Série 4
Analyse
Applications des dérivées
Corrigé des exercices

Exercice 1

Si h = hauteur du cylindre et r = rayon de base du cylindre, la surface totale du cylindre est donnée par $2\pi rh + 2\pi r^2$.

On sait que le volume du cylindre vaut $500\,ml = 0{,}5\,l = 0{,}5\,dm^3 = 500\,cm^3$.

Ainsi, on a $\pi r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$.

La surface totale du cylindre est donc donnée par la fonction $f(r) = 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2} + 2\pi r^2 =$
$= \frac{1000}{r} + 2\pi r^2$. On doit chercher r pour que f soit minimum.

Avec $f(r) = \frac{1000}{r} + 2\pi r^2$, on a $f'(r) = -\frac{1000}{r^2} + 4\pi r$.

$f'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{1000}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow -1000 + 4\pi r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{1000}{4\pi} \cong 79{,}5775$
$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}} \cong 4{,}3$ cm.

Vérifions que $r \cong 4{,}3$ cm est bien un minimum pour f par un tableau de croissance:

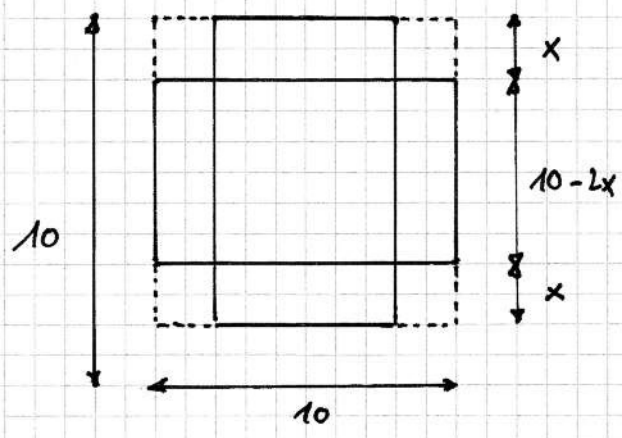
r		4,3	
$f'(r)$	—	0	+
$f(r)$	↘	min	↗

Avec $r \cong 4{,}3$ cm, on a $h = \frac{500}{\pi \cdot r^2} \cong 8{,}6$.

Ainsi, si $r \cong 4{,}3$ cm et $h \cong 8{,}6$ cm, la surface totale du cylindre est minimale.
Cette surface vaut alors $2\pi rh + 2\pi r^2 \cong 348{,}73\ cm^2$.

Exercice 2

On a la situation suivante :



Le volume du parallélipipède est donné par $(10-2x)^2 \cdot x$.
Il faut trouver x $(0<x<5)$ pour que le volume soit maximal, autrement dit chercher x $(0<x<5)$ pour que $f(x) = (10-2x)^2 \cdot x = (100-40x+4x^2)\cdot x =$
$= 4x^3 - 40x^2 + 100x$ soit maximum

On a $f'(x) = 12x^2 - 80x + 100$.

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 12x^2 - 80x + 100 = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 20x + 25 = 0$

$\Longrightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400-300}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \begin{cases} 5 \longrightarrow \text{exclu, car volume} = 0 \\ \frac{5}{3} \end{cases}$

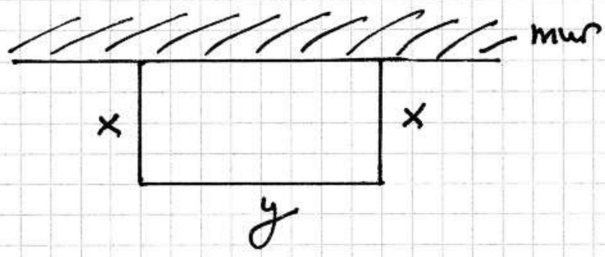
Tableau de croissance :

x	0		$\frac{5}{3}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Ainsi, si le côté des carrés enlevés vaut $\frac{5}{3}$, le volume de la boîte sera maximal.

Exercice 3

On a la situation suivante:



On a $2x+y=200 \Rightarrow y=200-2x$.

L'aire de l'enclos est $xy = x(200-2x) = -2x^2+200x$.

On doit donc chercher x tel que $f(x) = -2x^2+200x$ soit maximal.

$f(x) = -2x^2+200x \Rightarrow f'(x) = -4x+200$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -4x+200=0 \Rightarrow 4x=200 \Rightarrow x=50$ m.

