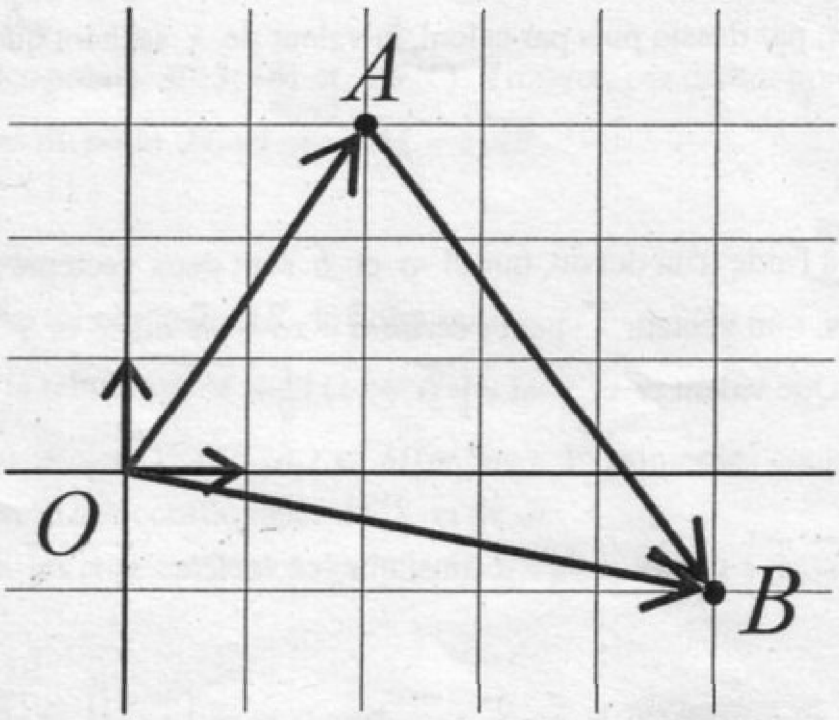
Lycée Denis-de-Rougemont

Mathématiques de niveau 1

Degré 10

GÉOMÉTRIE PLANE

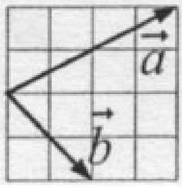


$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

GÉOMÉTRIE PLANE

Exercice 1



On donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Construire de manière précise les vecteurs $\vec{c} = -\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ et $\vec{e} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Exercice 2

Avec les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de l'exercice 1, construire $\vec{c}$ tel que $-3\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$. Exprimer ensuite $\vec{c}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 3

On considère les vecteurs $\vec{c} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$ et $\vec{d} = x\vec{a} - 2\vec{b}$ ($\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme à l'exercice 1). Trouver, par dessin puis par calcul, la valeur de x sachant que $\vec{c}$ est parallèle à $\vec{d}$.

Exercice 4

Se convaincre, à l'aide d'un dessin, que si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs non parallèles et non nuls, tout vecteur $\vec{c}$ peut s'écrire $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ où x et y sont des nombres réels. Que valent x et y si $\vec{c} = \vec{0}$?

Exercice 5

On considère $\left\{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2}\right\}$ une base de V_2, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

a) Calculer les composantes de $\vec{a} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$ dans la base $\left\{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2}\right\}$ et effectuer un contrôle graphique.

b) Se convaincre que $\left\{\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2}\right\}$ est également une base de V_2.

c) Calculer les composantes de $\vec{b} = 5\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2}$ dans cette base. Effectuer à nouveau un contrôle graphique.

d) On considère un vecteur $\vec{v}$ décomposé dans les deux bases, $\vec{v} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x'\overrightarrow{v_1} + y'\overrightarrow{v_2}$. Exprimer les composantes x et y en fonction de x' et y', et vice-versa.

Exercice 6

Dans un repère $\{O;E_1;E_2\}$, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;5)$ et $C(-3;1)$.

a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Trouver par dessin le point D, sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.

c) Calculer les coordonnées de D.

Exercice 7

On donne les points $A(1;-2)$ et $B(5;4)$. Trouver, par dessin puis par calcul, les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 8

On donne les points $A(-3;-4)$ et $B(9;6)$. Trouver, par dessin puis par calcul, les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 9

On considère un segment AB de point milieu M.

a) Établir la relation $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

b) On pose $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$ et $M(m_1;m_2)$. Exprimer les coordonnées de M en fonction des coordonnées de A et de B.

c) Calculer les coordonnées du point milieu du segment $A(-1;3)$ $B(4;-5)$.

