Exercice 6.33

Soit $f(x)$ une courbe. La tangente à la courbe en $x=x_0$ est une droite de la forme $y=mx+h$, où $m=f'(x_0)$ (= pente) et h se calculent avec le point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.

a. $f(x)=-3x^2+5x-2$ en $x_0=-2$: on a $f'(x)=-3\cdot 2x+5=-6x+5$; $f'(x_0)=-6\cdot(-2)+5=$

$=12+5=17 \Rightarrow m=17 \Rightarrow y=17x+h$;

$f(x_0)=-3\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-2=-3\cdot 4-10-2=-12-12=$

$=-24 \Rightarrow -24=17\cdot(-2)+h \Rightarrow -24=-34+h$

$\Rightarrow h=10$;

La tangente en $x_0=-2$ est donc $y=17x+10$.

b. $g(x)=\frac{-3}{x}$ en $x_0=5$: on a $g'(x)=-3\left(\frac{1}{x}\right)'=-3\left(x^{-1}\right)'=-3\cdot(-1)x^{-2}=3\frac{1}{x^2}=\frac{3}{x^2}$;

$g'(x_0)=\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25} \Rightarrow m=\frac{3}{25} \Rightarrow y=\frac{3}{25}x+h$;

$g(x_0)=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{3}{5}=\frac{3}{25}\cdot 5+h \Rightarrow -\frac{3}{5}=\frac{3}{5}+h \Rightarrow h=-\frac{6}{5}$;

la tangente en $x_0=5$ est donc $y=\frac{3}{25}x-\frac{6}{5}$.

c. $h(x)=5\sqrt{x}+2$ en $x_0=4$: on a $h'(x)=5(\sqrt{x})'=5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{x}}$; $h'(x_0)=\frac{5}{2\sqrt{4}}=\frac{5}{2\cdot 2}=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow m=\frac{5}{4} \Rightarrow y=\frac{5}{4}x+h$; $h(x_0)=5\cdot\sqrt{4}+2=5\cdot 2+2=12$

$\Rightarrow 12=\frac{5}{4}\cdot 4+h \Rightarrow 12=5+h \Rightarrow h=7$;

la tangente en $x_0=4$ est donc $y=\frac{5}{4}x+7$.

d. $i(x)=\cos(x)$ en $x_0=\frac{3\pi}{4}$: on a $i'(x)=(\cos(x))'=-\sin(x)$; $i'(x_0)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow m=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+h$; $i(x_0)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\pi}{4}+h \Rightarrow h=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\pi}{4}-1\right)$;

la tangente en $x_0=\frac{3\pi}{4}$ est donc $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\pi}{4}-1\right)$.

Exercice 6.34

On a la courbe $y = f(x) = x^2 + k$.
On sait que la pente de la tangente en $x = x_0$ est $f'(x_0)$.
L'équation de la tangente est $y = mx + h$, où m est sa pente.
Ici $y = 6x - 7$ et on a $m = 6$ et $h = -7$.
On doit donc avoir $f'(x_0) = m \Rightarrow 2x_0 = 6 \Rightarrow x_0 = 3$.
En outre $y = mx + h$ passe au point $(x_0 ; f(x_0))$.
$f(x_0) = f(3) = 3^2 + k = 9 + k$.
Ainsi, on a $9 + k = 6 \cdot 3 + h$ avec $h = -7 \Rightarrow 9 + k = 18 - 7 \Rightarrow 9 + k = 11 \Rightarrow k = 2$.
De plus, si $x_0 = 3$, $f(x_0) = 9 + k = 11$.
Ainsi, on a $k = 2$ et les coordonnées du point de tangence sont $(3 ; 11)$.

Exercice 6.39

a. $y=\frac{x}{x-1}=\frac{u}{v}$ avec $u=x$ et $v=x-1$; on a $u'=1$ et $v'=1$

$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$.

b. $y=\frac{x}{1+5x}=\frac{u}{v}$ avec $u=x$ et $v=1+5x$; on a $u'=1$ et $v'=5$

$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{1\cdot(1+5x)-x\cdot 5}{(1+5x)^2}=\frac{1+5x-5x}{(1+5x)^2}=\frac{1}{(1+5x)^2}$.

c. $y=\frac{x^2}{3x-2}=\frac{u}{v}$ avec $u=x^2$ et $v=3x-2$; on a $u'=2x$ et $v'=3$

$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{2x(3x-2)-x^2\cdot 3}{(3x-2)^2}=\frac{6x^2-4x-3x^2}{(3x-2)^2}=\frac{3x^2-4x}{(3x-2)^2}$.

d. $y=\frac{x}{1+x^3}=\frac{u}{v}$ avec $u=x$ et $v=1+x^3$; on a $u'=1$ et $v'=3x^2$

$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{1\cdot(1+x^3)-x(3x^2)}{(1+x^3)^2}=\frac{1+x^3-3x^3}{(1+x^3)^2}=\frac{-2x^3+1}{(1+x^3)^2}$.

e. $y=\frac{\sin(x)}{x}=\frac{u}{v}$ avec $u=\sin(x)$ et $v=x$; on a $u'=\cos(x)$ et $v'=1$

$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{\cos(x)\cdot x-\sin(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$.

f. $y=\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{u}{v}$ avec $u=x$ et $v=\sqrt{x+1}$; on a $u'=1$ et $v'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{1\cdot\sqrt{x+1}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(2(x+1)-x\right)}{x+1}=\frac{2x+2-x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$.

g. $y=\frac{\sqrt{x-5}}{x}=\frac{u}{v}$ avec $u=\sqrt{x-5}$ et $v=x$; on a $u'=\frac{1}{2\sqrt{x-5}}$ et $v'=1$

$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-5}}\cdot x-\sqrt{x-5}\cdot 1}{x^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-5}}\left(x-2(x-5)\right)}{x^2}=\frac{x-2x+10}{2x^2\sqrt{x-5}}=\frac{-x+10}{2x^2\sqrt{x-5}}=$

$=\frac{(-x+10)\sqrt{x-5}}{2x^2(x-5)}=\frac{(-x+10)\sqrt{x-5}}{2x^3-10x^2}$ (pas de racines au dénominateur).

h. $y=x\cos(x)=u\cdot v$ avec $u=x$ et $v=\cos(x)$; on a $u'=1$ et $v'=-\sin(x)$

$\Rightarrow y'=u'v+uv'=1\cdot\cos(x)+x\cdot(-\sin(x))=\cos(x)-x\sin(x)$.

i. $y=(4-x^2)\sin(x)=u\cdot v$ avec $u=4-x^2$ et $v=\sin(x)$; on a $u'=-2x$ et $v'=\cos(x)$

$\Rightarrow y'=u'v+uv'=-2x\cdot\sin(x)+(4-x^2)\cos(x)$.

j. $y=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{u}{v}$ avec $u=\sin(x)$ et $v=\cos(x)$; on a $u'=\cos(x)$ et $v'=-\sin(x)$

$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=$

$=1+\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2=1+\tan^2(x)$; comme $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, on a aussi $y'=\frac{1}{\cos^2(x)}$.

k. $y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{u}{v}$ avec $u=ax+b$ et $v=cx+d$; on a $u'=a$ et $v'=c$

$\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{a(cx+d)-(ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2}=\frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

l. $y=x^{\frac{1}{3}}(7-x^3)=u\cdot v$ avec $u=x^{\frac{1}{3}}$ et $v=7-x^3$; on a $u'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ et $v'=-3x^2$

$$\Rightarrow y' = u'v + uv' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(7-x^3) + x^{\frac{1}{3}} \cdot (-3x^2) = x^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}(7-x^3) + x(-3x^2)\right) =$$
$$= x^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{7}{3} - \frac{x^3}{3} - 3x^3\right) = x^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{7}{3} - \frac{10}{3}x^3\right) = \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{\frac{7}{3}}.$$

m. $y = \frac{x^2-7x+9}{x} = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2-7x+9$ et $v = x$; on a $u' = 2x-7$ et $v' = 1$

$$\Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x-7)x - (x^2-7x+9)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-7x-x^2+7x-9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2}.$$

n. $y = x^3(\sin(x)+1) = u \cdot v$ avec $u = x^3$ et $v = \sin(x)+1$; on a $u' = 3x^2$ et $v' = \cos(x)$

$$\Rightarrow y' = u' \cdot v + uv' = 3x^2(\sin(x)+1) + x^3\cos(x) = x^2(3\sin(x) + x\cos(x) + 3).$$

o. $y = \sin(x) \cdot \cos(x) = u \cdot v$ avec $u = \sin(x)$ et $v = \cos(x)$; on a $u' = \cos(x)$ et $v' = -\sin(x)$

$$\Rightarrow y' = u'v + uv' = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Exercice 6.36

On a $y = f(x) = \frac{x^2+3}{x+3}$.

L'équation de la tangente à y en $x=1$ est donnée par $y = mx+h$ avec $m = f'(1)$ et h calculé avec le point $(1; f(1))$.

On a $f(x) = \frac{x^2+3}{x+3} = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2+3$ et $v = x+3$; on a $u' = 2x$ et $v' = 1$, d'où

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2x(x+3)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2-3}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-3}{(x+3)^2}.$$

Ainsi $m = f'(1) = \frac{1^2+6\cdot 1-3}{(1+3)^2} = \frac{1+6-3}{4^2} = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$.

L'équation de la tangente s'écrit donc $y = \frac{1}{4}x+h$.

On a $f(1) = \frac{1^2+3}{1+3} = \frac{4}{4} = 1$.

Ainsi, on a $1 = \frac{1}{4}\cdot 1 + h \Longrightarrow h = \frac{3}{4}$.

L'équation de la tangente est donc $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

Exercice 6.37

On a $y=f(x)=\frac{\sin(x)}{x^2}$.

La pente de la tangente à y en $x=\pi$ est donnée par $f'(\pi)$.

On a $f(x)=\frac{\sin(x)}{x^2}=\frac{u}{v}$ avec $u=\sin(x)$ et $v=x^2$; on a $u'=\cos(x)$ et $v'=2x$, d'où

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{\cos(x)\cdot x^2-\sin(x)\cdot 2x}{(x^2)^2}=\frac{x^2\cos(x)-2x\sin(x)}{x^4}=\frac{x\cos(x)-2\sin(x)}{x^3}.$$

Ainsi $f'(\pi)=\frac{\pi\cos(\pi)-2\sin(\pi)}{\pi^3}=\frac{\pi\cdot(-1)-2\cdot 0}{\pi^3}=\frac{-\pi}{\pi^3}=-\frac{1}{\pi^2}$.

Par conséquent, la pente de la tangente à y en $x=\pi$ est $-\frac{1}{\pi^2}$

Exercice 6.38

On a $f(x)=\frac{2x+a}{x-1}$ et la tangente $y=-7x+23$.
Nommons x_0 l'abscisse du point de tangence.
$f'(x_0)$ est la pente de la tangente : on a donc $f'(x_0)=-7$ ①.
En outre $(x_0; f(x_0))$ étant le point de tangence et, donc, un point de la tangente, on doit avoir $f(x_0)=-7x_0+23$ ②.
① et ② vont nous donner un système de 2 équations à 2 inconnues (x_0 et a).

①: $f(x)=\frac{2x+a}{x-1}=\frac{u}{v}$ avec $u=2x+a$ et $v=x-1$; on a $u'=2$ et $v=1$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{2(x-1)-(2x+a)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x-a}{(x-1)^2}=\frac{-2-a}{(x-1)^2} \ ;$$

$$f'(x_0)=-7 \Rightarrow \frac{-2-a}{(x_0-1)^2}=-7 \Rightarrow \frac{2+a}{(x_0-1)^2}=7 \Rightarrow 2+a=7(x_0-1)^2.$$

② $$f(x_0)=\frac{2x_0+a}{x_0-1} \Rightarrow \frac{2x_0+a}{x_0-1}=-7x_0+23 \Rightarrow 2x_0+a=(-7x_0+23)(x_0-1).$$

On obtient donc le système : $\begin{cases} 2+a=7(x_0-1)^2 \\ 2x_0+a=(-7x_0+23)(x_0-1). \end{cases}$

De la 1e de ces équations, on tire $a=7(x_0-1)^2-2$. Par substitution dans la 2e, on trouve :

$$2x_0+7(x_0-1)^2-2=(-7x_0+23)(x_0-1)$$
$$\Rightarrow 2x_0+7(x_0^2-2x_0+1)-2=-7x_0^2+7x_0+23x_0-23$$
$$\Rightarrow 2x_0+7x_0^2-14x_0+7-2=-7x_0^2+30x_0-23$$
$$\Rightarrow 7x_0^2-12x_0+5=-7x_0^2+30x_0-23 \Rightarrow 14x_0^2-42x_0+28=0$$
$$\Rightarrow x_0^2-3x_0+2=0 \Rightarrow (x_0-1)(x_0-2)=0$$
$\Rightarrow$ Soit $x_0=1$, soit $x_0=2$.

