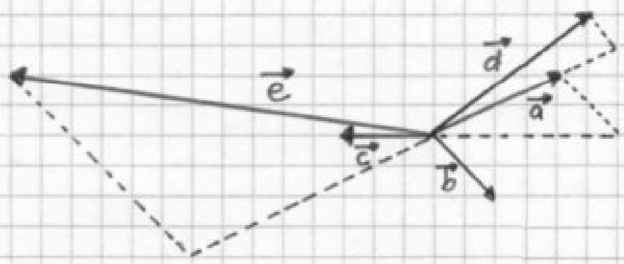
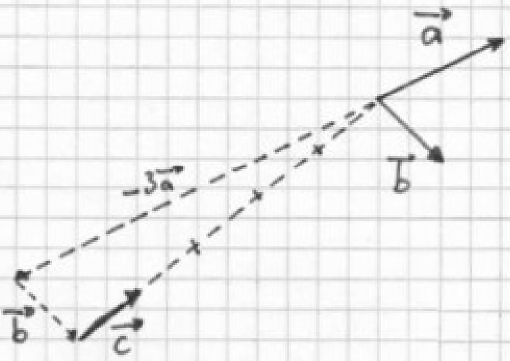
GEOMETRIE PLANE

CORRIGE DES EXERCICES

Exercice 1

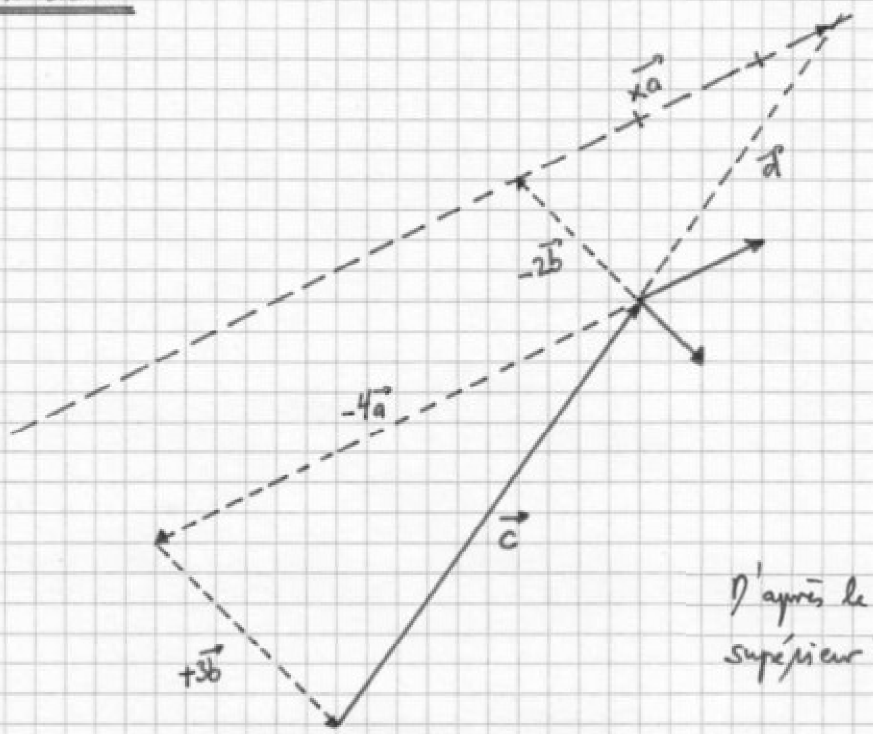


Exercice 2



On a $-3\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow 5\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b} \rightarrow \vec{c}=\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}$.

Exercice 3



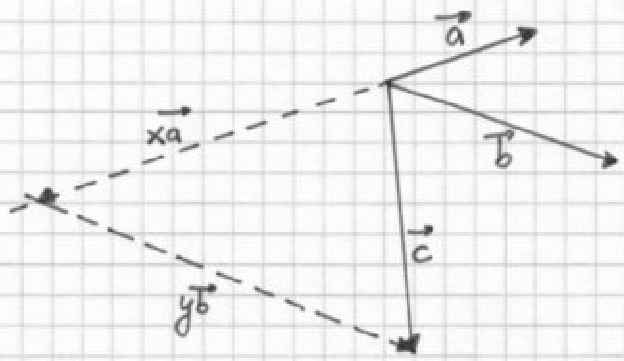
D'après le dessin, on doit avoir x un peu supérieur à $2,5 \Rightarrow x \simeq 2,6$

On a $\vec{c} = -4\vec{a} + 3\vec{b} \Rightarrow -\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b} \Rightarrow -\frac{1}{3}\vec{c} = \frac{4}{3}\vec{a} - \vec{b}$

$\Rightarrow -\frac{2}{3}\vec{c} = \frac{8}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$.

Ainsi $\vec{d} = -\frac{2}{3}\vec{c}$ et $x = \frac{8}{3}$ $(= 2,\overline{6})$.