Exercice 10

On donne un quadrilatère par ses sommets : $A(0;4)$, $B(2;6)$, $C(4;2)$ et $D(2;-4)$. On considère encore les points E, F, G et H qui sont respectivement les points milieu des côtés AB, BC, CD, et DA.

a) Vérifier, par dessin puis par calcul, que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

b) Démontrer que ce résultat est général !

Exercice 11

D'un parallélogramme $ABCD$ on connaît le centre $M(3;-1)$, le sommet $C(6;2)$ et $\overrightarrow{AB} = 6\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$. Trouver, par dessin puis par calcul, les coordonnées des sommets A, B et D.

Exercice 12

On donne le vecteur $\vec{t} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$ ainsi que le point $A(-2;5)$ et on considère la relation vectorielle $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{t}$ où λ est un paramètre réel.

a) Calculer les coordonnées de P pour $\lambda = -2, -1, 0, 1, 2$ et 3.

b) Représenter ces points dans un repère affine.

c) Trouver une équation cartésienne de la courbe obtenue, c'est-à-dire écrire d'abord les deux équations donnant respectivement x et y en fonction de λ puis éliminer le paramètre λ pour obtenir une seule relation entre x et y.

Exercice 13

Dans un repère affine, une droite d est donnée par les points $A(-1;3)$ et $B(2;-2)$.

a) Trouver une représentation paramétrique vectorielle de d.

b) Trouver une représentation paramétrique algébrique de d.

c) Calculer les coordonnées des points d'intersection de d et des axes de référence.

d) Déterminer par calcul si le point $C(7;-11)$ est situé sur la droite.

Exercice 14

On donne la droite $d_1 : \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Trouver le point B, situé sur d_1, dont l'abscisse vaut 8.

b) Trouver une représentation paramétrique algébrique de la droite d_2 qui passe par $A(-1;5)$ et qui est parallèle à d_1.

c) Dessiner les deux droites.

Exercice 15

On considère la droite d passant par $A(3;1)$ et parallèle au vecteur $\vec{t} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$. Trouver une représentation paramétrique algébrique puis une équation cartésienne de cette droite.

Exercice 16

On considère la droite d passant par $A(x_0;y_0)$ et parallèle au vecteur $\vec{t} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$. Trouver une représentation paramétrique algébrique puis une équation cartésienne de cette droite.

Exercice 17

On donne les droites $a: x-2y+3=0$, $b: x-3=0$ et $c: y+2=0$. Dessiner ces droites puis calculer les coordonnées des sommets du triangle qu'elles déterminent.

Exercice 18

Étudier la position relative des paires de droites suivantes. Si elles se coupent, calculer les coordonnées du point d'intersection.

a) $a: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \end{cases}$ $\qquad b: \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=3-\lambda \end{cases}$

b) $a: \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=1-\frac{\lambda}{3} \end{cases}$ $\qquad b: \begin{cases} x=5-6\lambda \\ y=\frac{2}{3}+\lambda \end{cases}$

c) $a: 4x+3y-6=0$ $\qquad b: \begin{cases} x=3\lambda \\ y=4-4\lambda \end{cases}$

d) $a: 2x+3y-16=0$ $\qquad b: 3x-2y-11=0$

e) $a: x-3=0$ $\qquad b: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-1+2\lambda \end{cases}$

f) $a: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ $\qquad b: 6x+4y-12=0$

Exercice 19

Trouver, par dessin puis par calcul, les sommets A, B et C du triangle donné par les renseignements suivants :

1. $d_{AB}: 3x-5y+1=0$
2. $d_{AC}: x-9y-29=0$
3. L'abscisse de C vaut 11
4. $\overrightarrow{BC}$ est parallèle à $\vec{t}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}$.

Exercice 20

On donne un triangle par ses trois sommets : $A(2;-1)$, $B(-1;3)$ et $C(-2;-2)$. Trouver les équations cartésiennes des trois médianes du triangle et montrer qu'elles ont un point commun. Donner les coordonnées de ce point et vérifier graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 21

Dans un repère affine, on donne un triangle ABC par les renseignements suivants :

1. $d_{AB}: 2x+y+6=0$
2. $G(1;0)$ (centre de gravité)
3. L'ordonnée de A vaut 0
4. $\overrightarrow{BC}$ est parallèle à $\vec{t}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}$.

Construire le triangle puis calculer les coordonnées de ses sommets.

Exercice 22

Dans une base orthonormée $\left\{\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right\}$, on donne les vecteurs $\vec{a}=2\overrightarrow{u_1}-3\overrightarrow{u_2}$, $\vec{b}=-2\overrightarrow{u_1}$, $\vec{c}=3\overrightarrow{u_2}$ et $\vec{d}=-8\overrightarrow{u_1}+15\overrightarrow{u_2}$.

a) Calculer la norme de ces vecteurs.

b) Calculer $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|$ et $\left\|\vec{a}+\vec{c}\right\|$.

c) Calculer tous les produits scalaires possibles avec ces vecteurs. On donnera les résultats sous forme d'un tableau à double entrée.