Or $x_0=1$ n'appartient pas au domaine de définition de f (division par 0).
On a ainsi $x_0=2$.
Avec $x_0=2$, on a $a=7(x_0-1)^2-2=7(2-1)^2-2=7\cdot 1^2-2=7-2=5$ et

$$f(x_0)=\frac{2x_0+a}{x_0-1}=\frac{2\cdot 2+5}{2-1}=\frac{9}{1}=9.$$

On obtient ainsi $a=5$ et le point de contact est $(2;9)$.

Exercice 6.39

La dérivée d'une fonction composée se calcule comme suit :
si $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$, alors $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (on appelle parfois f' la dérivée externe et g' la dérivée interne).

a. $y = (x^5+1)^4$: $y' = 4(x^5+1)^3 \cdot 5x^4 = 20x^4(x^5+1)^3$.

b. $y = (\sqrt{x}-1)^5$: $y' = 5(\sqrt{x}-1)^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5(\sqrt{x}-1)^4}{2\sqrt{x}} = \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^4}{2x}$ (pas de racines au dénominateur).

c. $y = (6x^3-5)^{-2}$: $y' = -2(6x^3-5)^{-3} \cdot 6 \cdot 3x^2 = -36x^2(6x^3-5)^{-3} = \frac{-36x^2}{(6x^3-5)^3}$.

d. $y = (2x^3-1)^8$: $y' = 8(2x^3-1)^7 \cdot 2 \cdot 3x^2 = 48x^2(2x^3-1)^7$.

e. $y = \sqrt{4x+3}$: $y' = \frac{1}{2\sqrt{4x+3}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+3}} = \frac{2\sqrt{4x+3}}{4x+3}$.

f. $y = \sin\left[\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right]$: ici, on a une composition de 3 fonctions : $y = f \circ g \circ h(x)$, avec $h(x) = \frac{2x-1}{x}$, $g(x) = x^2$ et $f(x) = \sin(x)$; on va avoir $y' = f'(g(h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$; on a
$h(x) = \frac{2x-1}{x} = \frac{u}{v}$ avec $u = 2x-1$ et $v = x \Rightarrow u' = 2$ et $v' = 1$
$\Rightarrow h'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2x-(2x-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x-2x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$;
$g'(x) = 2x$ et $f'(x) = \cos(x)$; ainsi $f'(g(h(x)) =$
$= \cos\left[\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right]$ et $g'(h(x)) = 2 \cdot \frac{2x-1}{x} = \frac{4x-2}{x}$;
ainsi $y' = f'(g(h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) =$
$= \cos\left[\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right] \cdot \frac{4x-2}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{4x-2}{x^3} \cos\left[\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right]$.

Exercice 6.40

L'équation de la tangente à $y=f(x)$ en $x=x_0$ est donnée par $y=mx+h$, où $m=f'(x_0)$ et h calculé avec le point $(x_0; f(x_0))$ (point de tangence).
L'équation de la normale à $y=f(x)$ en $x=x_0$ est donnée par $y=m'x+h'$, où $m'=-\frac{1}{m}$ et h' calculé avec le point $(x_0; f(x_0))$.

a. $y=f(x)=x\sin(x)$ en $x_0=\pi$: on a : $f(x_0)=\pi\sin(\pi)=0$; $f(x)=u\cdot v$ avec $u=x$ et $v=\sin(x) \Rightarrow u'=1$ et $v'=\cos(x)$
$\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'=1\cdot\sin(x)+x\cos(x)=$
$=\sin(x)+x\cos(x) \Rightarrow m=f'(x_0)=f'(\pi)=$
$=\sin(\pi)+\pi\cos(\pi)=0+\pi\cdot(-1)=-\pi$; on a alors $f(x_0)=mx_0+h \Rightarrow 0=-\pi\cdot\pi+h$
$\Rightarrow h=\pi^2$; l'équation de la tangente en $x_0=\pi$ est $y=-\pi x+\pi^2$;
de plus $m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-\pi}=\frac{1}{\pi}$; on a alors
$f(x_0)=m'x_0+h' \Rightarrow 0=\frac{1}{\pi}\cdot\pi+h' \Rightarrow h'=-1$;
l'équation de la normale en $x_0=\pi$ est $y=\frac{1}{\pi}x-1$.

b. $y=f(x)=x\sqrt{3x+1}$ en $x_0=5$: on a : $f(x_0)=5\sqrt{3\cdot5+1}=5\sqrt{16}=5\cdot4=20$;
$f(x)=u\cdot v$ avec $u=x$ et $v=\sqrt{3x+1} \Rightarrow u'=1$ et
$v'=\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\cdot3=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{3\sqrt{3x+1}}{2(3x+1)}=\frac{3\sqrt{3x+1}}{6x+2}$
$\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'=1\cdot\sqrt{3x+1}+x\cdot\frac{3\sqrt{3x+1}}{6x+2}=$
$=\sqrt{3x+1}\left(1+\frac{3x}{6x+2}\right)=\sqrt{3x+1}\,\frac{6x+2+3x}{6x+2}=\sqrt{3x+1}\,\frac{9x+2}{6x+2}$
$\Rightarrow m=f'(x_0)=f'(5)=\sqrt{3\cdot5+1}\,\frac{9\cdot5+2}{6\cdot5+2}=4\cdot\frac{47}{32}=\frac{47}{8}$;
on a alors $f(x_0)=mx_0+h \Rightarrow 20=\frac{47}{8}\cdot5+h$
$\Rightarrow h=20-\frac{47}{8}\cdot5=20-\frac{235}{8}=\frac{160}{8}-\frac{235}{8}=-\frac{75}{8}$;
l'équation de la tangente en $x_0=5$ est $y=\frac{47}{8}x-\frac{75}{8}$;
de plus $m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{47/8}=-\frac{8}{47}$; on a alors
$f(x_0)=m'x_0+h' \Rightarrow 20=-\frac{8}{47}\cdot5+h'$
$\Rightarrow h'=20+\frac{8}{47}\cdot5=20+\frac{40}{47}=\frac{940}{47}+\frac{40}{47}=\frac{980}{47}$;
l'équation de la normale en $x_0=\pi$ est
$y=-\frac{8}{47}x+\frac{980}{47}$.

Exercice 6.41

On a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On doit calculer $f'(x)$. On a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u=1$ et $v=1+x^2$. On a $u'=0$ et $v'=2x$,
d'où $f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{0.(1+x^2)-1.2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

a. $f'(2) = \frac{-2.2}{(1+2^2)^2} = \frac{-4}{5^2} = -\frac{4}{25}$.

b. $f'(x)=0 \Longrightarrow \frac{-2x}{(1+x^2)^2}=0 \Longrightarrow -2x=0 \Longrightarrow x=0$.

Exercice 6.42

On a la fonction $y = f(x) = \sqrt[4]{x^3+8}$.

$\frac{dy}{dx}$ signifie la dérivée de y par rapport à x. $\frac{dy}{dx}$ est une autre notation pour y' ou pour $f'(x)$.

On a $f'(x) = \left(\sqrt[4]{x^3+8}\right)' = \left(\left(x^3+8\right)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}\left(x^3+8\right)^{\frac{1}{4}-1} \cdot 3x^2 = \frac{3}{4}x^2\left(x^3+8\right)^{-\frac{3}{4}} =$

$$= \frac{3}{4}x^2 \cdot \frac{1}{(x^3+8)^{3/4}} = \frac{3}{4}x^2 \frac{1}{\left((x^3+8)^3\right)^{1/4}} = \frac{3}{4}x^2 \frac{1}{\sqrt[4]{(x^3+8)^3}}.$$

Ainsi la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en $x=2$ vaut $f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 \frac{1}{\sqrt[4]{(2^3+8)^3}} =$

$$= \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2^3} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Exercice 6.43

L'équation de la tangente à la courbe $y=f(x)=(x^2-5)^3$ en $x_0=2$ est donnée par $y=mx+h$, où $m=f'(x_0)$ et h calculé grâce au point $(x_0;f(x_0))$.

Avec $f(x)=(x^2-5)^3$, on a $f'(x)=3(x^2-5)^2\cdot 2x= 6x(x^2-5)^2$.

Ainsi $m=f'(x_0)=f'(2)=6\cdot 2(2^2-5)^2=12(-1)^2=12$.

L'équation de la tangente s'écrit donc $y=12x+h$.

On a $f(x_0)=f(2)=(2^2-5)^3=(-1)^3=-1$.

On doit ainsi avoir $-1=12\cdot 2+h \Rightarrow -1=24+h \Rightarrow h=-25$.

L'équation de la tangente est donc $y=12x-25$.

Exercice 6.44

L'équation de la tangente à la courbe $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ en x_0 est donnée par $y = mx+h$, où $m = f'(x_0)$ et h calculé grâce au point $(x_0; f(x_0))$.

Ici, on sait que l'ordonnée du point de tangence est 1. Cela signifie que $f(x_0) = 1$.

Avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$, on a $\frac{1}{\sqrt{x_0}-1} = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{x_0}-1 \Rightarrow 2 = \sqrt{x_0} \Rightarrow x_0 = 4$.

Avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{u}{v}$, on a $u=1$ et $v = \sqrt{x}-1 \Rightarrow u'=0$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{0\cdot(\sqrt{x}-1) - 1\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}.$$

Ainsi $m = f'(x_0) = f'(4) = -\frac{1}{2\sqrt{4}(\sqrt{4}-1)^2} = -\frac{1}{2\cdot 2(2-1)^2} = -\frac{1}{4}$.

L'équation de la tangente s'écrit donc $y = -\frac{1}{4}x+h$.

Le point de tangence étant $(4; 1)$, on doit avoir $1 = -\frac{1}{4}\cdot 4+h \Rightarrow 1 = -1+h$ $\Rightarrow h = 2$.

L'équation de la tangente est donc $y = -\frac{1}{4}x+2$

Exercice 6.45

a. $f(x)=(3x+1)^3 \Rightarrow f'(x)=3(3x+1)^2\cdot 3=9(3x+1)^2.$

b. $f(x)=\cos(2x) \Rightarrow f'(x)=-\sin(2x)\cdot 2=-2\sin(2x).$

c. $f(x)=\sqrt{8x^2-2x+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{8x^2-2x+3}}(8\cdot 2x-2)=\frac{16x-2}{2\sqrt{8x^2-2x+3}}=$
$$=\frac{8x-1}{\sqrt{8x^2-2x+3}}=\frac{(8x-1)\sqrt{8x^2-2x+3}}{8x^2-2x+3}.$$

d. $f(x)=-x^2+\frac{4}{x+3}=-x^2+4(x+3)^{-1} \Rightarrow f'(x)=-2x+4\cdot(-1)(x+3)^{-2}\cdot 1=$
$$=-2x-4(x+3)^{-2}=-2x-\frac{4}{(x+3)^2}.$$

e. $f(x)=(7x^3-2x)^4 \Rightarrow f'(x)=4(7x^3-2x)^3(7\cdot 3x^2-2)=4(7x^3-2x)^3(21x^2-2).$

f. $f(x)=\cos^3(x) \Rightarrow f'(x)=3\cos^2(x)(-\sin(x))=-3\cos^2(x)\sin(x).$

g. $f(x)=\frac{x}{(2x+5)^2}=\frac{u}{v}$ avec $u=x$ et $v=(2x+5)^2 \Rightarrow u'=1$ et $v'=2(2x+5)\cdot 2=$
$$=4(2x+5) \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{1\cdot(2x+5)^2-x\cdot 4(2x+5)}{((2x+5)^2)^2}=$$
$$=\frac{(2x+5)(2x+5-4x)}{(2x+5)^4}=\frac{-2x+5}{(2x+5)^3}.$$

h. $f(x)=\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f'(x)=4\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=2\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).$

i. $f(x)=\sqrt[5]{x^4}=(x^4)^{1/5}=x^{4/5} \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}=\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x^{1/5}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=$
$$=\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}.$$

j. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x}}=\frac{1}{(3x)^{1/2}}=(3x)^{-1/2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot 3=-\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{3}{2}}=$
$$=-\frac{3}{2}\,\frac{1}{(3x)^{3/2}}=-\frac{3}{2}\,\frac{1}{3x\cdot(3x)^{1/2}}=-\frac{1}{2x\sqrt{3x}}.$$

k. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\left(\frac{1(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}\right)=$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\;\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\;\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{(1-x)^2}\,\frac{(1-x)^{1/2}}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{(1-x)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}=$$
$$=\frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}}.$$

l. $f(x)=\sqrt[3]{\tan(x)}=(\tan(x))^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(\tan(x))^{\frac{1}{3}-1}\cdot(\tan(x))'=\frac{1}{3}(\tan(x))^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=$

$$= \frac{1}{3}\left(\tan(x)\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\tan(x)\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{3}\left(\tan(x)\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\cos^2(x)}$$ (puisque $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$) $= \dfrac{1}{3(\tan(x))^{2/3}\cos^2(x)} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\tan^2(x)}\cos^2(x)}$.