Tableau de croissance:

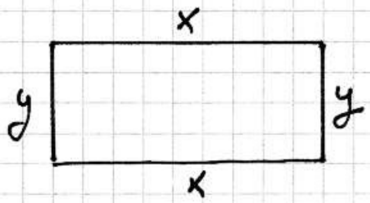
x		50	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Avec $x=50$m, l'aire de l'enclos est maximale et vaut $-2x^2+200x =$

$= -2\cdot 50^2 + 200\cdot 50 = -5000 + 10'000 = 5000\,m^2$.

Exercice 4

On a la situation suivante :



On a $2x+2y=1 \Rightarrow x+y=0,5 \Rightarrow y=0,5-x$.

L'aire du rectangle vaut $xy = x(0,5-x) = -x^2+0,5x$.

On doit donc chercher x tel que $f(x)=-x^2+0,5x$ est maximum.

On a $f'(x) = -2x+0,5$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -2x+0,5=0 \Rightarrow 2x=0,5 \Rightarrow x=0,25\text{ m}$.

Tableau de croissance :

x		$0,25$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Ainsi, si $x=0,25$m, la surface enfermée par la ficelle est maximum.

Exercice 5

On a $f(x) = -x^3 + 4x$.

a) $f(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 4x = 0 \Rightarrow -x(x^2-4) = 0 \Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $x^2 - 4 = 0$
$\Rightarrow x = \pm 2$.

Tableau de signes :

x		-2		0		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

b) $f'(x) = -3x^2 + 4$.

points à tangente horizontale : $f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3}$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong \pm 1,1547$.

Avec $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, on a $f(x) = -x^3 + 4x \cong 3,0792$.

Avec $x = -\frac{2\sqrt{3}}{2}$, on a $f(x) = -x^3 + 4x \cong -3,0792$.

Les coordonnées des points à tangente horizontale sont donc
$(1,1547 ; 3,0792)$ et $(-1,1547 ; -3,0792)$.

c) Tableau de croissance :

x		$-1,1547$		$1,1547$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Ainsi, f est croissante sur $]-1,1547 ; 1,1547[$ et décroissante sur $]-\infty ; -1,1547[\cup]1,1547 ; +\infty[$. Elle atteint un minimum en $(-1,1547 ; -3,0792)$ et un maximum en $(1,1547 ; 3,0792)$.

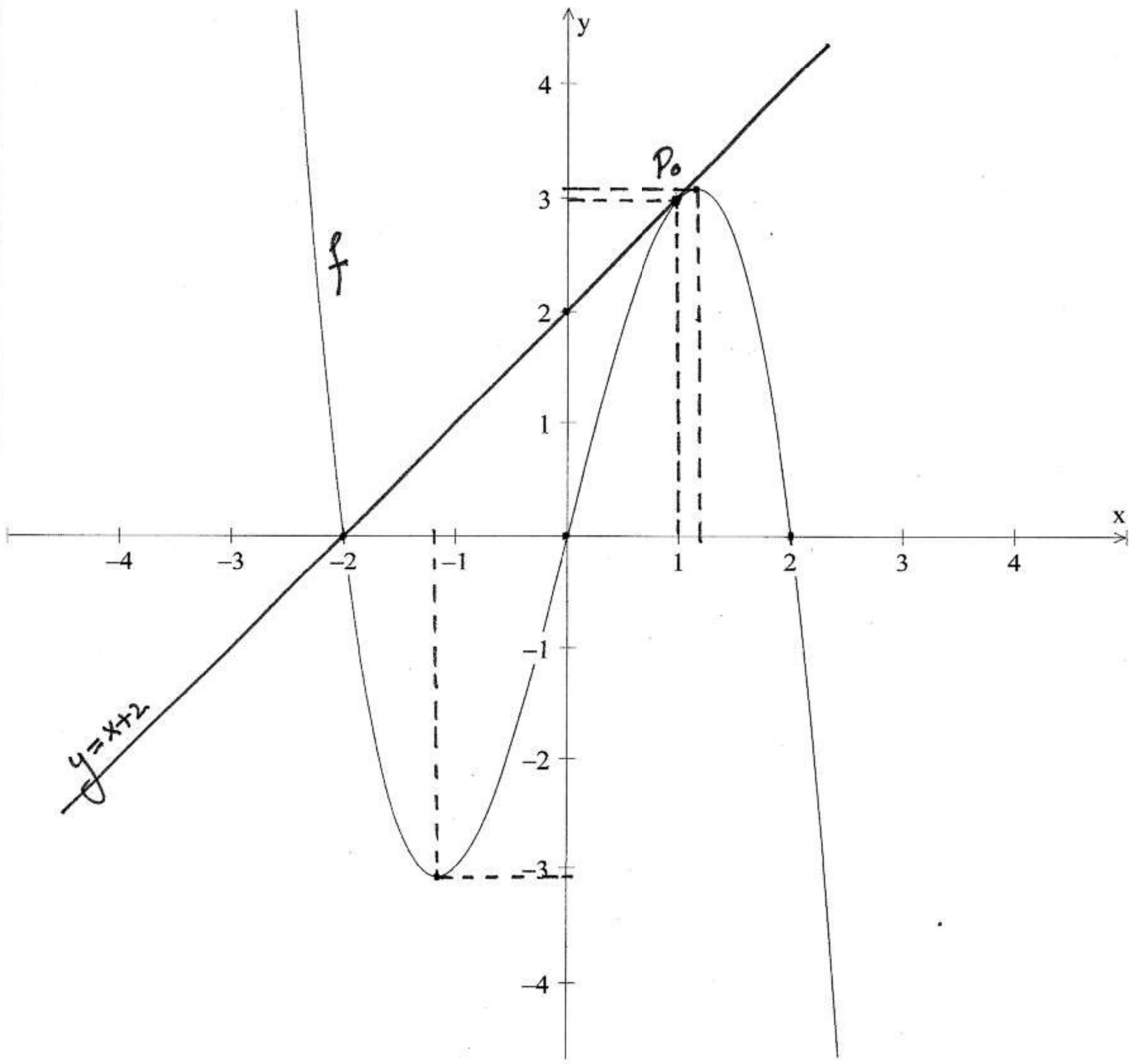
d) L'équation de la tangente au graphe de f en $x_0 = 1$ est donnée par $y = mx + h$, où $m = f'(x_0)$ et $h = f(x_0) - mx_0$.