Exercice 23

On donne le vecteur $\vec{a}=3\overrightarrow{u_1}+4\overrightarrow{u_2}$.

a) Trouver un vecteur orthogonal à $\vec{a}$.

b) Trouver un vecteur unité orthogonal à $\vec{a}$.

c) Trouver un vecteur de norme 7 orthogonal à $\vec{a}$.

Exercice 24

Dans une base orthonormée $\left\{\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right\}$, on donne les vecteurs $\vec{a}=5\overrightarrow{u_1}-12\overrightarrow{u_2}$ et $\vec{b}=6\overrightarrow{u_1}+8\overrightarrow{u_2}$. On considère encore les vecteurs $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{b_1}$ qui sont respectivement la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ et la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$. Calculer $\left\|\overrightarrow{a_1}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{b_1}\right\|$ et effectuer une vérification graphique.

Exercice 25

On donne les vecteurs $\vec{a}=5\overrightarrow{u_1}-12\overrightarrow{u_2}$, $\vec{u}=\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\vec{b}=3\overrightarrow{u_1}+4\overrightarrow{u_2}$ et $\vec{v}=\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$.

Trouver, par calcul, le vecteur $\vec{c}$ tel que $\vec{u}\cdot\vec{c}=6$ et $\vec{v}\cdot\vec{c}=-1$.

Exercice 26

Trouver une équation cartésienne de la médiatrice du segment d'extrémités $A(-5;-4)$ et $B(3;2)$.

Exercice 27

On donne le triangle de sommets $A(6;0)$, $B(-2;0)$ et $C(0;4)$. Trouver les équations cartésiennes des trois hauteurs du triangle et calculer les coordonnées de l'orthocentre du triangle.

Exercice 28

On donne la droite $a: x+3y-4=0$. Trouver les équations cartésiennes des droites b et c qui passent par le point $A(4;3)$ et qui sont respectivement parallèle et orthogonale à a. Dessiner ensuite les trois droites.

Exercice 29

$A(-1;-3)$ et $C(4;7)$ sont deux sommets situés sur la même diagonale d'un rectangle $ABCD$. Trouver, par dessin puis par calcul, les sommets B et D, sachant que $\overrightarrow{AB}$ est parallèle à $4\overrightarrow{u_1}+3\overrightarrow{u_2}$.

Exercice 30

On donne le triangle de sommets $A(-5;4)$, $B(-3;-10)$ et $C(3;8)$. Trouver, par dessin puis par calcul, le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Exercice 31

On donne les droites $a: 2x-y+11=0$ et $b: 2x-y+1=0$ qui portent deux côtés d'un rectangle. Une des diagonales du rectangle a pour équation $y=3$.

a) Trouver, par dessin puis par calcul, les sommets du rectangle.

b) Calculer l'aire du rectangle.

Exercice 32

Un rectangle $ABCD$ est donné par les renseignements suivants :

1. $D(-3;6)$
2. Son aire vaut 150
3. $d_{AB}: 3x+4y+35=0$
4. L'ordonnée de B est négative.

Calculer les coordonnées des trois sommets inconnus.

Exercice 33

Un losange $ABCD$ est donné par le sommet $A(2;3)$, le centre $M(4;2)$ et son aire qui vaut 20. Calculer les coordonnées des trois sommets inconnus.

Exercice 34

On donne le point $A(2;6)$ et la droite $d: 3x+5y-2=0$.

a) Déterminer la plus courte distance de d à A.

b) Trouver les coordonnées du point B qui est l'image de A par une symétrie axiale d'axe d.

Exercice 35

a) Représenter la droite $d: 3x-4y-5=0$ ainsi que les points $A(2;-1)$, $B(-5;0)$, $C(3;1)$, $D(6;3)$ et $E(-8;-7)$.

b) Calculer la plus courte distance séparant chaque point de la droite.

c) La droite coupe le plan en deux régions. Donner les points situés dans la même région que A et établir un lien avec le calcul de la distance.

Exercice 36

Trouver la plus courte distance depuis l'origine jusqu'aux droites suivantes :

a) La droite a qui passe par $A(1;4)$ et qui est parallèle à $15\overrightarrow{u_1}-8\overrightarrow{u_2}$.

b) La droite b d'équation $x+y+1=0$.

c) La droite c qui passe par $B(4;-11)$ et $C(-3;13)$.