m. $f(x) = \dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = \sin(ax+b)$ et $v = \cos(cx+d) \Rightarrow u' = \cos(ax+b)\cdot a =$
$= a\cos(ax+b)$ et $v' = -\sin(cx+d)\cdot c = -c\sin(cx+d)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{a\cos(ax+b)\cos(cx+d) - \sin(ax+b)\cdot(-c\sin(cx+d))}{\cos^2(cx+d)} =$$
$$= \frac{a\cos(ax+b)\cos(cx+d) + c\sin(ax+b)\sin(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}.$$

n. $f(x) = \arcsin(x)$: remarquons tout d'abord que $\sin(\arcsin(x)) = x$; en dérivant cette relation, on obtient $\cos(\arcsin(x))\cdot(\arcsin(x))' = 1$, d'où $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$; on a donc $f'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$;

Or, on sait que $\cos^2(z)+\sin^2(z) = 1 \Rightarrow \cos^2(z) = 1-\sin^2(z)$
$\Rightarrow \cos(z) = \sqrt{1-\sin^2(z)}$; on obtient ainsi

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

o. $f(x) = \arccos(x)$: remarquons tout d'abord que $\cos(\arccos(x)) = x$; en dérivant cette relation, on obtient $-\sin(\arccos(x))\cdot(\arccos(x))' = 1$, d'où $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sin(\arccos(x))}$; on a donc $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin(\arccos(x))}$;

Or, on sait que $\cos^2(z)+\sin^2(z) = 1 \Rightarrow \sin^2(z) = 1-\cos^2(z)$
$\Rightarrow \sin(z) = \sqrt{1-\cos^2(z)}$; on obtient ainsi

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

p. $f(x) = \arctan(x)$: remarquons tout d'abord que $\tan(\arctan(x)) = x$; en outre, on a $(\tan(z))' = \left(\dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}\right)' = \dfrac{\cos(z)\cdot\cos(z) - \sin(z)\cdot(-\sin(z))}{\cos^2(z)} = \dfrac{\cos^2(z)+\sin^2(z)}{\cos^2(z)} =$
$= \dfrac{\cos^2(z)}{\cos^2(z)} + \dfrac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)} = 1 + \left(\dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}\right)^2 = 1+\tan^2(z)$; en dérivant $\tan(\arctan(x)) = x$, on obtient ainsi $\left(1+\tan^2(\arctan(x))\right)(\arctan(x))' = 1$
$\Rightarrow (1+x^2)(\arctan(x))' = 1 \Rightarrow (\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$; on a ainsi
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

q. $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = \arctan(x)$ et $v = x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{1+x^2}$ (d'après p.) et $v' = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x - \arctan(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2} =$$
$$= \frac{x-(1+x^2)\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}.$$

r. $f(x) = \arctan(\sqrt{x}) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (voir p.)
$$= \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{\sqrt{x}}{2x(x+1)}.$$

s. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ (voir p.)
$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

t. $f(x) = x\cdot\arcsin(x) = u\cdot v$ avec $u = x$ et $v = \arcsin(x) \Rightarrow u' = 1$ et $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ d'après n. $\Rightarrow f'(x) = u'v+uv' = 1\cdot\arcsin(x) + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$
$$= \arcsin(x) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}.$$

u. $f(x) = \sqrt{\arctan(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\cdot(\arctan(x))' =$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\cdot\frac{1}{1+x^2} \quad \text{(voir p.)}$$
$$= \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\arctan(x)}} = \frac{\sqrt{\arctan(x)}}{2(1+x^2)\arctan(x)}.$$

v. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)'$ (voir n.)
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+4}}}\left(\frac{1\cdot\sqrt{x^2+4} - x\left(\sqrt{x^2+4}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+4-x^2}{x^2+4}}}\left(\frac{\sqrt{x^2+4} - x\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x}{x^2+4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2+4}}}\left(\frac{\sqrt{x^2+4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}}\cdot\frac{\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\cdot\frac{\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} =$$
$$= \frac{4}{2(x^2+4)} = \frac{2}{x^2+4}.$$

Challenge. $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{(2x-1)(2x+1)^2}\right)^3 \Rightarrow f'(x) = 3\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{(2x-1)(2x+1)^2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{(2x-1)(2x+1)^2}\right)'$;

$\frac{\sqrt{2x+1}}{(2x-1)(2x+1)^2} = \frac{u}{v}$ avec $u = \sqrt{2x+1}$ et $v = (2x-1)(2x+1)^2$;

on a $u' = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ et, comme $v = f\cdot g$

avec $f = 2x-1$ et $g=(2x+1)^2$, on a $v' = f'g + fg' =$

$$= 2(2x+1)^2 + (2x-1)2(2x+1)\cdot 2 = 2(2x+1)\big(2x+1+2(2x-1)\big) =$$

$$= 2(2x+1)(2x+1+4x-2) = 2(2x+1)(6x-1)\ ;$$

ainsi $\left(\dfrac{\sqrt{2x+1}}{(2x-1)(2x+1)^2}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\cdot(2x-1)(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}\cdot 2(2x+1)(6x-1)}{\left((2x-1)(2x+1)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}(2x+1)\Big((2x-1)(2x+1) - (2x+1)\cdot 2(6x-1)\Big)}{(2x-1)^2(2x+1)^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}(2x+1)^2\big(2x-1-2(6x-1)\big)}{(2x-1)^2(2x+1)^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}(2x-1-12x+2)}{(2x-1)^2(2x+1)^2} = \frac{-10x+1}{\sqrt{2x+1}(2x-1)^2(2x+1)^2}\ ;$$

on obtient donc $f'(x) = 3\left(\dfrac{\sqrt{2x+1}}{(2x-1)(2x+1)^2}\right)^2 \cdot \dfrac{-10x+1}{\sqrt{2x+1}(2x-1)^2(2x+1)^2} =$

$$= 3\,\frac{2x+1}{(2x-1)^2(2x+1)^4}\cdot\frac{-10x+1}{\sqrt{2x+1}(2x-1)^2(2x+1)^2} =$$

$$= 3\,\frac{1}{(2x-1)^2(2x+1)^3}\cdot\frac{-10x+1}{\sqrt{2x+1}(2x-1)^2(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{3(-10x+1)}{\sqrt{2x+1}(2x-1)^4(2x+1)^5}.$$

Exercice 6.46

Pour déterminer les extremas d'une fonction f, on procède comme suit :

1) On détermine les points à tangente horizontale de f, c'est-à-dire on trouve les x tels que $f'(x)=0$;
2) Pour les x trouvés en 1), on calcule $f(x)$, ce qui nous donne les deux coordonnées de ces points ;
3) On fait un tableau de croissance pour f, ce qui nous permet de déterminer où elle est croissante et où elle est décroissante ;
4) Grâce au tableau de croissance du point 3), on peut alors donner la liste des extremums (locaux) de la fonction et dire s'ils sont des maximums (locaux) ou des minimums (locaux).

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 7$:

1) On a $f'(x) = 3x^2 - 3\cdot 2x - 45 = 3x^2 - 6x - 45$.
Les points à tangente horizontale sont les solutions de $3x^2 - 6x - 45 = 0$.
C'est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = -6$ et $c = -45$. On a alors $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot 3\cdot(-45) = 36 + 540 = 576$
$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 24$. Les solutions sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+24}{2\cdot 3} = \frac{30}{6} = 5$ et
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-24}{2\cdot 3} = \frac{-18}{6} = -3$.
Les points à tangente horizontale sont en $x_1 = 5$ et $x_2 = -3$.

2) Avec $x_1 = 5$, on a $f(x_1) = 5^3 - 3\cdot 5^2 - 45\cdot 5 + 7 = 125 - 75 - 225 + 7 = -168$.
Avec $x_2 = -3$, on a $f(x_2) = (-3)^3 - 3\cdot(-3)^2 - 45\cdot(-3) + 7 = -27 - 27 + 135 + 7 = 88$.
Les points à tangente horizontale ont donc pour coordonnées :
$(5 ; -168)$ et $(-3 ; 88)$.

3) On fait le tableau de croissance :

x		-3		5	
signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

4) Ainsi les extremums de f sont $(-3 ; 88)$ et $(5 ; -168)$.
$(-3 ; 88)$ est un maximum (local) et $(5 ; -168)$ est un minimum (local).

b. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$:

1) On a $f'(x) = 3\cdot 4x^3 - 8\cdot 3x^2 + 6\cdot 2x = 12x^4 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) =$
$= 12x(x-1)^2$.

Les points à tangente horizontale sont les solutions de $12x(x-1)^2=0$, c'est-à-dire sont $x_1=0$ et $x_2=1$.

2) Avec $x_1=0$, on a $f(x_1)=3\cdot0^4-8\cdot0^3+6\cdot0^2=0$.
Avec $x_2=1$, on a $f(x_2)=3\cdot1^4-8\cdot1^3+6\cdot1^2=3-8+6=1$.
Les points à tangente horizontale ont donc pour coordonnées : $(0;0)$ et $(1;1)$.

3) On fait le tableau de croissance :

x		0		1	
Signes de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$

4) Ainsi l'unique extremum de f est $(0;0)$ ($(1;1)$ est un point à tangente horizontale qui n'est ni un maximum, ni un minimum ; on le nomme point d'inflexion).

c. $f(x)=3x^5-20x^3+1$:

1) On a $f'(x)=3\cdot5x^4-20\cdot3x^2=15x^4-60x^2=15x^2(x^2-4)$.
Les points à tangente horizontale sont les solutions de $15x^2(x^2-4)=0$, c'est-à-dire $x_1=0$ et $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_2=2$ et $x_3=-2$.

2) Avec $x_1=0$, on a $f(x_1)=3\cdot0^5-20\cdot0^3+1=1$.
Avec $x_2=2$, on a $f(x_2)=3\cdot2^5-20\cdot2^3+1=3\cdot32-20\cdot8+1=96-160+1=-63$.
Avec $x_2=-2$, on a $f(x_3)=3\cdot(-2)^5-20\cdot(-2)^3+1=3\cdot(-32)-20\cdot(-8)+1=-96+160+1=$
$=65$.
Les points à tangente horizontale ont donc pour coordonnées : $(0;1)$, $(2;-63)$ et $(-2;65)$.

3) On fait le tableau de croissance :

x		-2		0		2	
signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

4) Ainsi les deux extremums de f sont $(-2;65)$ et $(2;-63)$ ($(0;1)$ est un point à tangente horizontale qui n'est ni un maximum, ni un minimum ; c'est un point d'inflexion).
$(-2;65)$ est un maximum (local) et $(2;-63)$ est un minimum (local).

d. $y=x^2+\frac{54}{x}$ $(x\neq0)$:

1) On a $f'(x)=2x+54\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=2x+54\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x-\frac{54}{x^2}$.

Les points à tangente horizontale sont les solutions de $2x - \frac{54}{x^2} = 0$ $(x \neq 0)$
$\Rightarrow 2x^3 - 54 = 0 \Rightarrow 2x^3 = 54 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3.$

2) Avec $x = 3$, on a $f(x) = 3^2 + \frac{54}{3} = 9 + 18 = 27.$
L'unique point à tangence horizontale a donc pour coordonnées : $(3; 27)$.

3) On fait le tableau de croissance :

x		0		3	
signes de $f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

4) Ainsi l'extremum unique de f est $(3; 27)$ et c'est un minimum (local).

e. $f(x) = x - \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$:

1) On a $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Les points à tangente horizontale sont les solutions de $1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$

2) Avec $x = \frac{1}{4}$, on a $f(x) = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$
L'unique point à tangente horizontale a donc pour coordonnées : $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$.

3) On fait le tableau de croissance :

x		0		$\frac{1}{4}$	
signes de $f'(x)$			$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$			$\searrow$	min	$\nearrow$

4) Ainsi l'extremum unique de f est $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ et c'est un minimum (local).

f. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(4 - x)$:

1) On a $f(x) = u \cdot v$ avec $u = x^{\frac{1}{3}}$ et $v = 4 - x \Rightarrow u' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ et $v' = -1$
$\Rightarrow f'(x) = u'v + uv' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(4 - x) + x^{\frac{1}{3}} \cdot (-1) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(4 - x) - x^{\frac{1}{3}} =$
$= x^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}(4 - x) - x\right) = x^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x - x\right) = x^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}x\right) =$
$= \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1 - x) = \frac{4(1 - x)}{3x^{2/3}}$ $(x \neq 0)$.