On a : $f(x_0) = f(1) = -1^3 + 4 \cdot 1 = 3$;
$f'(x_0) = f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 4 = 1 \Rightarrow m = 1$;
$h = f(x_0) - mx_0 = 3 - 1 \cdot 1 = 2$.

Ainsi, l'équation de la tangente au graphe de f en $x_0 = 1$ est $y = x + 2$.

e) Graphe :

6



Exercice 6

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

a) Domaine de définition: On doit avoir $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Ainsi $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Parité: $f(-x)=\dfrac{-x-3}{-x+1} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x-3}{x+1}=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{-3}{1}=-3$. f coupe Oy en $y=-3$.

f) Tableau de signes:

x		-1		3	
$f(x)$	$+$	$/\!/\!/$	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: $x=-1$ est une asymptote verticale (exclu).

h) Comportement asymptotique: On a $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-3}{x+1}=\dfrac{-1-3}{0_-}=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-3}{x+1}=\dfrac{-1-3}{0+}=-\infty$.

i) Asymptotes non verticales: On a $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}=\dfrac{x+1-4}{x+1}=1+\dfrac{-4}{x+1}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-4}{x+1}=0$, $y=1$ est une asymptote horizontale.

j) Comportement asymptotique: Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4}{x+1}=\dfrac{-4}{-\infty}=0_+$, f s'approche de $y=1$ par au-dessus à $-\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{x+1}=\dfrac{-4}{+\infty}=$ $=0_-$, f s'approche de $y=1$ par au-dessous à $+\infty$

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: Voyons si le graphe de $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$ coupe le graphe de $y=1$: $\dfrac{x-3}{x+1}=1 \Rightarrow x-3=x+1 \Rightarrow -3=1$ exclu
$\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection.

l) Première dérivée: On a $f(x)=\dfrac{u}{v}$ avec $u=x-3$ et $v=x+1$. On a $u'=1$ et $v'=1$.
Ainsi, $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{x+1-(x-3)}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

m) Points à tangentes horizontales: $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{4}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow 4=0$ exclu
$\Rightarrow$ il n'y a pas de point à tangente horizontale.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': /

o) Tableau de variations:

x		-1	
signes de $f'(x)$	$+$	$/\!/\!/$	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	$/\!/\!/$	↗

p) Nature des points à tangente horizontale: /

q) Deuxième dérivée: $f'(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=4$ et $v=(x+1)^2$. On a $u'=0$ et $v'=2(x+1)$.