Exercice 37

Trouver les équations des droites parallèles à $3\overrightarrow{u_1}-4\overrightarrow{u_2}$ et dont la distance jusqu'au point $A(-6;2)$ vaut 6.

Exercice 38

Calculer la plus courte distance entre les droites parallèles $a: 3x+4y-13=0$ et $b: 3x+4y-3=0$.

Exercice 39

Trouver les équations des droites situées à la distance 3 de la droite d d'équation $7x-24y-8=0$.

Exercice 40

Trouver les bissectrices des droites $a: x-3y+8=0$ et $b: 3x-y-1=0$.

Exercice 41

Trouver une équation de la droite située à égale distance des droites parallèles $a: 5x+2y-3=0$ et $b: 5x+2y-9=0$.

Exercice 42

On donne le triangle de sommets $A(6;4)$, $B(-10;-8)$ et $C(11;-8)$. Calculer son aire, trouver les équations de ses trois bissectrices intérieures ainsi que le centre et le rayon de son cercle inscrit.

Exercice 43

Trouver le centre et le rayon des cercles donnés par les équations suivantes :

a) $c_1: x^2+y^2-14x-2y-1246=0$

b) $c_2: x^2+y^2+10x+14y+25=0$

c) $c_3: x^2+y^2+5x-3y+8=0$

d) $c_4: 3x^2+3y^2+7x-10=0$

Exercice 44

Trouver l'équation réduite des cercles donnés par les renseignements suivants :

- c_1 est centré en $M(3;-4)$ et est tangent à l'axe des ordonnées.
- c_2 est centré à l'origine et passe par $A(12;-6)$.
- c_3 est centré en $M(2;3)$ et est tangent à la droite $d: 2x-y+4=0$.
- c_4 est situé dans le deuxième quadrant, son rayon vaut 5 et il est tangent aux axes de référence.
- c_5 et c_6 sont tangents aux droites $a: 4x+3y=0$ et $b: 12x-5y=0$. De plus ils sont centrés sur la droite $c: x+y-63=0$.
- c_7 est centré sur l'axe des ordonnées et passe par les points $A(4;2)$ et $B(-6;-2)$.
- c_8 et c_9 sont tangents à l'axe des ordonnées et passent par les points $A(2;0)$ et $B(8;0)$.

Exercice 45

Trouver les équations des tangentes au cercle d'équation $(x+5)^2+(y-2)^2-25=0$ en ses points d'abscisse -2.

Exercice 46

On donne le cercle $c:(x-9)^2+(y+3)^2-18=0$ et la droite $d:x+y-4=0$.

a) Calculer la plus courte distance de d au centre du cercle et en déduire que la droite coupe le cercle en deux points A et B.

b) Déterminer la longueur du segment AB sans calculer les coordonnées des point A et B.

Exercice 47

Trouver les équations des droites qui sont tangentes au cercle $c:(x-2)^2+(y+5)^2-17=0$ et qui sont parallèles à la droite $d:x-4y+10=0$. Trouver également les points de contact.

Exercice 48

Trouver les équations des tangentes au cercle c: $(x-4)^2+(y-3)^2-20=0$ en ses points d'intersection avec la droite d: $x-3y+15=0$.

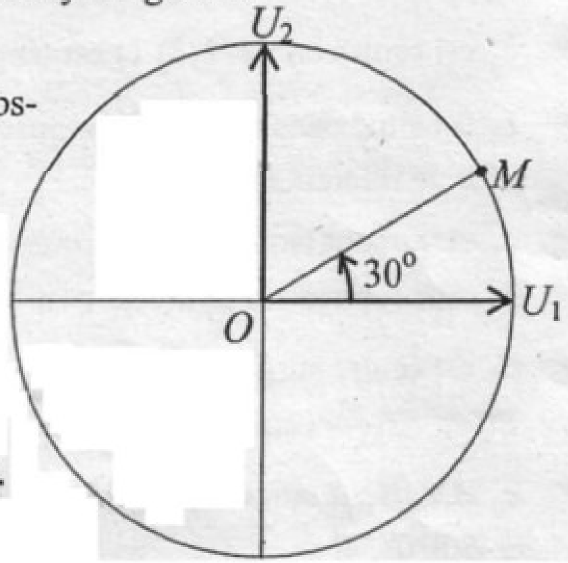
Exercice 49

On considère le cercle centré à l'origine et de rayon égal à 1.

a) Donner l'équation de ce cercle.

b) Déterminer les points du cercle dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

c) Déterminer le point M du cercle tel que $\widehat{U_1OM}=30^\circ$.



Remarque

Ce cercle s'appelle **cercle trigonométrique.**