Exercice 4



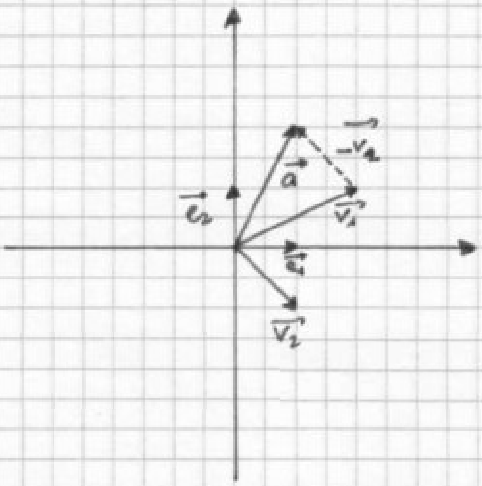
$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Si $\vec{c} = \vec{0}$, la seule possibilité est $x = 0$ et $y = 0$.

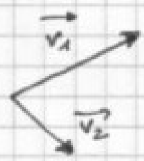
Exercice 5

a) $\vec{a} = \vec{v_1} - \vec{v_2}$, où $\vec{v_1} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}}}$.



b)



Comme $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont différents de $\vec{0}$ et pas parallèles, ils forment une base de V_2 (le plan).

c) $\vec{b} = 5\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$: on a $\vec{v_1} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{v_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$;

ainsi $\vec{v_1} + \vec{v_2} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_1} - \vec{e_2} = 3\vec{e_1}$;

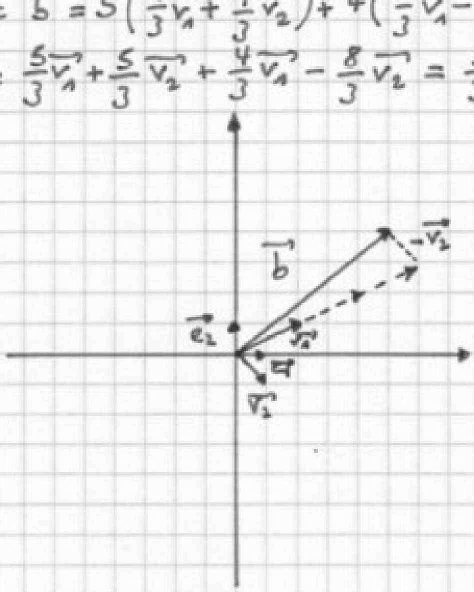
d'où $\vec{e_1} = \frac{1}{3}\vec{v_1} + \frac{1}{3}\vec{v_2}$;

ainsi $\vec{e_2} = \vec{v_1} - 2\vec{e_1} = \vec{v_1} - 2\left(\frac{1}{3}\vec{v_1} + \frac{1}{3}\vec{v_2}\right) =$

$= \vec{v_1} - \frac{2}{3}\vec{v_1} - \frac{2}{3}\vec{v_2} = \frac{1}{3}\vec{v_1} - \frac{2}{3}\vec{v_2}$;

donc $\vec{b} = 5\left(\frac{1}{3}\vec{v_1} + \frac{1}{3}\vec{v_2}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\vec{v_1} - \frac{2}{3}\vec{v_2}\right) =$

$= \frac{5}{3}\vec{v_1} + \frac{5}{3}\vec{v_2} + \frac{4}{3}\vec{v_1} - \frac{8}{3}\vec{v_2} = \frac{9}{3}\vec{v_1} - \frac{3}{3}\vec{v_2} = \underline{\underline{3\vec{v_1} - \vec{v_2}}}$.



d) $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x'\vec{v_1} + y'\vec{v_2}$:

d'après c), on a $\vec{e_1} = \frac{1}{3}\vec{v_1} + \frac{1}{3}\vec{v_2}$ et $\vec{e_2} = \frac{1}{3}\vec{v_1} - \frac{2}{3}\vec{v_2}$;

ainsi $x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x\left(\frac{1}{3}\vec{v_1} + \frac{1}{3}v_2\right) + y\left(\frac{1}{3}\vec{v_1} - \frac{2}{3}\vec{v_2}\right) =$

$$= \frac{x}{3}\vec{v_1} + \frac{x}{3}\vec{v_2} + \frac{y}{3}\vec{v_1} - \frac{2y}{3}\vec{v_2} =$$

$$= \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3}\right)\vec{v_1} + \left(\frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right)\vec{v_2} ;$$

on doit donc avoir $\underline{\underline{x' = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} \text{ et } y' = \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}}}$.

De la 1ère relation, on tire $3x' = x + y$, i.e. $6x' = 2x + 2y$.
De la 2e relation, on tire $3y' = x - 2y$

En additionnant ces 2 dernières, on obtient $6x' + 3y' = 3x$, i.e. $x = 2x' + y'$.

Ainsi $3x' = 2x' + y' + y$, i.e. $y = x' - y'$.

On a donc $\underline{\underline{x = 2x' + y' \text{ et } y = x' - y'}}$.