Ainsi $f''(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{-4\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-8}{(x+1)^3}$.

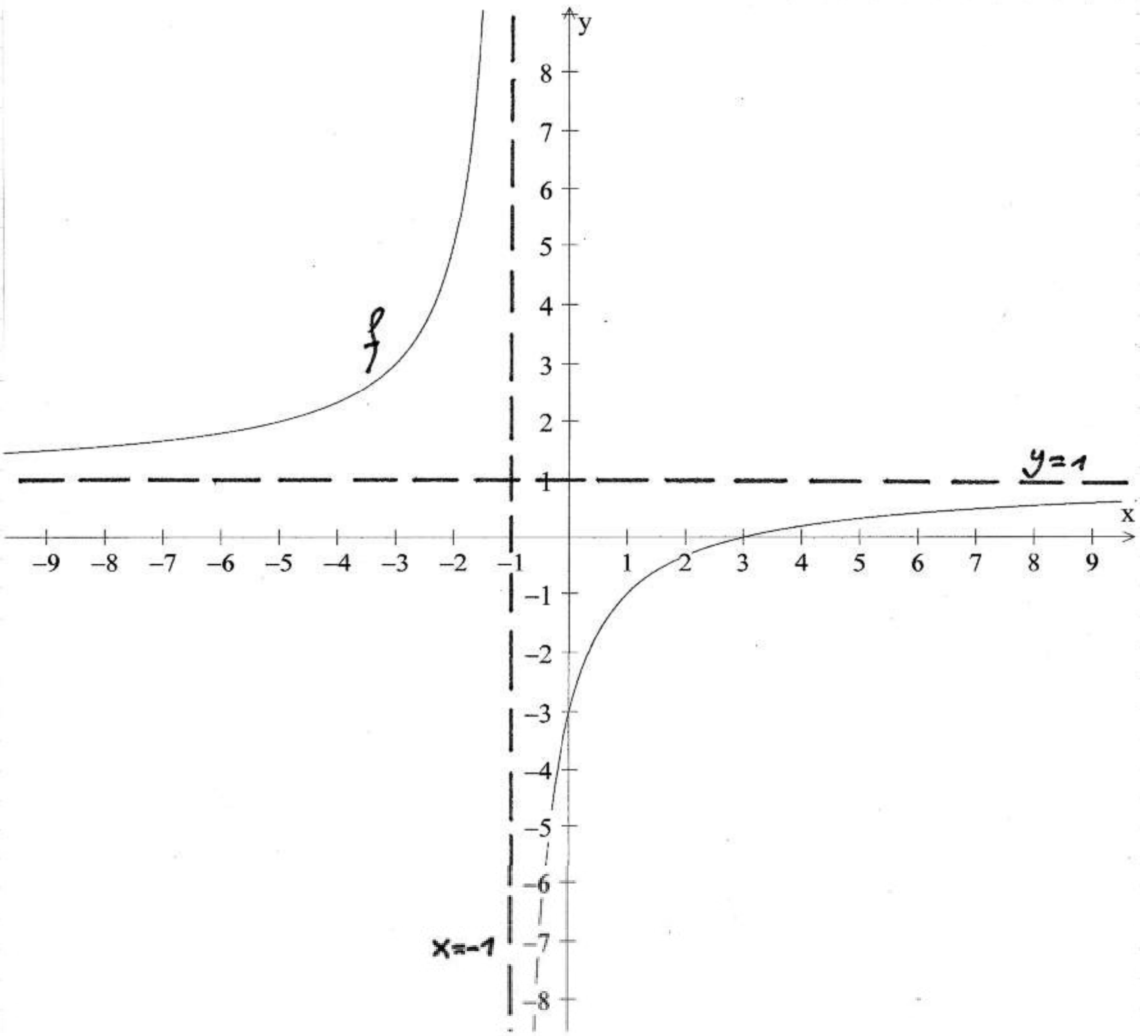
r) Point d'inflexion: $f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-8}{(x+1)^3}=0 \Rightarrow -8=0$ exclu

$\Rightarrow$ il n'y a pas de points d'inflexion.

s) Tableau de concavité:

x		-1	
Signes de $f''(x)$	$+$	////	$-$
Convexité ou concavité de $f(x)$	$\cup$ convexe	////	$\cap$ concave

t) Graphique:



b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2}$

a) <u>Domaine de définition:</u> On doit avoir $(x-1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.
Ainsi $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

b) <u>Parité:</u> $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+2(-x)}{(-x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x+1)^2} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) <u>Périodicité:</u> f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) <u>Zéros:</u> $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2+2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

e) <u>Intersection avec Oy:</u> $x=0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{0}{(-1)^2} = 0$.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x		-2		0		1	
signes de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$

g) <u>Asymptotes verticales, sauts, trous:</u> $x=1$ est une asymptote verticale (exclu).

h) <u>Comportement asymptotique:</u> On a $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2} = \dfrac{1^2+2\cdot 1}{0_+} = +\infty$.

