paramétriques de a sont: $\begin{cases} x = 7-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

L'intersection de a et du mur correspond à $x=0$, i.e. $7-\lambda=0$, i.e. $\lambda=7$. Ainsi $y=2\cdot 7=14$ et $z=7$.

Les coordonnées du point d'intersection de a et de Π sont $\underline{(0;14;7)}$.

h) Comme la trace dans le sol de a est $R(7;0;0)$, la trace dans la paroi de a est aussi $R(7;0;0)$ et la trace dans le mur de a est $T_m(0;14;7)$, on peut sans autre dessiner la droite (voir feuille ci-jointe).

i) L'équation de Π est $2x+y+2z-24=0$.

Les équations de a sont: $\begin{cases} x = 7-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda. \end{cases}$

Par substitution, on obtient:

$$\begin{array}{c|l} 2(7-\lambda)+2\lambda+2\lambda-24=0 & \text{distributivité} \\ 14-2\lambda+2\lambda+2\lambda-24=0 & \text{réduction} \\ 2\lambda-10=0 & +10 \\ 2\lambda=10 & :2 \\ \lambda=5 & \end{array}$$

Ainsi: $x=7-5=2$, $y=2\cdot 5=10$, $z=5$.

On obtient $\underline{I(2;10;5)}$, point que l'on dessine (voir feuille ci-jointe).

j) La droite b doit être contenue dans Π.
Elle doit donc est perpendiculaire à un vecteur normal à Π.
Un vecteur normal à Π est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
b doit donc être perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
De plus, b doit être perpendiculaire à a, i.e. perpendiculaire à un vecteur directeur de a, i.e. perpendiculaire à $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
En résumé, b doit être perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Comme $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est parallèle à b.

On a : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ -2-2 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On va prendre ce vecteur comme vecteur directeur de b.
De plus, b doit passer par $I(2;10;5)$.
Ainsi les équations paramétriques de b sont : $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 10 - 4\lambda \\ z = 5 + 5\lambda. \end{cases}$

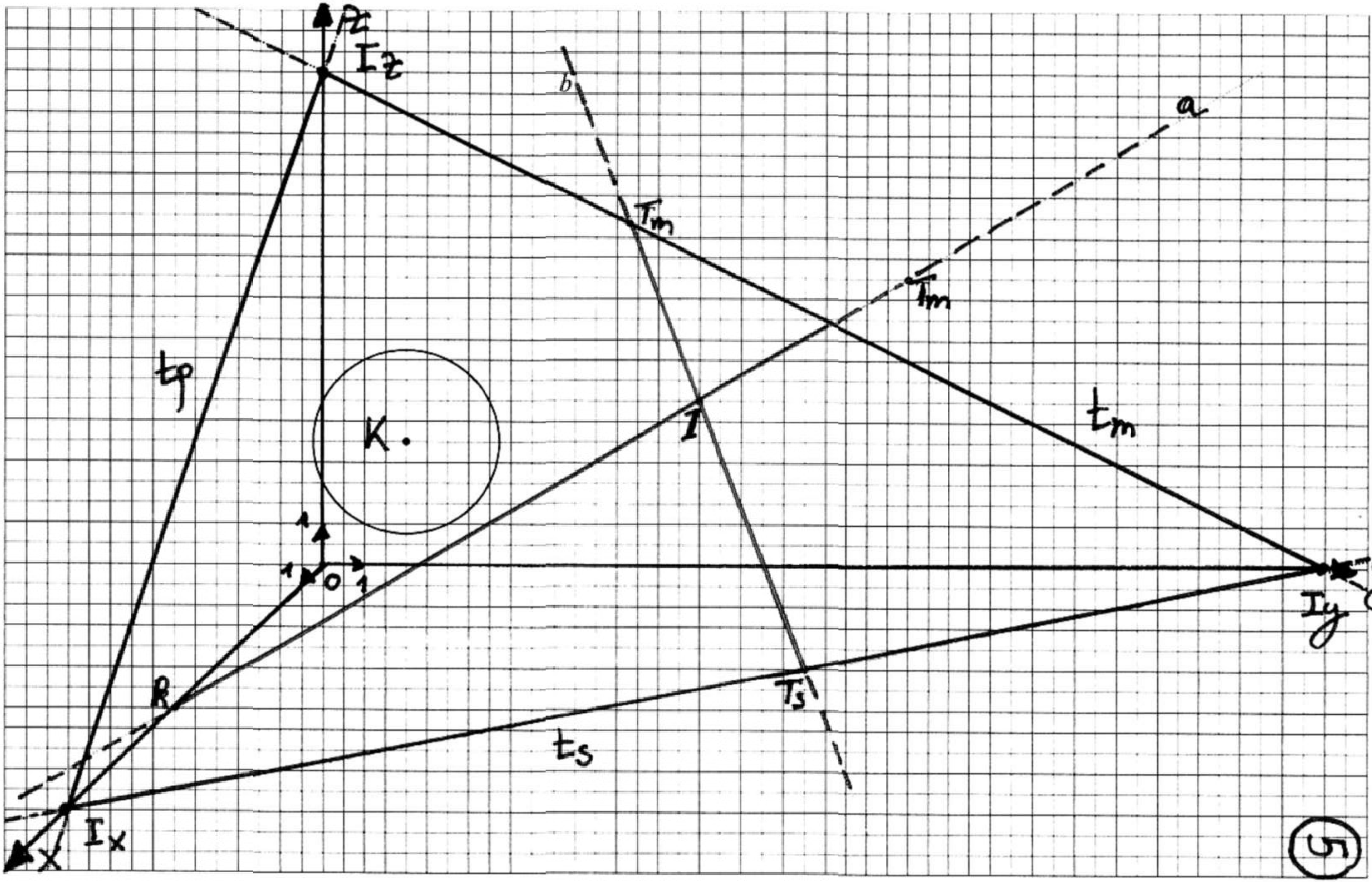
k) Pour dessiner b, on cherche ses traces dans les plans de référence :

dans le sol : $z = 0$, i.e. $5 + 5\lambda = 0$, i.e. $5\lambda = -5$, i.e. $\lambda = -1$;
ainsi $x = 2 - 3 \cdot (-1) = 5$ et $y = 10 - 4 \cdot (-1) = 14$;
donc $T_S(5;14;0)$.

dans la paroi : $y = 0$, i.e. $10 - 4\lambda = 0$, i.e. $4\lambda = 10$, i.e. $\lambda = 2{,}5$;
ainsi $x = 2 - 3 \cdot 2{,}5 = -5{,}5$ et $z = 5 + 5\lambda = 5 + 5 \cdot 2{,}5 =$
$= 17{,}5$;
donc $T_P(-5{,}5;0;17{,}5)$.

dans le mur : $x = 0$, i.e. $2 - 3\lambda = 0$, i.e. $3\lambda = 2$, i.e. $\lambda = \frac{2}{3}$;
ainsi $y = 10 - 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$ et $z = 5 + 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{25}{3}$;
donc $T_M = \left(0; \frac{22}{3}; \frac{25}{3}\right)$.

On peut alors représenter ces points (sauf T_P) qui est en dehors de la feuille et tracer la droite b (voir copie ci-jointe)



z
I_z
b
a
T_m
$\bar{T}_m$
t_p
K
T
t_m
1
0
1
1
y
I_y
R
T_s
t_s
I_x
x
5