Exercice 6

$A(3;4) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $B(1;5) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $C(-3;1) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

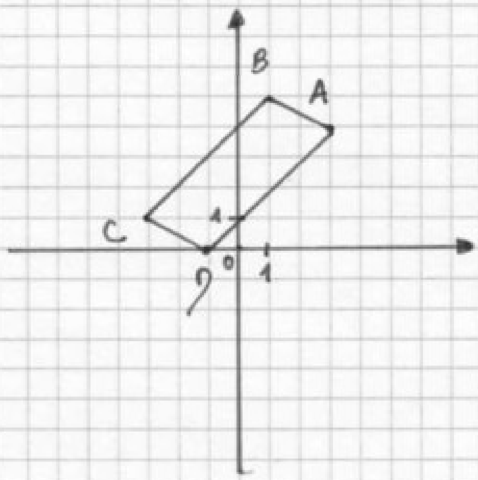
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (relation de Chasles)

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}}}$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}}}$.

b)



$\underline{\underline{D(-1;0)}}$.

c) On doit avoir, par exemple $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (caractéristique d'un parallélogramme) :

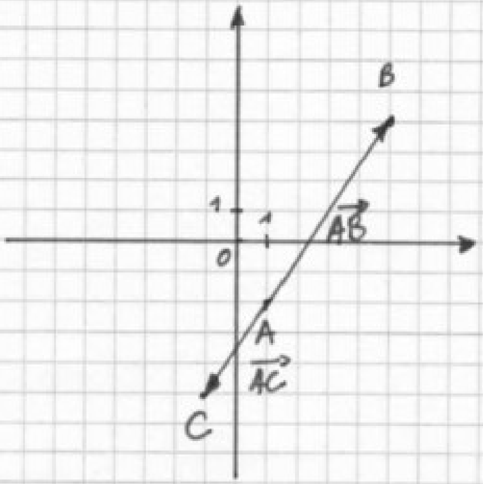
$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ (voir a)) ;

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

ainsi $\overrightarrow{OD} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

donc $\underline{\underline{D(-1;0)}}$.

Exercice 7



$C = (-1 ; -5)$

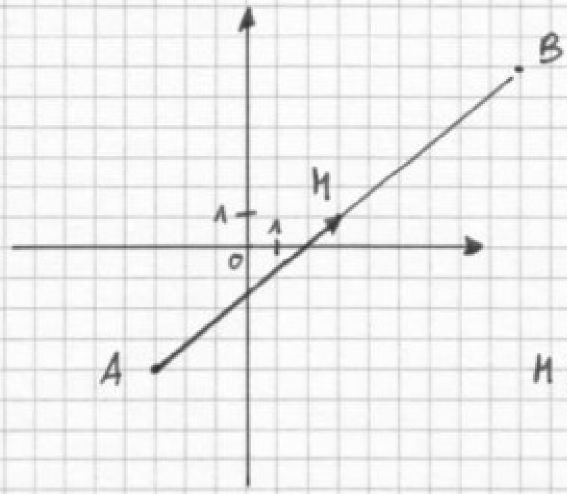
On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $-\frac{1}{2} AB = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{\underline{C(-1 ; -5)}}.$

Exercice 8



$M(3;1)$

On a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} - \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{M(3;1)}.$

Exercice 9

a) Si M est le milieu de AB, on a $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

On a: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

On a donc bien: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

b) Avec $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ et $M(m_1; m_2)$, on a:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \text{ et } m_2 = \frac{a_2+b_2}{2}.$$

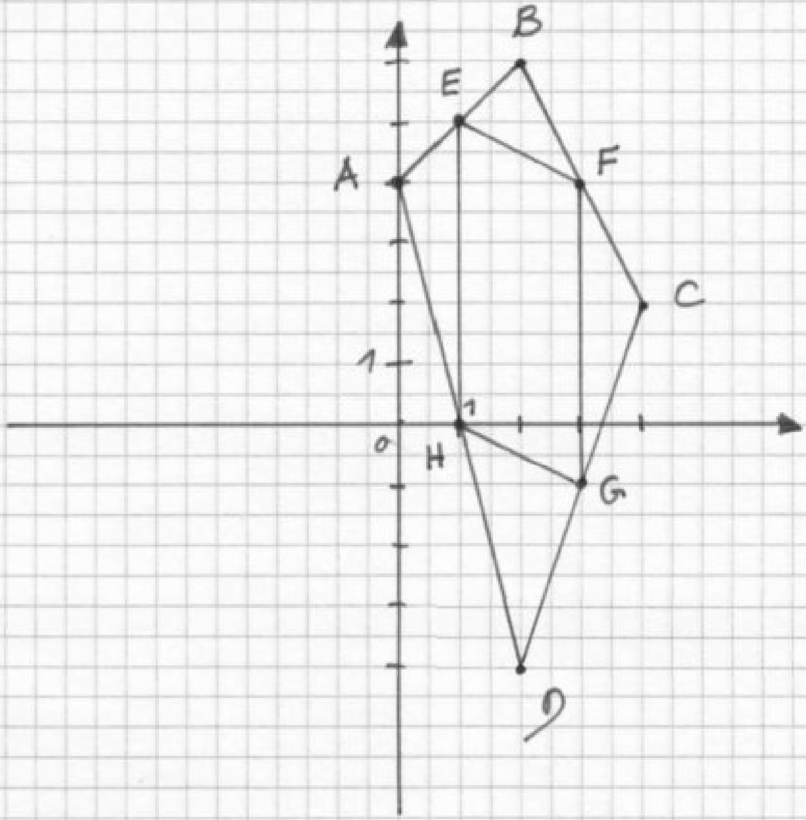
c) Ici $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 4$ et $b_2 = -5$.