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> On a $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{x^2-2x+1}$.

De plus,

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -(x^2-2x+1) & 1 \\ \hline 4x-1 & \end{array}$$

Ainsi, on a $f(x) = 1 + \dfrac{4x-1}{x^2-2x+1} = 1 + \dfrac{4x-1}{(x-1)^2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x-1}{x^2-2x+1} = 0$, $y=1$ est une asymptote horizontale.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-1}{(x-1)^2} = 0_-$, le graphe de f s'approche de $y=1$ par au-dessous à $-\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-1}{(x-1)^2} = 0_+$, le graphe de f s'approche de $y=1$ par au-dessus à $+\infty$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> Voyons si $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2}$ et $y=1$ se coupent: $\dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow x^2+2x = (x-1)^2$
$\Rightarrow x^2+2x = x^2-2x+1 \Rightarrow 2x = -2x+1 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$.
Ainsi le graphe de f coupe l'asymptote $y=1$ en $\left(\dfrac{1}{4}; 1\right)$.

l) Première dérivée: On a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2+2x$ et $v = (x-1)^2$.

On a $u' = 2x+2$ et $v' = 2(x-1)$.

Ainsi $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x+2)(x-1)^2 - (x^2+2x)2(x-1)}{(x-1)^4} =$

$= \frac{(2x+2)(x-1) - 2(x^2+2x)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - 2x^2 - 4x}{(x-1)^3} =$

$= \frac{-4x-2}{(x-1)^3}$. On a $D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x-2}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow -4x-2 = 0$

$\Rightarrow 4x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Valeur de f: Avec $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{(-\frac{1}{2})^2 + 2(-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2}-1)^2} = \frac{\frac{1}{4}-1}{(-\frac{3}{2})^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{3}$.

Ainsi, l'unique point à tangente horizontale est $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3})$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f':

o) Tableau de variations:

x		$-\frac{1}{2}$		1	
signes de $f'(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↘		↗	$\|$	↘

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après le tableau de variations, $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3})$ est un minimum.

q) Deuxième dérivée: On a $f'(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = -4x-2$ et $v = (x-1)^3$.

On a $u' = -4$ et $v' = 3(x-1)^2$.

Ainsi $f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-4(x-1)^3 - (-4x-2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$

$= \frac{-4(x-1) - 3(-4x-2)}{(x-1)^4} = \frac{-4x+4+12x+6}{(x-1)^4} =$

$= \frac{8x+10}{(x-1)^4}$. On a $D_{f''} = \mathbb{R} - \{1\}$.

r) Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x+10}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow 8x+10 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$.