Les points à tangente horizontale sont les solutions de $\frac{4(1-x)}{3x^{2/3}} = 0$ $(x \neq 0)$
$\Rightarrow 4(1 - x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$

2) Avec $x = 1$, on a $f(x) = 1^{\frac{1}{3}}(4 - 1) = 1 \cdot 3 = 3.$
L'unique point à tangente horizontale a donc pour coordonnées $(1; 3)$

3) On fait le tableau de croissance :

x		0		1	
signes de $f'(x)$	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↗		↗	max	↘

4) Ainsi l'extremum unique de f est $(1; 3)$ et c'est un maximum (local).

Exercice 6.47

a. On a $-2x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{7}{4}}+x^{\frac{11}{4}}=x^{\frac{3}{4}}(-2+x+x^2)$.

Ainsi $x^{\frac{3}{4}}(-2+x+x^2)=0 \Rightarrow$ soit $x^{\frac{3}{4}}=0 \Rightarrow x=0$,

soit $-2+x+x^2=0 \Rightarrow x^2+x-2=0$

$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2$ et $x=1$.

Or $x=-2$ est impossible car on ne peut pas calculer $(-2)^{3/4}$ par exemple $\left((-2)^{3/4}=\right.$
$\left.=\left((-2)^{1/4}\right)^3=\left(\sqrt[4]{-2}\right)^3\right.$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$).

Les zéros de $-2x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{7}{4}}+x^{\frac{11}{4}}$ sont donc $x=0$ et $x=1$.

b. On a $-1{,}8\sqrt{x}+3x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x}(-1{,}8+3x)$.

Ainsi $\sqrt{x}(-1{,}8+3x)=0 \Rightarrow$ soit $\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$,

soit $-1{,}8+3x=0 \Rightarrow 3x=1{,}8 \Rightarrow x=0{,}6$

Les zéros de $-1{,}8\sqrt{x}+3x^{\frac{3}{2}}$ sont donc $x=0$ et $x=0{,}6$.

c. On a $-\frac{0{,}2}{x^{4/3}}-\frac{2}{x^{1/3}}-5x^{2/3}=-\frac{1}{x^{4/3}}(0{,}2+2x+5x^2)$.

Ainsi $-\frac{1}{x^{4/3}}(0{,}2+2x+5x^2)=0 \Rightarrow 0{,}2+2x+5x^2=0 \Rightarrow 5x^2+2x+0{,}2=0$
$\Rightarrow 25x^2+10x+1=0 \Rightarrow (5x+1)^2=0 \Rightarrow 5x+1=0 \Rightarrow 5x=-1$
$\Rightarrow x=-\frac{1}{5}$.

Le zéro de $-\frac{0{,}2}{x^{4/3}}-\frac{2}{x^{1/3}}-5x^{2/3}$ est donc $x=-\frac{1}{5}$.

d. On a $\frac{8}{x^{1/3}}-x^{8/3}=\frac{1}{x^{1/3}}(8-x^3)$.

Ainsi $\frac{1}{x^{1/3}}(8-x^3)=0 \Rightarrow 8-x^3=0 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$.

Le zéro de $\frac{8}{x^{1/3}}-x^{8/3}$ est donc $x=-2$.

Exercice 6.48

le tableau de variation (ou tableau de croissance) est un tableau qui permet de savoir où la fonction est croissante et où elle est décroissante. Pour le construire, il faut commencer par trouver les points à tangente horizontale, autrement dit où la dérivée de la fonction s'annule.

a. $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$: on a $f'(x) = 2x - 5$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$;

tableau de variation:

x		$\frac{5}{2}$	
signes de $f'(x)$	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

b. $y = f(x) = x^3 - 12x$: on a $f'(x) = 3x^2 - 12$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$
$\Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$;

tableau de variation:

x		-2		2	
signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

c. $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}(x-1)$: on a $f(x) = u \cdot v$ avec $u = x^{\frac{3}{2}}$ et $v = x - 1 \Rightarrow u' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ et $v' = 1$
$(x \geqslant 0)$
$\Rightarrow f'(x) = u'v + uv' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(x-1) + x^{\frac{3}{2}} \cdot 1 = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} =$
$= \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(5x-3)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(5x-3) = 0$
$\Rightarrow$ soit $x^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow x = 0$,
soit $5x - 3 = 0 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$;

tableau de variation:

x	//////	0		$\frac{3}{5}$	
signes de $f'(x)$	//////	0	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	//////		$\searrow$	min	$\nearrow$

d. $y = x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{7}{4}}$: on a $f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - 2 \cdot \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}}(3 - 14x)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow$
$(x \geqslant 0)$
$\frac{1}{4}x^{-1/4}(3 - 14x) = 0 \Rightarrow 3 - 14x = 0 \Rightarrow 14x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{14}$;

tableau de variation:

x	////	0		$\frac{3}{14}$	
signes de $f'(x)$	////		$+$	0	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	////		$\nearrow$	max	$\searrow$

e. $y = f(x) = x + \frac{3}{x}$: on a $f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 = 3$
$(x \neq 0)$ $\Rightarrow x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$;

tableau de croissance:

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$	////	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	////	$\searrow$	min	$\nearrow$

f. $y = f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$: on a $f(x) = \sqrt{x} + x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{3/2}} =$
$(x > 0)$ $= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$
$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1$;

tableau de croissance:

x	////	0		1	
signes de $f'(x)$	////		$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	////		$\searrow$	min	$\nearrow$

Exercice 6.49

On a $f(x)=\dfrac{(x-6)(x+2)(x-1)}{12}=\dfrac{(x^2-4x-12)(x-1)}{12}=\dfrac{x^3-5x^2-8x+12}{12}$.

Ainsi $f'(x)=\dfrac{3x^2-5.2x-8}{12}=\dfrac{3x^2-10x-8}{12}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-10x-8=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=3$, $b=-10$ et $c=-8$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4.3.(-8)=$
$=100+96=196 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=14$; les solutions sont $x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{10+14}{2.3}=\dfrac{24}{6}=4$ et
$x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{10-14}{2.3}=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}$.

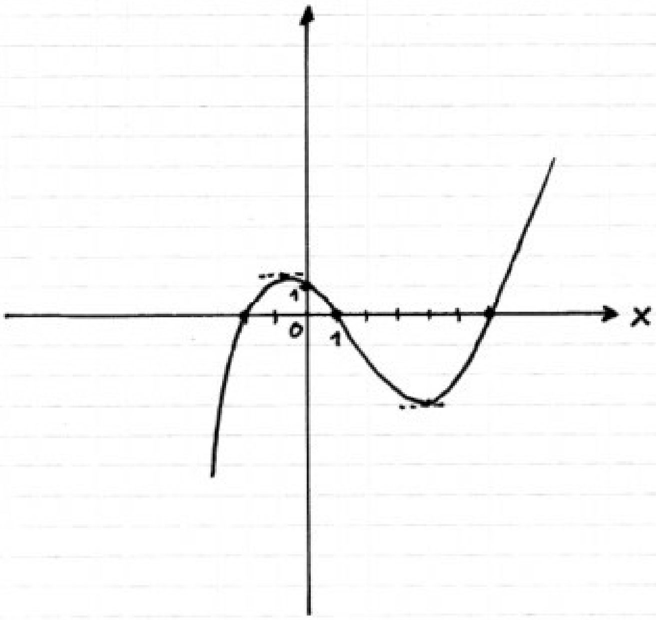
Les points à tangente horizontale sont donc $x=-\frac{2}{3}$ et $x=4$.

On peut alors établir le tableau de variation:

x		$-\frac{2}{3}$		4	
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Pour esquisser le graphe de f, on remarque que $f(x)=0$ si $x=6$, $x=-2$ et $x=1$,
$f(0)=\dfrac{-6.2.(-1)}{12}=\dfrac{12}{12}=1$, $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}\left(-\frac{2}{3}-6\right)\left(-\frac{2}{3}+2\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)=$
$=\frac{1}{12}\left(-\frac{20}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}\left(\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{400}{324}=\frac{100}{81}\cong 1{,}23$ et $f(4)=\dfrac{-2\cdot 6\cdot 3}{12}=-3$.

On a ainsi:



Les valeurs extrêmes des pentes des tangentes sont les extremums de $g(x)=f'(x)=$
$=\dfrac{3x^2-10x-8}{12}$.

On a $g'(x)=\dfrac{6x-10}{12}$ et $g'(x)=0 \Rightarrow 6x-10=0 \Rightarrow 6x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$.

Comme $g(x)$ est une parabole tournée vers le haut, on en déduit que $x=\frac{5}{3}$ est un minimum de g.

En outre $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty$.

Ainsi les pentes des tangentes à f sont maximales à $\pm\infty$ (et valent $+\infty$) et sont minimales en $x = \frac{5}{3}$ et elle vaut alors $g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{12}\left(3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 10 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 8\right) =$
$= \frac{1}{12}\left(\frac{25}{3} - \frac{50}{3} - 8\right) = \frac{1}{12} \cdot \left(-\frac{49}{3}\right) = -\frac{49}{36} \cong -1{,}36$.

Exercice 6.50

L'étude complète d'une fonction consiste à effectuer les points suivants :

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ;

b) Déterminer si la fonction est paire ou impaire ;

c) Déterminer si la fonction est périodique ;

d) Déterminer les intersections de la fonction avec l'axe Ox (zéros de la fonction) ;

e) Déterminer l'intersection de la fonction avec l'axe Oy ;

f) Etablir le tableau de signes de la fonction ;

g) Déterminer les asymptotes verticales, les sauts et les trous de la fonction ;

h) Déterminer le comportement de la fonction à proximité de ses asymptotes verticales ;

i) Déterminer les asymptotes non verticales de la fonction (asymptotes horizontales ou obliques) ;

j) Déterminer le comportement de la fonction lorsqu'elle s'approche de ses asymptotes non verticales ;

k) Déterminer les intersections de la fonction avec ses asymptotes non verticales ;

l) Calculer la première dérivée et déterminer son domaine ;

m) Déterminer les points à tangentes horizontales (zéros de la dérivée de la fonction) et calculer les valeurs de la fonction en ces points ;

n) Déterminer les pentes des tangentes aux points critiques du domaine de la dérivée de la fonction ;

o) Etablir le tableau de variations de la fonction ;

p) Déterminer la nature des points à tangentes horizontales (maximums ; minimums ; etc.) ;

q) Calculer la deuxième dérivée et déterminer son domaine ;

r) Déterminer les points d'inflexion (zéros de la deuxième dérivée de la fonction) et calculer les valeurs de la fonction en ces points et les valeurs de la première dérivée en ces points (pentes des tangentes au graphe) ;

s) Etablir le tableau de concavité de la fonction ;

t) Dessiner le graphique de la fonction en utilisant toutes les informations ci-dessus et en calculant d'autres points si nécessaire.

a. $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$.

b) Parité : On a $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire (son graphe est symétrique par rapport à $(0,0)$).

c) Périodicité : f ne contenant pas de fonctions trigonométriques ou de fonctions périodiques, f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow x^3-3x=0 \Rightarrow x(x^2-3)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x^2-3=0 \Rightarrow$ $x^2=3 \Rightarrow x=-\sqrt{3}$ et $x=\sqrt{3}$. Les zéro de f sont $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ et $x=\sqrt{3}$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=0^3-3\cdot 0=0$. f coupe Oy en $y=0$.

f) Tableau de signes:

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
signes de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Aucun, puisque $D=\mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: Une asymptote non verticale est donnée par $y=mx+h$, où $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2-3)=+\infty$. Ainsi m n'existe pas et f n'a pas d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: On a $f'(x)=3x^2-3$. Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1$ $\Rightarrow x=-1$ et $x=1$.

Valeurs de f: Avec $x=-1$, on a $f(x)=(-1)^3-3\cdot(-1)=-1+3=2$.
Avec $x=1$, on a $f(1)=1^3-3\cdot 1=1-3=-2$.

Ainsi les points à tangente horizontale sont $(-1;2)$ et $(1;-2)$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': il n'y a pas de points critiques puisque $D_{f'}=\mathbb{R}$.

o) Tableau de variation:

x		-1		1	
signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après le tableau de variation, $(-1;2)$ est un maximum (local) et $(1;-2)$ est un minimum (local).

q) Deuxième dérivée: On a $f''(x)=6x$. Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}$.