Donc $m_1 = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$ et $m_2 = \frac{3+(-5)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.

Ainsi le point milieu du segment AB est $\left(\frac{3}{2}; -1\right)$.

Exercice 10

a)



On voit par le dessin que EFGH est un parallélogramme.

Avec $A(0;4)$, $B(2;6)$, $C(4;2)$ et $D(2;-4)$, on a :

$E\left(\frac{0+2}{2};\frac{4+6}{2}\right)=\left(\frac{2}{2};\frac{10}{2}\right)=(1;5)$;

$F\left(\frac{2+4}{2};\frac{6+2}{2}\right)=\left(\frac{6}{2};\frac{8}{2}\right)=(3;4)$;

$G\left(\frac{4+2}{2};\frac{2+(-4)}{2}\right)=\left(\frac{6}{2};\frac{-2}{2}\right)=(3;-1)$;

$H\left(\frac{2+0}{2};\frac{-4+4}{2}\right)=\left(\frac{2}{2};\frac{0}{2}\right)=(1;0)$.

EFGH est un parallélogramme si $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ (cela suffit).

On a :

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ EFGH est un parallélogramme.

b) Avec $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$, $D(d_1;d_2)$, on a :

$E\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$, $F\left(\frac{b_1+c_1}{2};\frac{b_2+c_2}{2}\right)$, $G\left(\frac{c_1+d_1}{2};\frac{c_2+d_2}{2}\right)$ et

$H\left(\frac{a_1+d_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

On a: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} \frac{b_1+c_1}{2} \\ \frac{b_2+c_2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1+c_1-(a_1+b_1)}{2} \\ \frac{b_2+c_2-(a_2+b_2)}{2} \end{pmatrix} =$

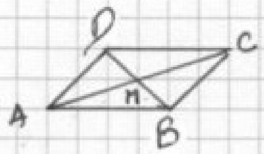
$$= \begin{pmatrix} \frac{b_1+c_1-a_1-b_1}{2} \\ \frac{b_2+c_2-a_2-b_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1-a_1}{2} \\ \frac{c_2-a_2}{2} \end{pmatrix} ;$$

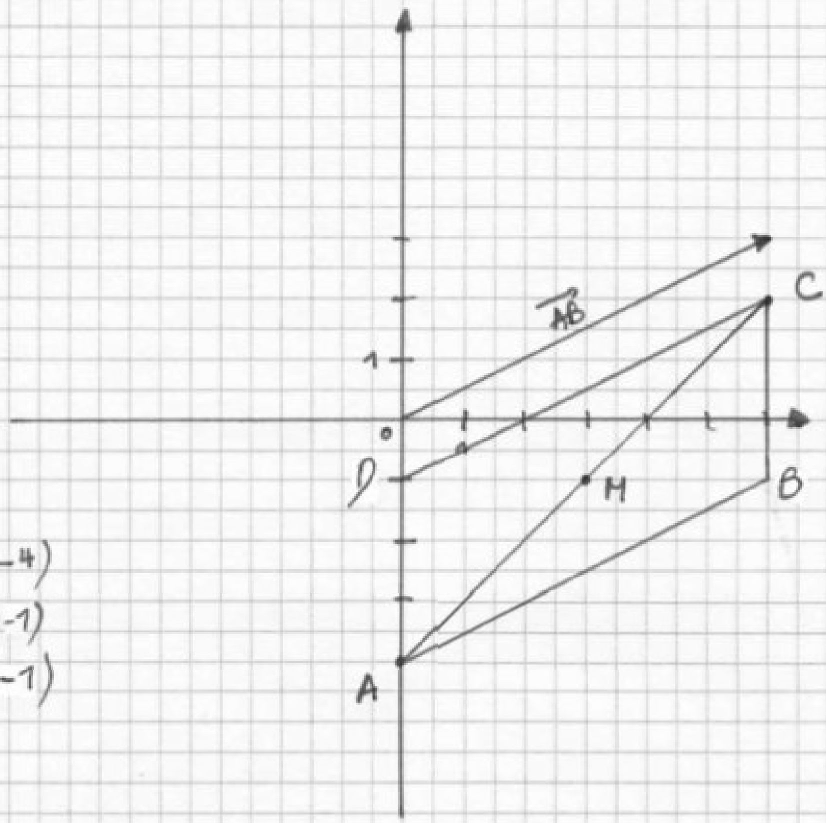
$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} \frac{c_1+d_1}{2} \\ \frac{c_2+d_2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a_1+d_1}{2} \\ \frac{a_2+d_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1+d_1-(a_1+d_1)}{2} \\ \frac{c_2+d_2-(a_2+d_2)}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{c_1+d_1-a_1-d_1}{2} \\ \frac{c_2+d_2-a_2-d_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1-a_1}{2} \\ \frac{c_2-a_2}{2} \end{pmatrix} .$$

Ainsi $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ et, donc, EFGH est un parallélogramme.