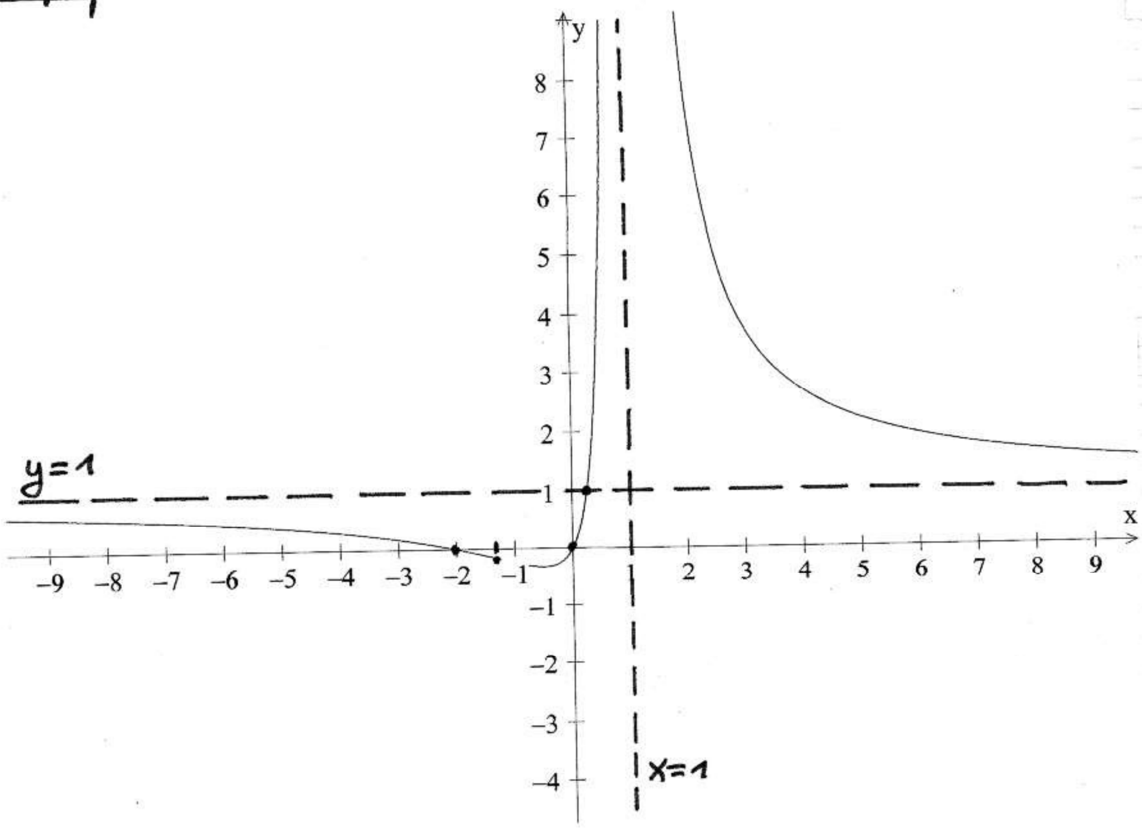
Valeur de f: Avec $x = -\frac{5}{4}$, $f(x) = -\frac{5}{27}$.

Ainsi l'unique point d'inflexion est $(-\frac{5}{4}; -\frac{5}{27})$.

s) Tableau de concavité:

x		$-\frac{5}{27}$		1	
signes de $f''(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$
concavité ou convexité de $f(x)$	⌢ concave		⌣ convexe	$\|$	⌣ convexe

t) Graphique:



c) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

a) Domaine de définition: On doit avoir $9-x^2 \geqslant 0 \Rightarrow 9 \geqslant x^2 \Rightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$.
Ainsi $D_f = [-3;3]$. Il ne sera jamais nécessaire de considérer $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$.

b) Parité: $f(-x)=\sqrt{9-(-x)^2}=\sqrt{9-x^2}=f(x) \Rightarrow f$ est paire (son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy).

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{9-x^2}=0 \Rightarrow 9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=-3$ et $x=3$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{9-0^2}=\sqrt{9}=3$. f coupe Oy en $y=3$.

f) Tableau de signes:

x	//////	-3		3	//////
signes de $f(x)$	//////	0	$+$	0	//////

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Comme f est définie dans un intervalle fermé ($[-3;3]$), f n'a ni asymptotes verticales, ni sauts, ni trous dans cet intervalle.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> /

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> Aucune, puisque $D_f = [-3;3]$.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> /

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> /

l) <u>Première dérivée:</u> $f(x) = \sqrt{9-x^2} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$.

Son domaine est $D_{f'} =]-3;3[$ (si $x = \pm 3$, on divise par 0).

m) <u>Points à tangentes horizontales:</u> $f'(x) = 0 \implies \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \implies x = 0$.

<u>Valeurs de f:</u> Avec $x=0$, $f(x) = 3$ (voir e)).

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Les points critiques de f' sont les bords de $D_{f'} =]-3;3[$, c'est-à-dire -3 et 3. On a:

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \text{"}\frac{+3}{0_+}\text{"} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \text{"}\frac{-3}{0+}\text{"} = -\infty.$$

Ainsi $f'(-3) = +\infty$ et $f'(3) = -\infty$.

o) <u>Tableau de variations:</u>

x	//////	-3		0		3	//////
Signes de $f'(x)$	//////		$+$	0	$-$		//////
croissance ou décroissance de $f(x)$	//////	$\uparrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\downarrow$	//////

p) <u>Nature des points à tangentes horizontales:</u> D'après le tableau des variations, $(0;3)$ est un maximum (local).

q) <u>Deuxième dérivée:</u> On a $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{u}{v}$ avec $u = -x$ et $v = \sqrt{9-x^2}$

$$\implies u' = -1 \text{ et } v' = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \implies f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} =$$

$$= \frac{-1 \cdot \sqrt{9-x^2} - (-x) \cdot \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}}{(\sqrt{9-x^2})^2} = \frac{-\sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\left(-(9-x^2) - x^2\right)}{9-x^2} =$$

$$= \frac{-(9-x^2) - x^2}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = \frac{-9 + x^2 - x^2}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = \frac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}.$$ Son domaine est $D_{f''} =]-3;3[$.