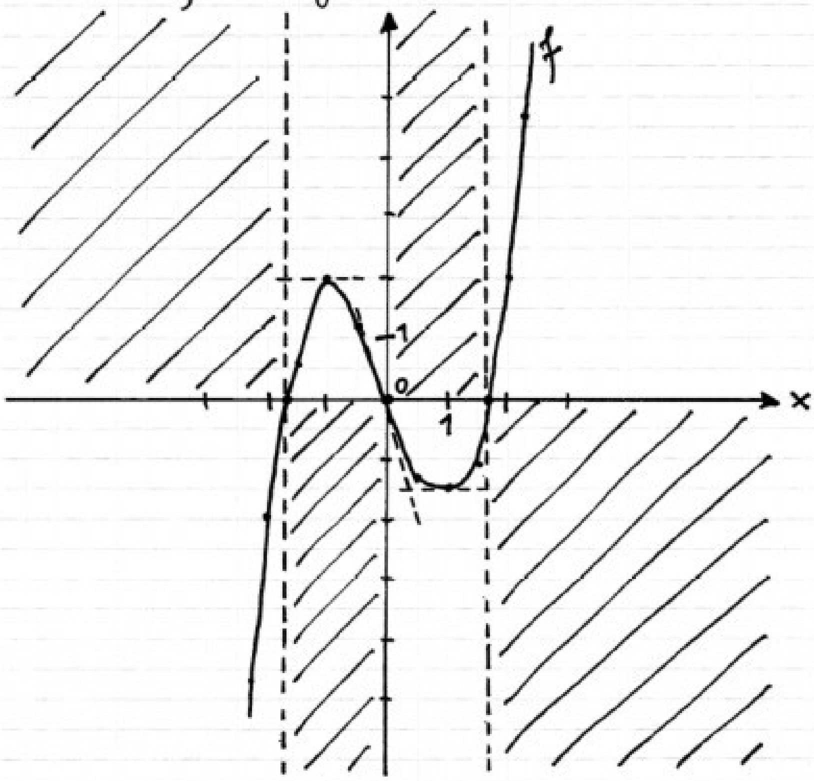
r) Points d'inflexion: $f''(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$.
Valeurs de f: Avec $x=0$, on a $f(x)=0^3-3\cdot 0=0$.
Valeurs de f': Avec $x=0$, on a $f'(x)=3\cdot 0^2-3=-3$.
La pente de f en $x=0$ est donc -3.

s) Tableau de concavité:

x		0	
Signes de $f''(x)$	$-$	0	$+$
Convexité ou concavité de $f(x)$	concave	P.I	convexe

Le point $(0;0)$ est un point d'inflexion (c'est là que la courbure change de signe).

t) Graphique:



x	$\pm 0{,}5$	$\pm 1{,}5$	± 2	$\pm 2{,}25$
$f(x)$	$\mp 1{,}375$	$\mp 1{,}125$	± 2	$\pm 4{,}64$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$

a) Domaine de définition: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ (si $x = 2$, $x - 2 = 0$).

b) Parité: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - (-x) + 2}{-x - 2} = \dfrac{x^2 + x + 2}{-x - 2} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$; ainsi $x^2 - x + 2 = 0$ n'a pas de solution $\Rightarrow f(x) = 0$ n'a pas de solution $\Rightarrow f$ n'a pas de zéros (en fait, on a $x^2 - x + 2 > 0$ car $x^2 - x + 2$ est une parabole tournée vers le haut).

e) <u>Intersection avec Oy:</u> $x=0 \Rightarrow f(x)=\frac{0^2-0+2}{0-2}=\frac{2}{-2}=-1$. f coupe Oy en $y=-1$.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x		2	
signe de $f(x)$	$-$	$\|$	$+$

g) <u>Asymptotes verticales, sauts, trous:</u> $x=2$ est un point critique de f.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\frac{x^2-x+2}{x-2}=\frac{2^2-2+2}{2_+-2}=\frac{4}{0_+}=+\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\frac{x^2-x+2}{x-2}=\frac{2^2-2+2}{2_--2}=\frac{4}{0_-}=-\infty$.

Ainsi $x=2$ est une asymptote verticale. Il n'y a pas de saut ou de trou.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=-\infty$ (voir g)).

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> Comme f est une fonction rationnelle $\left(\frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}\right)$, on effectue la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l}
x^2-x+2 & x-2 \\ \cline{2-2}
-(x^2-2x) & x+1 \\ \cline{1-1}
x+2 & \\
-(x-2) & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}$$

Ainsi $y=x+1$ est une asymptote oblique.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après i), on a $\frac{x^2-x+2}{x-2}=x+1+\frac{4}{x-2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x-2}="\frac{4}{-\infty}"=0_-$, la courbe s'approche de $y=x+1$ par en-dessous à $-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x-2}="\frac{4}{+\infty}"=0_+$, la courbe s'approche de $y=x+1$ par en-dessous à $+\infty$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> On doit avoir $y=\frac{x^2-x+2}{x-2}$ et $y=x+1$

$\Rightarrow \frac{x^2-x+2}{x-2}=x+1 \Rightarrow x^2-x+2=(x+1)(x-2) \Rightarrow x^2-x+2=x^2-x-2 \Rightarrow 2=-2$,

ce qui est impossible. Ainsi la courbe ne coupe pas son asymptote $y=x+1$.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}=\frac{u}{v}$ avec $u=x^2-x+2$ et $v=x-2$

$\Rightarrow u'=2x-1$ et $v'=1$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x+2)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x+2-x^2+x-2}{(x-2)^2}=$

$=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}-\{2\}$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow x^2-4x=0$

$\Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0$ et $x=4$.

<u>Valeurs de f:</u> Avec $x=0$, on a $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}=\frac{0^2-0+2}{-2}=\frac{2}{-2}=-1$.

Avec $x=4$, on a $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}=\frac{4^2-4+2}{4-2}=\frac{16-2}{2}=\frac{14}{2}=7$.

Ainsi les points à tangentes horizontales sont $(0;-1)$ et $(4;7)$.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> On a $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ainsi

$$\lim_{x\to 2} f'(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{2^2-4\cdot 2}{0+}=\frac{-4}{0+}=-\infty.$$

Ainsi $f'(2)=\lim_{x\to 2} f'(x)=-\infty$.

o) <u>Tableau de variation:</u>

x		0		2		4	
signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$	//	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	max	↘	↓	↘	min	↗

p) <u>Nature des points à tangentes horizontales:</u> D'après le tableau de variation $(0;-1)$ est un maximum (local) et $(4;7)$ est un minimum (local).

q) <u>Deuxième dérivée:</u> On a $f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{u}{v}$ avec $u=x^2-4x$ et $v=(x-2)^2$

$\Rightarrow u'=2x-4$ et $v'=2(x-2)$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)2(x-2)}{((x-2)^2)^2}=$$

$$=\frac{(x-2)\big((2x-4)(x-2)-2(x^2-4x)\big)}{(x-2)^4}=\frac{(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x)}{(x-2)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x}{(x-2)^3}=\frac{8}{(x-2)^3}$$

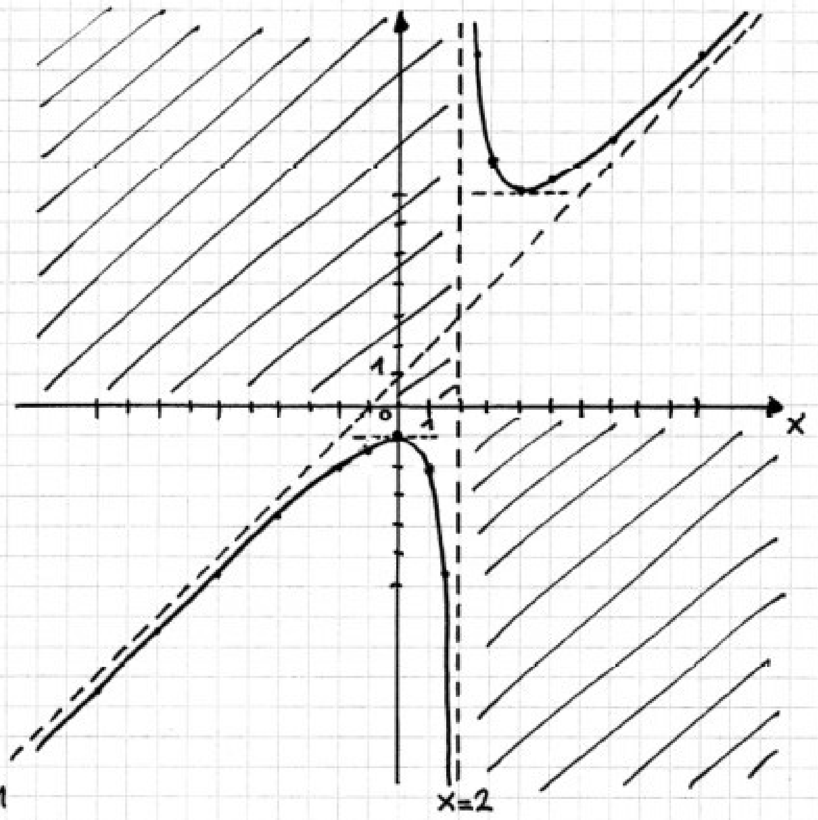
. Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x)=0 \Rightarrow \frac{8}{(x-2)^3}=0 \Rightarrow 8=0$, ce qui est impossible.
Ainsi f n'a pas de point d'inflexion.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x		2	
signes de $f''(x)$	$-$	//	$+$
concavité ou convexité de $f(x)$	⌒ concave	//	⌣ convexe

t) <u>Graphique:</u>



x	-2	-4	-6	-8	-10	-1	1	1,5	3	2,5	5	7	10
f(x)	-2	-3,67	-5,5	-7,4	-9,33	-1,33	-2	-5,5	8	11,5	7,33	8,8	11,5

c. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

a) <u>Domaine de définition:</u> On doit avoir $9-x^2 \geqslant 0 \Rightarrow 9 \geqslant x^2 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$.
Ainsi $D_f = [-3;3]$. Il ne sera jamais nécessaire de considérer $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$.

b) <u>Parité:</u> $f(-x)=\sqrt{9-(-x)^2}=\sqrt{9-x^2}=f(x) \Rightarrow f$ est paire (son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy).

c) <u>Périodicité:</u> f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) <u>Zéros:</u> $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{9-x^2}=0 \Rightarrow 9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=-3$ et $x=3$.

e) <u>Intersection avec Oy:</u> $x=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{9-0^2}=\sqrt{9}=3$. f coupe Oy en $y=3$.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x		-3		3	
signes de $f(x)$		0	+	0	

g) <u>Asymptotes verticales, sauts, trous:</u> Comme f est définie dans un intervalle fermé ($[-3;3]$), f n'a ni asymptotes verticales, ni sauts, ni trous dans cet intervalle.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: Aucune, puisque $D_f = [-3;3]$.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: $f(x) = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$.

Son domaine est $D_{f'} =]-3;3[$ (si $x = \pm 3$, on divise par 0).

m) Points à tangentes horizontales: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Valeurs de f: Avec $x = 0$, $f(x) = 3$ (voir e)).

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Les points critiques de f' sont les bords de $D_{f'} =]-3;3[$, c'est-à-dire -3 et 3. On a:

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{"+3"}{0_+} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{"-3"}{0+} = -\infty.$$

Ainsi $f'(-3) = +\infty$ et $f'(3) = -\infty$.

o) Tableau de variations:

x	//////	-3		0		3	//////
Signes de $f'(x)$	//////		$+$	0	$-$		//////
croissance ou décroissance de $f(x)$	//////	$\uparrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\downarrow$	//////

p) Nature des points à tangentes horizontales: D'après le tableau des variations $(0;3)$ est un maximum (local).

q) Deuxième dérivée: On a $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{u}{v}$ avec $u = -x$ et $v = \sqrt{9-x^2}$

$$\Rightarrow u' = -1 \text{ et } v' = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} =$$

$$= \frac{-1 \cdot \sqrt{9-x^2} - (-x) \cdot \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}}{(\sqrt{9-x^2})^2} = \frac{-\sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\left(-(9-x^2) - x^2\right)}{9-x^2} =$$

$$= \frac{-(9-x^2) - x^2}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = \frac{-9 + x^2 - x^2}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = \frac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}.$$ Son domaine est $D_{f''} =]-3;3[$.