Exercice 11





Ainsi : $A(0;-4)$

$B(6;-1)$

$D(0;-1)$

On a : $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$;

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \Longrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OA} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{A = (0;-4)}}.$$

On a : $\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{B\ (6;-1)}}.$$

Et : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ puisque ABCD est un parallélogramme) ;

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{D(0;-1)}}.$$

Exercice 12

a) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{t}$, avec $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2\lambda \\ 5-\lambda \end{pmatrix}$.

Ainsi $P(x;y)$ est donné par: $\begin{cases} x = -2+2\lambda \\ y = 5-\lambda. \end{cases}$

$\lambda = -2$: $x = -2+2(-2) = -2-4 = -6$
$y = 5-(-2) = 5+2 = 7 \Longrightarrow P(-6;7)$

$\lambda = -1$: $x = -2+2(-1) = -2-2 = -4$
$y = 5-(-1) = 5+1 = 6 \Longrightarrow P(-4;6)$

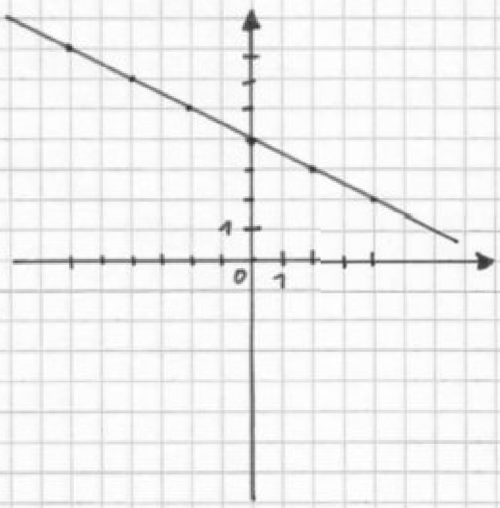
$\lambda = 0$: $x = -2+2\cdot 0 = -2$
$y = 5-0 = 5 \Longrightarrow P(-2;5) = A$

$\lambda = 1$: $x = -2+2\cdot 1 = -2+2 = 0$
$y = 5-1 = 4 \Longrightarrow P(0;4)$

$\lambda = 2$: $x = -2+2\cdot 2 = -2+4 = 2$
$y = 5-2 = 3 \Longrightarrow P(2;3)$

$\lambda = 3$: $x = -2+2\cdot 3 = -2+6 = 4$
$y = 5-3 = 2 \Longrightarrow P(4;2)$

b)



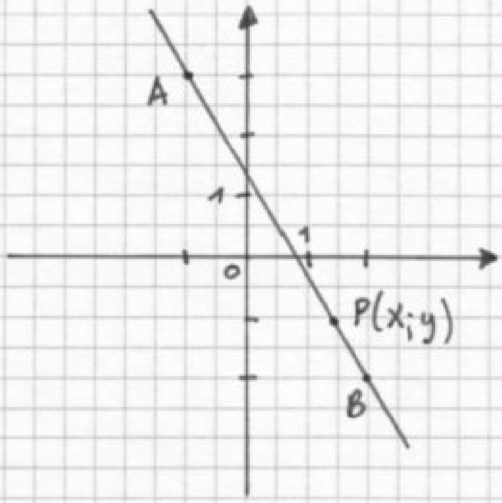
c) D'après a), on a: $x = -2+2\lambda$ ① $\xrightarrow{\cdot 1}$ $x = -2+2\lambda$

$y = 5-\lambda$ ② $\xrightarrow{\cdot 2}$ $2y = 10-2\lambda$ +

$x + 2y = 8$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{x+2y-8=0.}}$

Exercice 13



a) On va exprimer $\overrightarrow{OP}$, où P est un point quelconque de la droite AB.

On peut écrire $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$.

$\overrightarrow{AP}$ est parallèle à $\overrightarrow{AB}$.

On peut donc écrire $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.

On obtient $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}$.

On a $P(x;y)$, $A(-1;3)$ et $B(2;-2)$.

Ainsi $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

On obtient donc la représentation paramétrique vectorielle de d :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) En partant de la représentation paramétrique vectorielle de d ci-dessus, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -5\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 3-5\lambda \end{pmatrix}.$$

En écrivant cette égalité ligne par ligne, on obtient la représentation paramétrique algébrique de d :

$$\begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 3-5\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

c) On va utiliser la représentation paramétrique algébrique de d ci-dessus.

Intersection avec l'axe x : on pose $y = 0$;

on obtient $0 = 3 - 5\lambda \Rightarrow 5\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{5}$;

avec $\lambda = \frac{3}{5}$, on obtient $x = -1 + 3\lambda = -1 + 3\frac{3}{5} = -1 + \frac{9}{5} = \frac{4}{5}$;

ainsi l'intersection avec l'axe x est $\left(\frac{4}{5}; 0\right)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = 0$;

on obtient $0 = -1 + 3\lambda \Rightarrow 3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$;

avec $\lambda = \frac{1}{3}$, on obtient $y = 3 - 5 \cdot \frac{1}{3} = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$;
ainsi l'intersection avec l'axe y est $\underline{\underline{(0; \frac{4}{3})}}$.