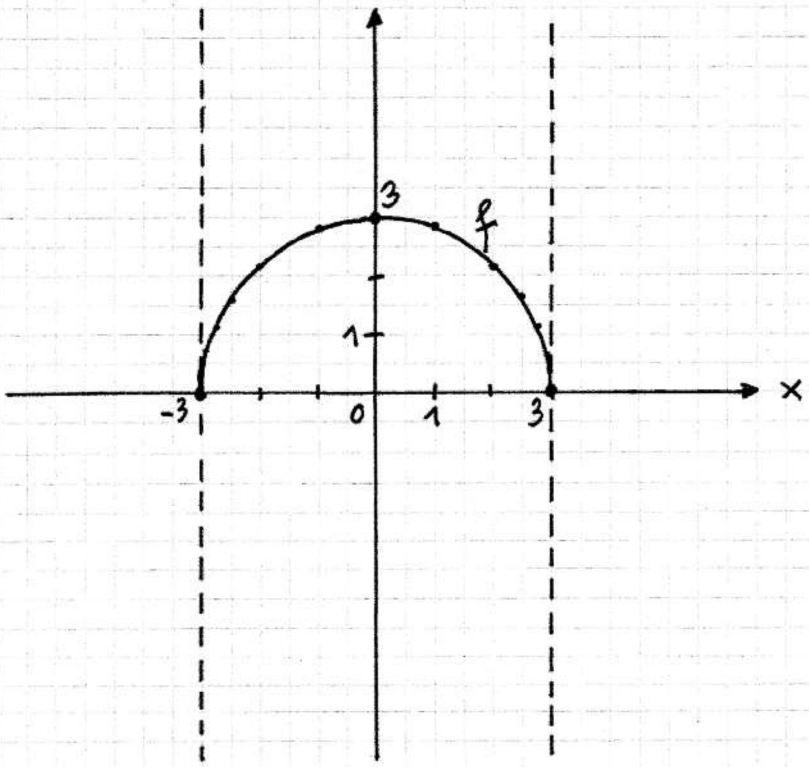
r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x) = 0 \implies \frac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = 0 \implies -9 = 0$, ce qui est impossible.

Ainsi f n'a pas de point d'inflexion.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x	//////	-3		3	//////
Signes de $f''(x)$	//////		$-$		//////
Concavité ou convexité de $f(x)$	//////		$\frown$ Concave		//////

f) Graphique :



x	± 2	± 1	$\pm 2{,}5$	$\pm 2{,}75$	$\pm 2{,}9$
$f(x)$	2,24	2,83	1,66	1,2	0,77

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

a) Domaine de définition: On a $x^2-4 = (x+2)(x-2)$. Ainsi, on doit avoir $x \neq -2$ et $x \neq 2$.
Par conséquent, $D_f = \mathbb{R} - \{-2;2\}$.

b) Parité: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-4} = \dfrac{x^2}{x^2-4} = f(x) \Rightarrow f$ est paire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

e) Intersection avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{0^2}{0^2-4} = \dfrac{0}{-4} = 0$.

f) Tableau de signes:

x		-2		0		2	
Signes de $f(x)$	$+$	∦	$-$	0	$-$	∦	$+$

g) Asymptotes verticales, points, trous: On doit considérer $x=-2$ et $x=2$. On a:

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{"(-2)^2"}{0_+} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{"(-2)^2"}{0_-} = -\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{"2^2"}{0_-} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{"2^2"}{0_+} = +\infty$.

Ainsi $x=-2$ et $x=2$ sont des asymptotes verticale. Il n'y a ni points, ni trous.

h) Comportement asymptotique: On a $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty$ (voir g)).

i) Asymptotes non verticales: On effectue la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2-4 \\ \hline -(x^2-4) & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Ainsi $y=1$ est asymptote horizontale.

j) Comportement asymptotique: D'après i), on a $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2-4}$.