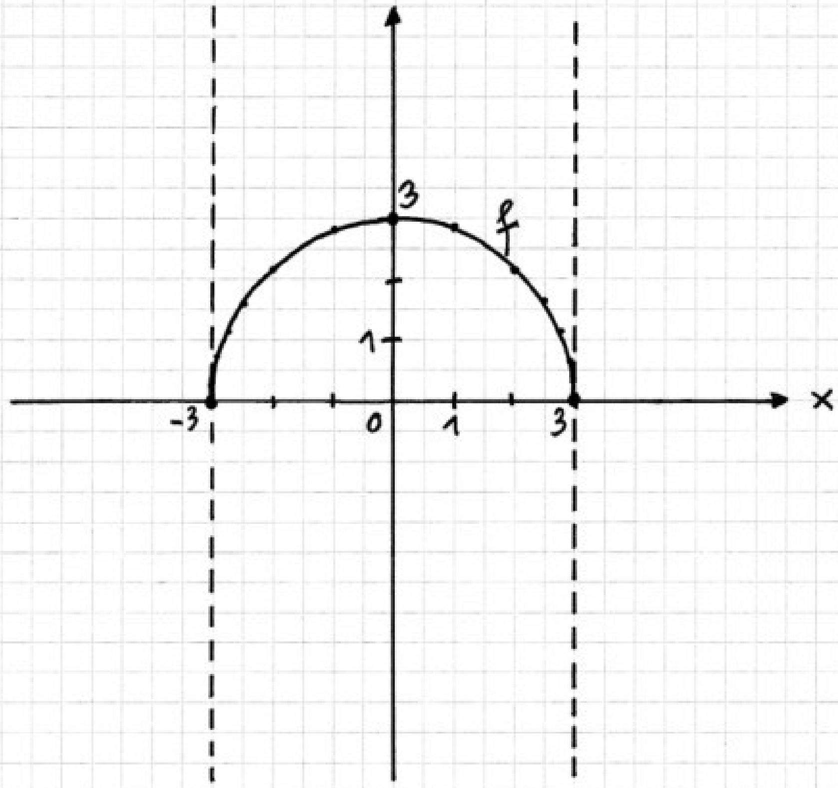
r) Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = 0 \Rightarrow -9 = 0$, ce qui est impossible.

Ainsi f n'a pas de point d'inflexion.

s) Tableau de concavité:

x	//////	-3		3	//////
Signes de $f''(x)$	//////		$-$		//////
concavité ou convexité de $f(x)$	//////		$\frown$ concave		//////

h) Graphique :



x	± 2	± 1	$\pm 2{,}5$	$\pm 2{,}75$	$\pm 2{,}9$
$f(x)$	2,24	2,83	1,66	1,2	0,77

d. $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2-7x+10}$

a) Domaine de définition: On a $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$. Ainsi, on doit avoir $x\neq 2$ et $x\neq 5$ (sinon on divise par 0). Par conséquent, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$.

b) Parité: $f(-x)=\dfrac{(-x+1)^3}{(-x)^2-7(-x)+10}=\dfrac{-(x-1)^3}{x^2+7x+10}\neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^3}{x^2-7x+10}=0 \Rightarrow (x+1)^3=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{(0+1)^3}{0^2-7\cdot 0+10}=\dfrac{1^3}{10}=\dfrac{1}{10}$.

f) Tableau de signes:

x		-1		2		5	
signes de $f(x)$	$-$	0	$+$	/////	$-$	/////	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: On doit considérer $x=2$ et $x=5$. On a:

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\dfrac{(x+1)^3}{x^2-7x+10}=\dfrac{"3^3"}{0+}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\dfrac{(x+1)^3}{x^2-7x+10}=\dfrac{"3^3"}{0-}=-\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \frac{(x+1)^3}{x^2-7x+10} = \text{"}\frac{6^3}{0_-}\text{"} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} \frac{(x+1)^3}{x^2-7x+10} =$

$= \text{"}\frac{6^3}{0_+}\text{"} = +\infty$. Ainsi $x=2$ et $x=5$ sont des asymptotes verticales.

Il n'y a ni sauts, ni trous.

h) Comportement asymptotique: On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} f(x) = +\infty$ (voir g)).

i) Asymptotes non verticales: On a $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2-7x+10} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-7x+10}$. On effectue la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+3x+1 & x^2-7x+10 \\ \cline{2-2} -(x^3-7x^2+10x) & x+10 \\ \cline{1-1} 10x^2-7x+1 & \\ -(10x^2-70x) & \\ \cline{1-1} 63x+1 & \end{array}$$

Ainsi $y = x+10$ est asymptote oblique.

j) Comportement asymptotique: D'après i), on a $f(x) = x+10+\frac{63x+1}{x^2-7x+10}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{63x+1}{x^2-7x+10} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(63+\frac{1}{x})}{x(x-7+\frac{10}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{63+\frac{1}{x}}{x-7+\frac{10}{x}} =$

$= \text{"}\frac{63+0_-}{-\infty-7+0_-}\text{"} = \text{"}\frac{63}{-\infty}\text{"} = 0_-$, la courbe s'approche de $y = x+10$ par en-dessous à $-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{63x+1}{x^2-7x+10} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{63+\frac{1}{x}}{x-7+\frac{10}{x}} = \text{"}\frac{63+0_+}{+\infty-7+0_+}\text{"} = 0_+$, la courbe s'approche de $y=x+10$ par en-dessous à $+\infty$.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: On doit avoir $y = \frac{(x+1)^3}{x^2-7x+10}$ et $y = x+10$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^3}{x^2-7x+10} = x+10 \Rightarrow (x+1)^3 = (x+10)(x^2-7x+10)$

$\Rightarrow x^3+3x^2+3x+1 = x^3-7x^2+10x+10x^2-70x+100$

$\Rightarrow x^3+3x^2+3x+1 = x^3+3x^2-60x+100 \Rightarrow 3x+1 = -60x+100$

$\Rightarrow 63x = 99 \Rightarrow x = \frac{99}{63} = \frac{11}{7}$.

Avec $x = \frac{11}{7}$, on a $y = \frac{11}{7}+10 = \frac{81}{7}$.

Ainsi la courbe coupe l'asymptote $y = x+10$ en $\left(\frac{11}{7} ; \frac{81}{7}\right)$.

l) Première dérivée: On a $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2-7x+10} = \frac{u}{v}$ avec $u = (x+1)^3$ et $v = x^2-7x+10$

$\Rightarrow u' = 3(x+1)^2$ et $v' = 2x-7 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} =$

$$= \frac{3(x+1)^2(x^2-7x+10)-(x+1)^3(2x-7)}{(x^2-7x+10)^2} = \frac{(x+1)^2\big(3(x^2-7x+10)-(x+1)(2x-7)\big)}{(x^2-7x+10)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2\big(3x^2-21x+30-(2x^2-7x+2x-7)\big)}{(x^2-7x+10)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2(3x^2-21x+30-2x^2+5x+7)}{(x^2-7x+10)^2} = \frac{(x+1)^2(x^2-16x+37)}{(x^2-7x+10)^2}. \quad \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{2;5\}.$$

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2(x^2-16x+37)}{(x^2-7x+10)^2} = 0$

$\Rightarrow (x+1)^2(x^2-16x+37) = 0 \Rightarrow$ soit $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$,

soit $x^2-16x+37 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-16$ et $c=37$; on a $\Delta = b^2-4ac =$
$= (-16)^2 - 4\cdot1\cdot37 = 256-148 = 108$
$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$; les solutions sont
$x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{16+6\sqrt{3}}{2\cdot1} = 8+3\sqrt{3}$ et
$x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{16-6\sqrt{3}}{2\cdot1} = 8-3\sqrt{3}$

On obtient ainsi $x=-1$, $x = 8-3\sqrt{3}$ et $x = 8+3\sqrt{3}$.

Valeurs de f: Avec $x=-1$, on a $f(x) = \dfrac{(-1+1)^3}{(-1)^2-7(-1)+10} = 0$.

Avec $x = 8-3\sqrt{3} \cong 2{,}8$, on a $f(x) \cong -31{,}2$.

Avec $x = 8+3\sqrt{3} \cong 13{,}2$, on a $f(x) \cong 31{,}2$.

Les points à tangentes horizontales sont donc $(-1;0)$, $(2{,}8;-31{,}2)$ et $(13{,}2;31{,}2)$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Les points critiques de f' sont $x=2$ et $x=5$. On a:

$$\lim_{x\to2} f'(x) = \lim_{x\to2}\frac{(x+1)^2(x^2-16x+37)}{(x^2-7x+10)^2} = \text{"}\frac{(2+1)^2(2^2-16\cdot2+37)}{0+}\text{"} = \text{"}\frac{9}{0+}\text{"} = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x\to5} f'(x) = \lim_{x\to5}\frac{(x+1)^2(x^2-16x+37)}{(x^2-7x+10)^2} = \text{"}\frac{(5+1)^2(5^2-16\cdot5+37)}{0+}\text{"} = \text{"}\frac{-648}{0+}\text{"} = -\infty.$$

Ainsi $f'(2) = +\infty$ et $f'(5) = -\infty$.

o) Tableau de variations:

x		-1		2		$2{,}8$		5		$13{,}2$	
Signes de $f'(x)$		0		‖		0		‖		0	
Croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	P.I	↗	↑	↗	max	↘	↓	↘	min	↗

p) Nature des points à tangentes horizontales: D'après le tableau de variation, $(-1;0)$ est un point d'inflexion (f est croissante si $x<-1$, est nulle en $x=-1$, et aussi croissante si $x>1$), $(2,8;-31,2)$ est un maximum (local) et $(13,2;31,2)$ est un minimum (local).

q) Deuxième dérivée: On a $f'(x)=\dfrac{(x+1)^2(x^2-16x+37)}{(x^2-7x+10)^2}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=(x+1)^2(x^2-16x+37)$ et $v=(x^2-7x+10)^2$. On a alors $u=f.g$ avec $f=(x+1)^2$ et $g=x^2-16x+37 \Rightarrow f'=2(x+1)$ et $g'=2x-16$. Ainsi

$$u'=f'g+fg'=2(x+1)(x^2-16x+37)+(x+1)^2(2x-16)=$$
$$=(x+1)\big(2(x^2-16x+37)+(x+1)(2x-16)\big)=$$
$$=(x+1)\big(2x^2-32x+74+2x^2-16x+2x-16\big)=$$
$$=(x+1)\big(4x^2-46x+58\big)=2(x+1)(2x^2-23x+29).$$

En outre $v'=2(x^2-7x+10)(2x-7)$.

On a par conséquent: $f''(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=$

$$=\frac{2(x+1)(2x^2-23x+29)(x^2-7x+10)^2-(x+1)^2(x^2-16x+37)\cdot 2(x^2-7x+10)(2x-7)}{\left((x^2-7x+10)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2(x+1)(x^2-7x+10)\big((2x^2-23x+29)(x^2-7x+10)-(x+1)(x^2-16x+37)(2x-7)\big)}{(x^2-7x+10)^4}=$$

$$=\frac{2(x+1)\big(2x^4-14x^3+20x^2-23x^3+161x^2+230x+29x^2-203x+290-(x^2-16x+37)(2x^2-5x-7)\big)}{(x^2-7x+10)^3}=$$

$$=\frac{2(x+1)\big(2x^4-37x^3+210x^2+27x+290-(2x^4-5x^3-7x^2-32x^3+80x^2+112x+74x^2-185x-259)\big)}{(x^2-7x+10)^3}=$$

$$=\frac{2(x+1)\big(2x^4-37x^3+210x^2+27x+290-(2x^4-37x^3+147x^2-73x-259)\big)}{(x^2-7x+10)^3}=$$

$$=\frac{2(x+1)\big(2x^4-37x^3+210x^2+27x+290-2x^4+37x^3-147x^2+73x+259\big)}{(x^2-7x+10)^3}=$$

$$=\frac{2(x+1)(63x^2+100x+549)}{(x^2-7x+10)^3}.$$ Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}-\{2;5\}$.

r) Points d'inflexion: $f''(x)=0 \Rightarrow \dfrac{2(x+1)(63x^2+100x+549)}{(x^2-7x+10)^3}=0$