d) $C(7; -11)$: on part de $x = 7$;
on obtient $7 = -1 + 3\lambda \Rightarrow 3\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{3}$;
avec $\lambda = \frac{8}{3}$, on trouve $y = 3 - 5 \cdot \frac{8}{3} = 3 - \frac{40}{3} = -\frac{31}{3}$;
Comme $-\frac{31}{3} \neq -11$, on conclut que <u>C n'est pas situé sur la droite.</u>

Exercice 14

On a d_1 : $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En posant $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on trouve $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 2-\lambda \end{cases}$$

a) Pour B, $x = 8$: on a donc $8 = -1+3\lambda \Rightarrow 3\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 3$;
avec $\lambda = 3$, on trouve $y = 2-\lambda = 2-3 = -1$;
ainsi $\underline{B(8\,;-1)}$.

b) Dans $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est parallèle à la droite d_1.

Comme d_2 doit être parallèle à d_1, on a que $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est aussi parallèle à d_2.

Dans $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, le point $(-1\,;2)$ est un point de la droite d_1.

Ici, un point de la droite d_2 est $A(-1\,;5)$.

Ainsi, une représentation paramétrique vectorielle de d_2 est :

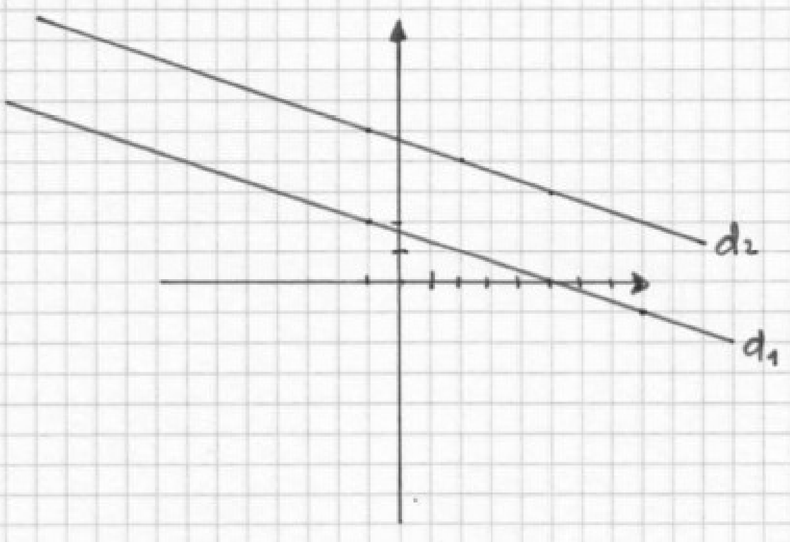
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

De là, on trouve : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 5-\lambda \end{pmatrix}$.

Donc, une représentation paramétrique algébrique de d_2 est :

$$\begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 5-\lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

c)



Exercice 15

Si d passe par A et est parallèle à $\vec{t}$, un point P quelconque de d peut s'exprimer de la manière suivante: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Avec $P(x, y)$, on a: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\vec{t} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 4\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3\lambda \\ 1+4\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3+3\lambda \\ y = 1+4\lambda \end{cases}$$

, représentation paramétrique algébrique de d.

$$\begin{aligned} x = 3+3\lambda &\xrightarrow{\cdot 4} 4x = 12+12\lambda \\ y = 1+4\lambda &\xrightarrow{\cdot(-3)} -3y = -3-12\lambda \quad + \\ & \overline{4x-3y = 9.} \end{aligned}$$

Donc $\underline{\underline{4x-3y-9=0}}$ est une équation cartésienne de d.

Exercice 16

Si d passe par $A(x_0 ; y_0)$ et est parallèle à $\vec{t} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, un point $P(x ; y)$ quelconque de d peut s'exprimer de la manière suivante:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{t}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ainsi : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\lambda \\ b\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a\lambda \\ y_0 + b\lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \end{cases}$, représentation paramétrique algébrique de d.

$$\begin{aligned} x = x_0 + a\lambda &\xrightarrow{\cdot b} & bx &= bx_0 + ab\lambda \\ y = y_0 + b\lambda &\xrightarrow{\cdot(a)} & -ay &= -ay_0 - ab\lambda \quad + \\ \hline & & bx - ay &= bx_0 - ay_0 . \end{aligned}$$

Ainsi $\underline{\underline{bx - ay - (bx_0 - ay_0) = 0}}$ est l'équation cartésienne de d.