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2-4} = \frac{"4"}{+\infty} = 0_+$, la courbe s'approchera de $y=1$ par en-dessous en $\pm\infty$.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: On doit avoir $y = \frac{x^2}{x^2-4}$ et $y=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2-4} = 1 \Rightarrow x^2 = x^2-4 \Rightarrow 0=-4$, ce qui est impossible.

Ainsi la courbe ne coupe pas l'asymptote $y=1$.

l) Première dérivée: On a $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{u}{v}$ avec $u=x^2$ et $v=x^2-4 \Rightarrow u'=2x$ et

$v'=2x \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2x\cdot(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$.

Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

m) Points à tangentes horizontales: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow -8x=0 \Rightarrow x=0$.

Valeurs de f: Avec $x=0$, on a $f(x)=0$ (voir e)).

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Les points critiques de f' sont $x=-2$ et $x=2$.

On a : $\lim\limits_{x \to -2} f'(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{"(-8).(-2)"}{0+} = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{"(-8).2"}{0+} = -\infty.$

Ainsi $f'(-2) = +\infty$ et $f'(2) = -\infty$

o) Tableau de variations :

x		-2		0		2	
Signe de $f'(x)$	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$
Croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	↑	↗	max	↘	↓	↘

p) Nature des points à tangentes horizontales : D'après le tableau de variation, $(0;0)$ est un maximum (local).

q) Deuxième dérivée : On a $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = -8x$ et $v = (x^2-4)^2$

$\Rightarrow u' = -8$ et $v' = 2(x^2-4)\cdot 2x = 4x(x^2-4) \Rightarrow f''(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} =$

$= \dfrac{-8\cdot(x^2-4)^2 - (-8x).4x(x^2-4)}{((x^2-4)^2)^2} = \dfrac{(x^2-4)(-8(x^2-4)+32x^2)}{(x^2-4)^4} =$

$= \dfrac{-8(x^2-4)+32x^2}{(x^2-4)^3} = \dfrac{-8x^2+32+32x^2}{(x^2-4)^3} = \dfrac{24x^2+32}{(x^2-4)^3} = \dfrac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$

Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

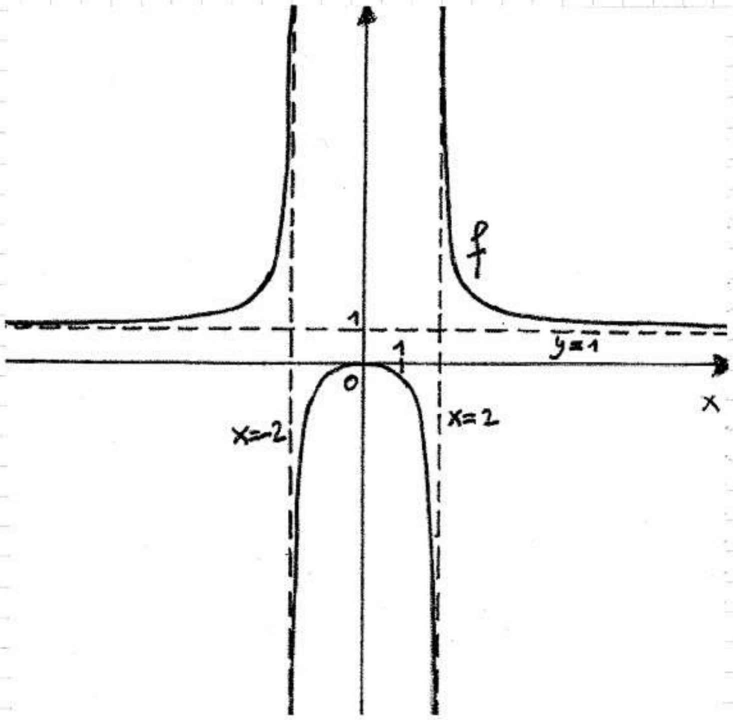
r) Points d'inflexion : $f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 8(3x^2+4) = 0 \Rightarrow 3x^2+4 = 0$;

Or $3x^2+4 \geqslant 4 > 0$; ainsi il n'y a pas de point d'inflexion.

s) Tableau de concavité :

x		-2		2	
signes de $f''(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$
Concavité ou Convexité de $f(x)$	Convexe	‖	Concave	‖	Convexe

t) Graphique :


f
1
y=1
1
0
x
x=-2
x=2