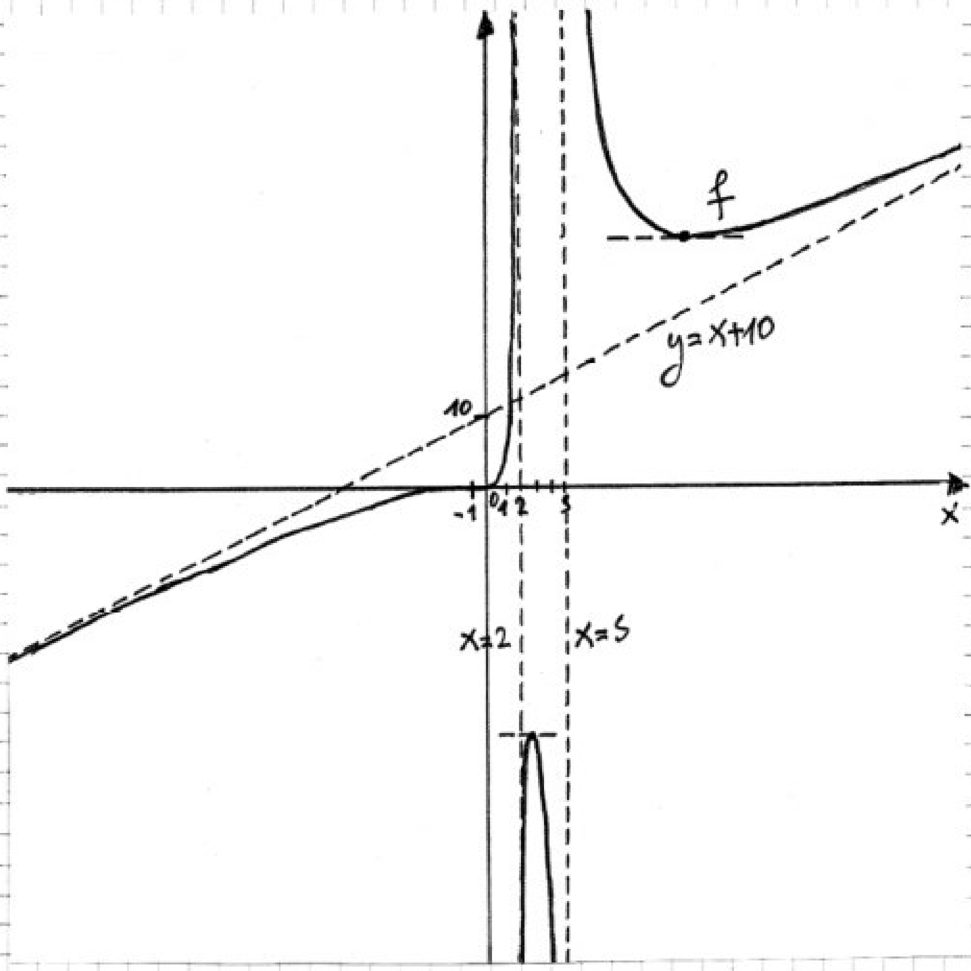
$\Rightarrow (x+1)(63x^2+100x+549)=0 \Rightarrow$ soit $x=-1$, soit $63x^2+100x+549=0$; or le discriminant de cette dernière équation est $\Delta=100^2-4\cdot 63\cdot 549=-128'348<0$, ce qui montre que $63x^2+100x+549$ n'est jamais nul.

L'unique point d'inflexion de f est donc en $x=-1$: c'est le point $(-1;0)$ déjà rencontré.

s) Tableau de concavité:

x		-1		2		5	
signes de $f''(x)$	$-$	0	$+$	////	$-$	////	$+$
concavité ou convexité de $f(x)$	concave		convexe	////	concave	////	convexe

t) Graphique:



e. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

a) Domaine de définition: On a $x^2-4=(x+2)(x-2)$. Ainsi, on doit avoir $x\neq -2$ et $x\neq 2$. Par conséquent, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

b) Parité: $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-4}=\dfrac{x^2}{x^2-4}=f(x) \Rightarrow f$ est paire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^2-4}=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{0^2}{0^2-4}=\dfrac{0}{-4}=0$.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x		-2		0		2	
signe de $f(x)$	$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$

g) <u>Asymptotes verticales, points, trous:</u> On doit considérer $x=-2$ et $x=2$. On a:

$$\lim_{\substack{x\to -2\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -2\\<}}\frac{x^2}{x^2-4}=\text{"}\frac{(-2)^2}{0_+}\text{"}=+\infty,\ \lim_{\substack{x\to -2\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -2\\>}}\frac{x^2}{x^2-4}=\text{"}\frac{(-2)^2}{0_-}\text{"}=-\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\<}}\frac{x^2}{x^2-4}=\text{"}\frac{2^2}{0_-}\text{"}=-\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to 2\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\>}}\frac{x^2}{x^2-4}=\text{"}\frac{2^2}{0_+}\text{"}=+\infty.$$

Ainsi $x=-2$ et $x=2$ sont des asymptotes verticales. Il n'y a ni points, ni trous.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> On a $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\<}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\>}} f(x)=-\infty$,
$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x)=+\infty$ (voir g)).

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> On effectue la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2-4 \\ \hline -(x^2-4) & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Ainsi $y=1$ est asymptote horizontale.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après i), on a $f(x)=1+\dfrac{4}{x^2-4}$.
Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x^2-4}=\text{"}\dfrac{4}{+\infty}\text{"}=0_+$, la courbe s'approchera de $y=1$ par en-dessus en $\pm\infty$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> On doit avoir $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ et $y=1$
$\Rightarrow \dfrac{x^2}{x^2-4}=1 \Rightarrow x^2=x^2-4 \Rightarrow 0=-4$, ce qui est impossible.
Ainsi la courbe ne coupe pas l'asymptote $y=1$.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=x^2$ et $v=x^2-4 \Rightarrow u'=2x$ et
$v'=2x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{2x\cdot(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$.
Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

m) <u>Points à tangentes horizontales:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow -8x=0 \Rightarrow x=0$.
<u>Valeurs de f:</u> Avec $x=0$, on a $f(x)=0$ (voir e)).

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Les points critiques de f' sont $x=-2$ et $x=2$.

On a : $\lim\limits_{x\to -2} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{``(-8)\cdot(-2)"}{0+} = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{``(-8)\cdot 2"}{0+} = -\infty.$

Ainsi $f'(-2) = +\infty$ et $f'(2) = -\infty$

o) Tableau de variations :

x		-2		0		2	
signe de $f'(x)$	$+$	////	$+$	0	$-$	////	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	↑ ↓	↗	max	↘	↓	↘

p) Nature des points à tangentes horizontales : D'après le tableau de variation, $(0;0)$ est un maximum (local).

q) Deuxième dérivée : On a $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = -8x$ et $v = (x^2-4)^2$

$\Rightarrow u' = -8$ et $v' = 2(x^2-4)\cdot 2x = 4x(x^2-4) \Rightarrow f''(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} =$

$= \dfrac{-8\cdot(x^2-4)^2 - (-8x)\cdot 4x(x^2-4)}{((x^2-4)^2)^2} = \dfrac{(x^2-4)\left(-8(x^2-4)+32x^2\right)}{(x^2-4)^4} =$

$= \dfrac{-8(x^2-4)+32x^2}{(x^2-4)^3} = \dfrac{-8x^2+32+32x^2}{(x^2-4)^3} = \dfrac{24x^2+32}{(x^2-4)^3} = \dfrac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$

Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

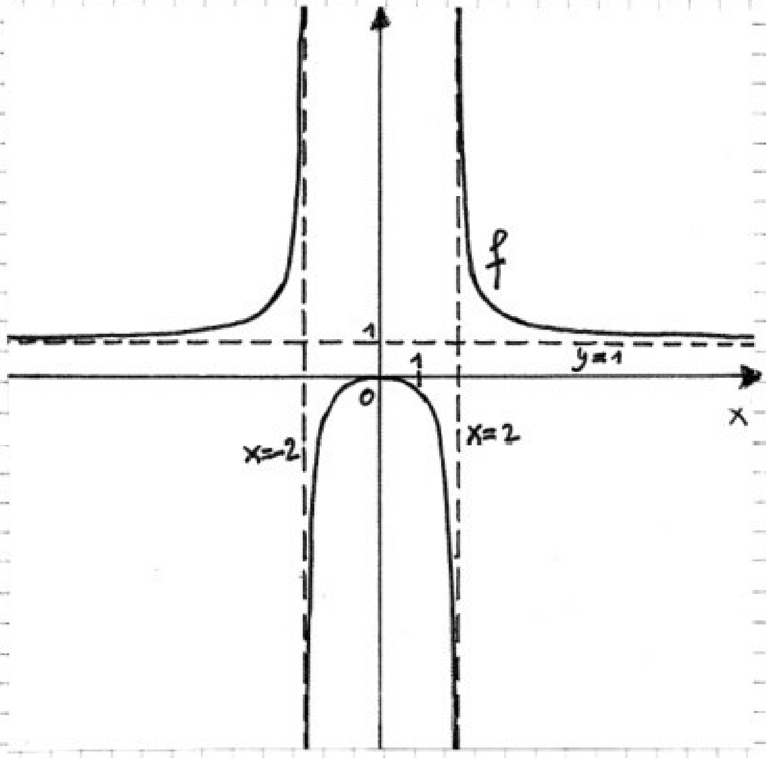
r) Points d'inflexion : $f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 8(3x^2+4) = 0 \Rightarrow 3x^2+4 = 0$;

Or $3x^2+4 \geq 4 > 0$; ainsi il n'y a pas de point d'inflexion.

s) Tableau de concavité :

x		-2		2	
signes de $f''(x)$	$+$	////	$-$	////	$+$
concavité ou convexité de $f(x)$	convexe	////	concave	////	convexe

t) Graphique :



f. $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{4x^2-4x+1}$

a) <u>Domaine de définition:</u> On a $4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.
Par conséquent, $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) <u>Parité:</u> $f(-x)=\dfrac{3(-x)^2-5(-x)+2}{4(-x)^2-4(-x)+1}=\dfrac{3x^2+5x+2}{4x^2+4x+1}\neq \pm f(x) \Rightarrow$ f n'est ni paire, ni impaire.

c) <u>Périodicité:</u> f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autre), f n'est pas périodique.

d) <u>Zéros:</u> $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{3x^2-5x+2}{4x^2-4x+1}=0 \Rightarrow 3x^2-5x+2=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=3$, $b=-5$ et $c=2$. On a $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4.3.2=$ $=25-24=1 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=1$. Les solutions sont $x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5+1}{2.3}=\dfrac{6}{6}=1$ et $x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=$ $=\dfrac{5-1}{2.3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$. Par conséquent, les zéros de f sont $x=1$ et $x=\frac{2}{3}$ et on peut écrire le dénominateur de f comme $3x^2-5x+2=3(x-1)(x-\frac{2}{3})=(x-1)(3x-2)$.

e) <u>Intersection avec Oy:</u> $x=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3.0^2-5.0+2}{4.0^2-4.0+2}=\dfrac{2}{2}=1$.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{2}{3}$	
Signes de f(x)	+	//	+	0	−	0	+

g) <u>Asymptotes verticales, points, trous:</u> On doit considérer $x=\frac{1}{2}$. On a:
$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ <}}\dfrac{3x^2-5x+2}{4x^2-4x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ <}}\dfrac{(x-1)(3x-2)}{(2x-1)^2}=\dfrac{``(\frac{1}{2}-1)(3\cdot\frac{1}{2}-2)"}{0+}=\dfrac{``-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})"}{0+}=+\infty$ et
$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ >}}\dfrac{3x^2-5x+2}{4x^2-4x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ >}}\dfrac{(x-1)(3x-2)}{(2x-1)^2}=\dfrac{``(\frac{1}{2}-1)(3\cdot\frac{1}{2}-2)"}{0+}=\dfrac{``-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})"}{0+}=+\infty$.

Ainsi $x=\frac{1}{2}$ est une asymptote verticale. Il n'y a pas de points, ni de trous.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après g), on a $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} f(x) = +\infty$.

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> On effectue la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-5x+2 & 4x^2-4x+1 \\ \cline{2-2} -\left(3x^2-3x+\frac{3}{4}\right) & \frac{3}{4} \\ \cline{1-1} -2x+\frac{5}{4} & \end{array}$$

Ainsi $y=\frac{3}{4}$ est une asymptote horizontale.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après i), on a $f(x)=\frac{3}{4}+\frac{-2x+\frac{5}{4}}{4x^2-4x+1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x+\frac{5}{4}}{4x^2-4x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(-2+\frac{5}{4x}\right)}{x\left(4x-4+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{5}{4x}}{4x-4+\frac{1}{x}}=\frac{\text{"}-2+0\text{"}}{-\infty-4+0}=0_+$,

la courbe s'approchera de $y=\frac{3}{4}$ par en-dessus à $-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x+\frac{5}{4}}{4x^2-4x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2+\frac{5}{4x}\right)}{x\left(4x-4+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2+\frac{5}{4x}}{4x-4+\frac{1}{x}}=\frac{\text{"}-2+0\text{"}}{+\infty-4+0}=0_-$,

la courbe s'approchera de $y=\frac{3}{4}$ par en-dessous à $+\infty$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> On doit avoir $y=\frac{3x^2-5x+2}{4x^2-4x+1}$ et $y=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{3x^2-5x+2}{4x^2-4x+1}=\frac{3}{4} \Rightarrow 3x^2-5x+2=\frac{3}{4}(4x^2-4x+1) \Rightarrow 3x^2-5x+2=3x^2-3x+\frac{3}{4}$

$\Rightarrow -5x+2=-3x+\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{5}{4}=2x \Rightarrow x=\frac{5}{8}$.