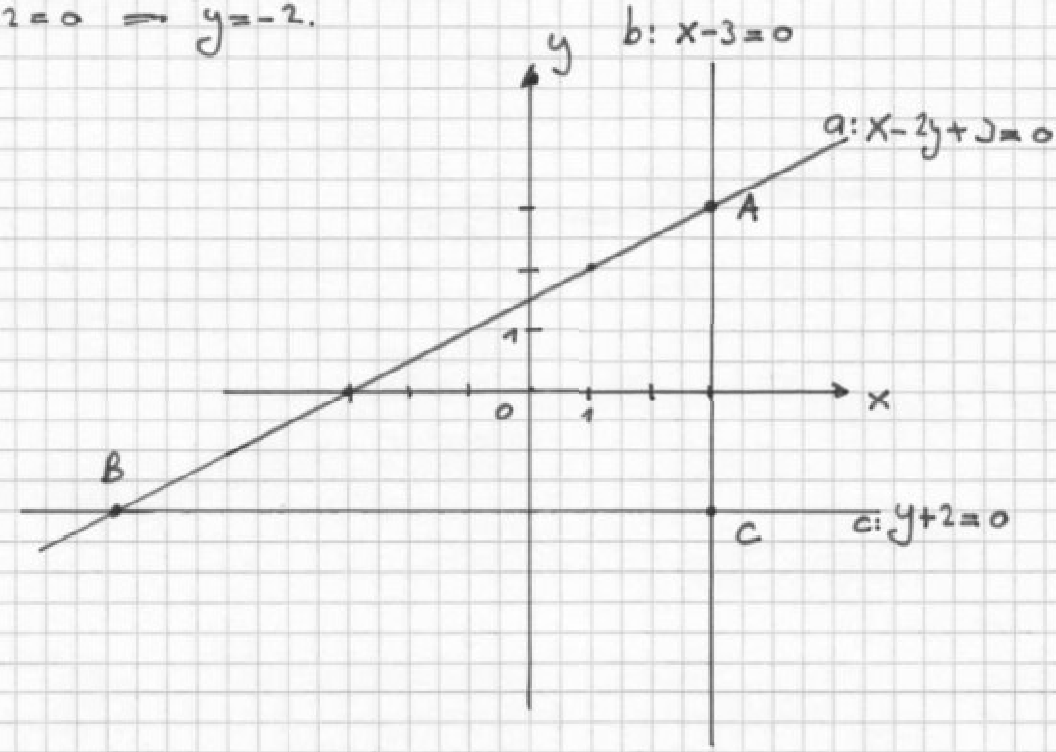
Exercice 17

a: $x - 2y + 3 = 0$: $x = 1 \Rightarrow -2y + 4 = 0 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (1;2)$

$y = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3;0)$

b: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

c: $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$.



A = intersection de a et b : $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 - 2y + 3 = 0 \Rightarrow 6 - 2y = 0$

$\Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ **A (3;3)**.

B = intersection de a et c: $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow x + 4 + 3 = 0 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow$ **B (-7;-2)**.

C = intersection de b et c: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow$ **C (3;-2)**.

Exercice 18

Lorsqu'on cherche à déterminer la position relative de 2 droites, on cherche leur(s) intersection(s) :
- s'il y a une infinité de solutions, alors les droites sont confondues ;
- s'il y a une seule solution, alors les droites sont sécantes et leur point d'intersection correspond à cette solution ;
- s'il n'y a aucune solution, alors les droites sont parallèles (non confondues).

a) $a: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+2\lambda \end{cases}$ $b: \begin{cases} x = -3+2\lambda' \\ y = 3-\lambda' \end{cases}$ (on veille à ce que les 2 paramètres aient des noms différents)

intersection: $1+\lambda = -3+2\lambda'$ ①

$-1+2\lambda = 3-\lambda'$ ②

$$① \Rightarrow \lambda - 2\lambda' = -4 \xrightarrow{\cdot 1} \lambda - 2\lambda' = -4$$

$$② \Rightarrow 2\lambda + \lambda' = 4 \xrightarrow{\cdot 2} 4\lambda + 2\lambda' = 8 \quad +$$

$$5\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5} ;$$

il y a une seule solution $\Rightarrow$ a et b sont sécantes ;

avec $\lambda = \frac{4}{5}$, on a $x = 1+\lambda = 1+\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ et

$y = -1+\frac{8}{5} = \frac{3}{5}$;

le point d'intersection est $\left(\frac{9}{5} ; \frac{3}{5}\right)$.

b) $a: \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 1-\frac{\lambda}{3} \end{cases}$ $b: \begin{cases} x = 5-6\lambda' \\ y = \frac{2}{3}+\lambda' \end{cases}$

intersection: $3+2\lambda = 5-6\lambda'$ ①

$1-\frac{\lambda}{3} = \frac{2}{3}+\lambda'$ ②

$$\left.\begin{array}{l} ① \Rightarrow 2\lambda+6\lambda' = 2 \Rightarrow \lambda+3\lambda' = 1 \\ ② \Rightarrow 3-\lambda = 2+3\lambda' \Rightarrow \lambda+3\lambda' = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{infinité de solutions}$$

$\Rightarrow$ a et b sont confondues.

c) $a: 4x+3y-6=0$ $b: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4-4\lambda \end{cases}$

intersection: par substitution, on a $4(3\lambda)+3(4-4\lambda)-6=0$

$\Rightarrow 12\lambda+12-12\lambda-6=0 \Rightarrow 6=0 \Rightarrow$ exclu $\Rightarrow$ pas de solution $\Rightarrow$ a et b sont parallèles.