Avec $x=\frac{5}{8}$, on a $f(x)=\frac{3\left(\frac{5}{8}\right)^2-5\cdot\frac{5}{8}+2}{4\left(\frac{5}{8}\right)^2-4\cdot\frac{5}{8}+1}=\frac{3/64}{1/16}=\frac{3}{4}$.

Ainsi la courbe coupe son asymptote horizontale en $\left(\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right)$.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f(x)=\frac{3x^2-5x+2}{4x^2-4x+1}=\frac{3x^2-5x+2}{(2x-1)^2}=\frac{u}{v}$ avec $u=3x^2-5x+2$ et $v=(2x-1)^2$. Ainsi $u'=6x-5$ et $v'=2(2x-1)\cdot 2=4(2x-1)$.

On a alors $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(6x-5)(2x-1)^2-(3x^2-5x+2)\cdot 4(2x-1)}{\left((2x-1)^2\right)^2}=$

$=\frac{(2x-1)\left((6x-5)(2x-1)-4(3x^2-5x+2)\right)}{(2x-1)^4}=\frac{(6x-5)(2x-1)-4(3x^2-5x+2)}{(2x-1)^3}=$

$=\frac{12x^2-6x-10x+5-12x^2+20x-8}{(2x-1)^3}=\frac{4x-3}{(2x-1)^3}$.

Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

m) <u>Points à tangentes horizontales:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x-3}{(2x-1)^3}=0 \Rightarrow 4x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$.

<u>Valeurs de f:</u> Avec $x=\frac{3}{4}$, on a $f(x)=\frac{3\left(\frac{3}{4}\right)^2-5\left(\frac{3}{4}\right)+2}{4\left(\frac{3}{4}\right)^2-4\cdot\frac{3}{4}+1}=\frac{-1/16}{1/4}=-\frac{1}{4}$.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> le point critique de f' est $x=\frac{1}{2}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ <}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ <}} \frac{4x-3}{(2x-1)^3} = \frac{"4.\frac{1}{2}-3"}{0_-} = \frac{"-1"}{0_-} = +\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ >}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ >}} \frac{4x-3}{(2x-1)^3} = \frac{"4.\frac{1}{2}-3"}{0_+} = \frac{"-1"}{0_+} = -\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 1/2\\ <}} f'(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1/2\\ >}} f'(x)=-\infty$.

o) <u>Tableau de variations:</u>

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$	
signes de $f'(x)$	$+$	////	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	↑↓	↘	min	↗

p) <u>Nature des points à tangentes horizontales:</u> D'après le tableau des variations $\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{4}\right)$ est un minimum (local).

q) <u>Deuxième dérivée:</u> On a $f'(x)=\frac{4x-3}{(2x-1)^3}=\frac{u}{v}$ avec $u=4x-3$ et $v=(2x-1)^3$.

Ainsi $u'=4$ et $v'=3(2x-1)^2\cdot 2=6(2x-1)^2$ et

$$f''(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{4(2x-1)^3-(4x-3).6(2x-1)^2}{((2x-1)^3)^2}=\frac{(2x-1)^2(4(2x-1)-6(4x-3))}{(2x-1)^6}=$$

$$=\frac{4(2x-1)-6(4x-3)}{(2x-1)^4}=\frac{8x-4-24x+18}{(2x-1)^4}=\frac{-16x+14}{(2x-1)^4}.$$

Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-16x+14}{(2x-1)^4}=0 \Rightarrow -16x+14=0 \Rightarrow x=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$.

<u>Valeurs de f:</u> En $x=\frac{7}{8}$, on a $f(x)=\frac{3(\frac{7}{8})^2-5.\frac{7}{8}+2}{4(\frac{7}{8})^2-4.\frac{7}{8}+1}=\frac{-5/64}{9/16}=-\frac{5}{36}$

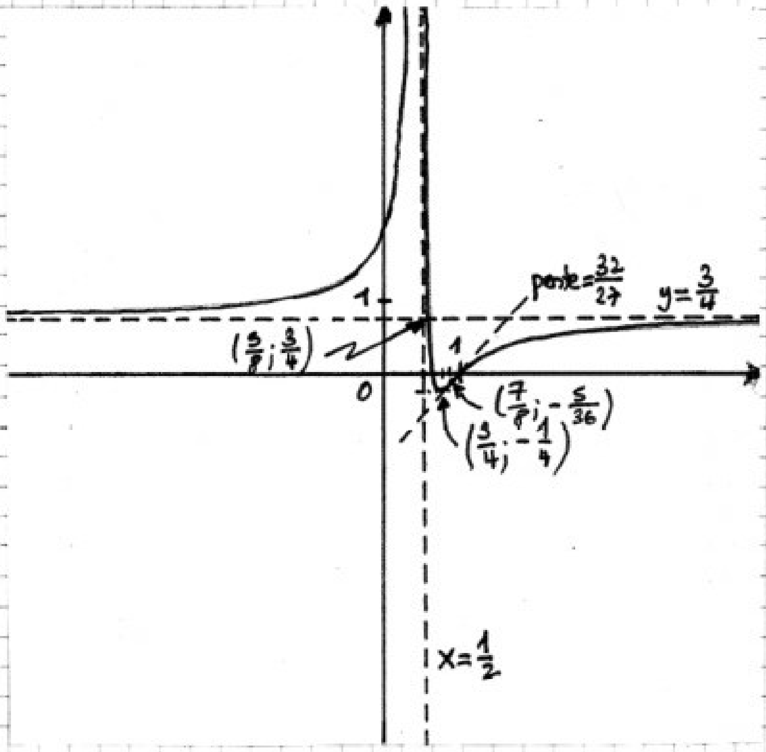
<u>Valeurs de f':</u> En $x=\frac{7}{8}$, on a $f'(x)=\frac{4.\frac{7}{8}-3}{(2.\frac{7}{8}-1)^3}=\frac{1/2}{27/64}=\frac{32}{27}$.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{8}$	
signes de $f''(x)$	$+$	////	$+$		$-$
Concavité ou convexité de $f(x)$	convexe	////	convexe	P.I	concave

D'après r), $\left(\frac{7}{8};-\frac{5}{36}\right)$ est un point d'inflexion (P.I.) et la pente de la tangente de f en $x=\frac{7}{8}$ est $\frac{32}{27}$.

f) Graphique:



g. $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x+1}{x-1}}$.

a) Domaine de définition: On doit avoir $\frac{4x+1}{x-1} \geq 0$ et $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Il faut étudier le signe de $\frac{4x+1}{x-1}$: $4x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$ et $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Ainsi

x		$-\frac{1}{4}$		1	
Signes de $4x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Signes de $x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Signes de $\frac{4x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	////	$+$

Ainsi $\frac{4x+1}{x-1} \geq 0$ et $x \neq -1$, si $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{4}\right] \cup \left]1 ; +\infty\right[$.

On en conclut que $D_f = \left]-\infty ; -\frac{1}{4}\right] \cup \left]1 ; +\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \left]-\frac{1}{4} ; 1\right]$.

b) Parité: $f(-x) = \sqrt{\dfrac{-4x+1}{-x-1}} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (fonctions trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{4x+1}{x-1}} = 0 \Rightarrow \dfrac{4x+1}{x-1} = 0 \Rightarrow 4x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$.

e) Intersection avec Oy: Comme $x = 0$ n'appartient pas à D_f, il n'y a pas d'intersection avec l'axe Oy.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x		$-\frac{1}{4}$		1	
signe de $f(x)$	$+$	0	//////	$\|\|$	$+$

g) <u>Asymptote verticales, paute, trous:</u> On doit considérer $x=-\frac{1}{4}$ et $x=1$.

En $x=-\frac{1}{4}$, on a $f(x)=0 \Longrightarrow$ La courbe atteint 0 en $x=-\frac{1}{4}$ et ne continue pas à droite.

En $x=1$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}=\sqrt{\frac{4+1}{0+}}=+\infty$. On ne cherche pas $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ car $x<1$ n'appartient pas à Df.

Ainsi $x=1$ est une asymptote verticale (avec $x>1$). Il n'y a ni paute, ni trous.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après g), on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$.

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> Si une asymptote non verticale existe, elle est de la forme $y=mx+h$, où $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ et, où m existe, $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$.

On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{4x+1}{x^2(x-1)}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{x-1}}$ "$=$" $\sqrt{\frac{0+0}{\pm\infty}}=0$.

Ainsi $m=0$ si $x\to+\infty$ et si $x\to-\infty$.

De plus, $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-0.x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x(4+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}=\sqrt{\frac{4}{1}}=\sqrt{4}=2.$

Ainsi $y=2$ est une asymptote horizontale (à $+\infty$ et à $-\infty$).

j) <u>Comportement asymptotique:</u> Il faut étudier le signe de $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-2)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x-1}}-2\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1})(\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x-1})}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+1-4(x-1)}{\sqrt{x-1}(\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x-1})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+1-4x+4}{\sqrt{x-1}(\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x-1})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x-1}(\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x-1})}=$

$=$ "$\frac{5}{+\infty}$" $=0_+$. Ainsi $f(x)$ s'approche de $y=2$ par en-dessus à $+\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{-4x-1}{-x+1}}-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{-4x-1}}{\sqrt{-x+1}}-2\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-4x-1}-2\sqrt{-x+1}}{\sqrt{-x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{-4x-1}-2\sqrt{-x+1})(\sqrt{-4x-1}+2\sqrt{-x+1})}{\sqrt{-x+1}(\sqrt{-4x-1}+2\sqrt{-x+1})}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x-1-4(-x+1)}{\sqrt{-x+1}(\sqrt{-4x-1}+2\sqrt{-x+1})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x-1+4x-4}{\sqrt{-x+1}(\sqrt{-4x-1}+2\sqrt{-x+1})}=$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-5}{\sqrt{-x+1}\left(\sqrt{-4x-1}+2\sqrt{-x+1}\right)} = \text{"}\frac{-5}{+\infty}\text{"} = 0_-$. Ainsi $f(x)$ s'approche de $y=2$ par en-dessous à $-\infty$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> On doit avoir $y = \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}$ et $y=2$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}} = 2 \Rightarrow \frac{4x+1}{x-1} = 4 \Rightarrow 4x+1 = 4(x-1) \Rightarrow 4x+1 = 4x-1 \Rightarrow 1 = -1$

$\Rightarrow$ impossible $\Rightarrow$ la fonction ne coupe pas son asymptote horizontale.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f(x) = \sqrt{g(x)}$. Ainsi $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{\sqrt{4g(x)}} \cdot g'(x) =$

$= \sqrt{\frac{1}{4g(x)}} \cdot g'(x)$. On a $g(x) = \frac{4x+1}{x-1} \Rightarrow 4g(x) = \frac{4(4x+1)}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{4g(x)} = \frac{x-1}{4(4x+1)}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4g(x)}} = \sqrt{\frac{x-1}{4(4x+1)}}$. De plus $g(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 4x+1$ et $v = x-1$.

On a $u' = 4$ et $v' = 1$. Ainsi $g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{4(x-1)-(4x+1)}{(x-1)^2} = \frac{4x-4-4x-1}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$.

Par conséquent, $f'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4(4x+1)}} \cdot \frac{-5}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt{x-1}\cdot(-5)}{\sqrt{4(4x+1)}\cdot(x-1)^2} = \frac{-5(x-1)^{1/2}}{2\sqrt{4x+1}\,(x-1)^2} =$

$= \frac{-5}{2\sqrt{4x+1}\,(x-1)^{3/2}}$. Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{4}; 1\right]$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5}{2\sqrt{4x+1}\,(x-1)^{3/2}} = 0 \Rightarrow -5 = 0$

impossible $\Rightarrow$ il n'y a pas de points à tangente horizontale.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Le point critique de f' est $x = -\frac{1}{4}$

(f appartient à D_f, mais pas à $D_{f'}$).

On a $f'(-\frac{1}{4}) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -\frac{1}{4}} f'(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -\frac{1}{4}} \frac{-5}{2\sqrt{4x+1}\,(x-1)^{3/2}} = -\infty$.

Ainsi la pente de la tangente en $x = -\frac{1}{4}$ est $-\infty$.

o) <u>Tableau de variations:</u>

x		$-\frac{1}{4}$		1	
signe de $f'(x)$	$-$	$-\infty$			$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↘				↘

p) <u>Nature des points à tangentes horizontales:</u> /

q) r) s) <u>Deuxième dérivée:</u> f' étant une fonction assez compliquée, on ne calcule pas la 2e dérivée.

t) <u>Graphique:</u>