d) $a: 2x+3y-16=0$ $b: 3x-2y-11=0$

intersection: $\begin{cases} 2x+3y-16=0 & ① \\ 3x-2y-11=0 & ② \end{cases}$

$$① \xrightarrow{\cdot 2} \quad 4x+6y-32=0$$
$$② \xrightarrow{\cdot 3} \quad 9x-6y-33=0 \quad +$$
$$13x-65=0 \implies 13x=65 \implies x=5$$

il y a une seule solution $\implies$ a et b sont sécantes ;

avec $x=5$, on a $2\cdot 5+3y-16=0 \implies 3y-6=0 \implies 3y=6 \implies y=2$;

le point d'intersection est $(5;2)$.

e) $a: x-3=0 \qquad b: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-1+2\lambda \end{cases}$

intersection: $x-3=0 \implies x=3$;

avec $x=3$: $3=1-\lambda \implies \lambda=-2$;

avec $\lambda=-2$: $y=-1+2(-2)=-1-4=-5$

$\implies$ a et b sont sécantes et leur intersection est $(3;-5)$.

f) $a: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \qquad b: 6x+4y-12=0$

intersection: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \xrightarrow{\cdot 6} 3x+2y=4 \xrightarrow{\cdot 2} 6x+4y=8$

$\rightarrow 6x+4y-8=0$;

avec $6x+4y-12=0$, on voit qu'il n'y a aucune solution

$\implies$ a et b sont parallèles.

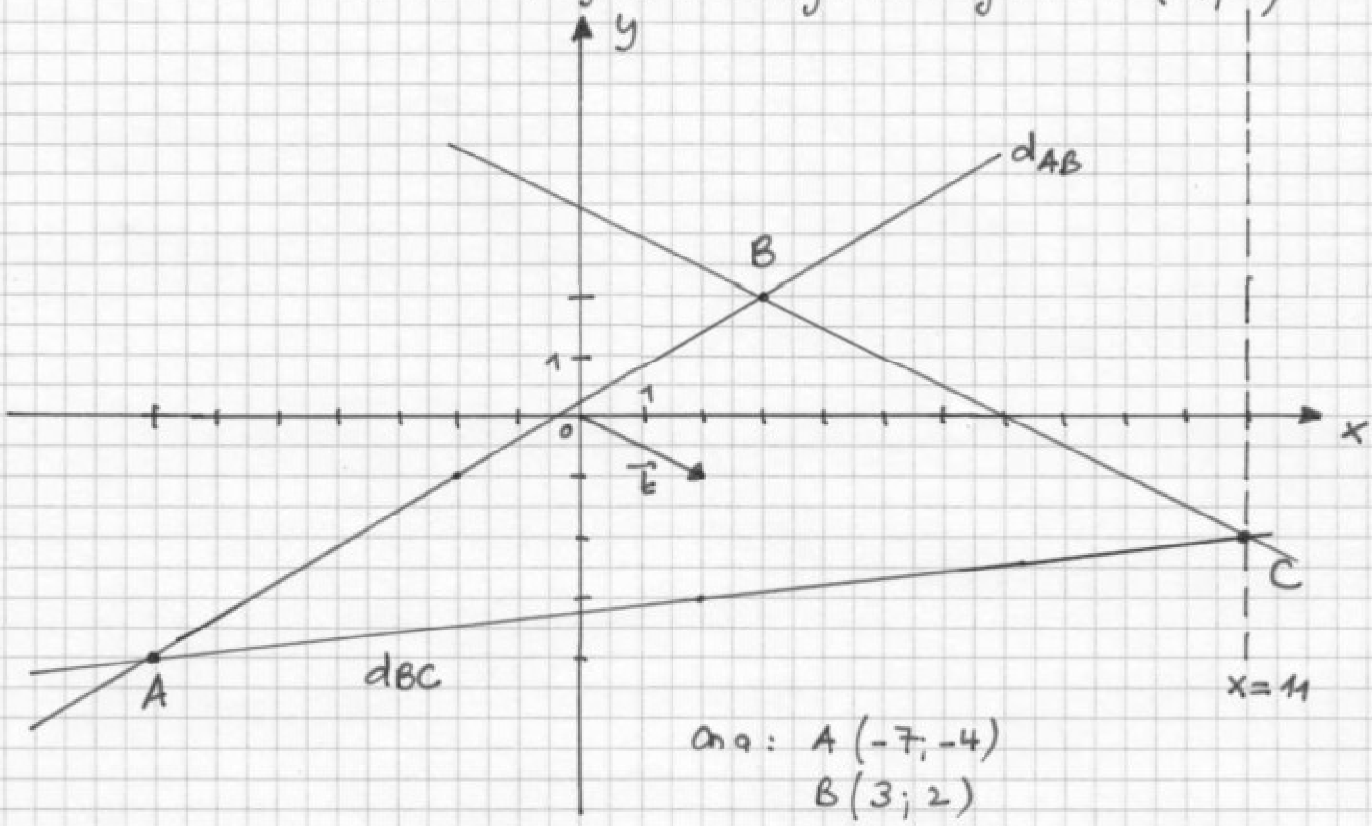
Exercice 19

$d_{AB} : 3x-5y+1=0$: $x=3 \Rightarrow 9-5y+1=0 \Rightarrow 5y=10 \Rightarrow y=2 \rightarrow (3;2)$

$x=-2 \Rightarrow -6-5y+1=0 \Rightarrow 5y=-5 \Rightarrow y=-1 \rightarrow (-2;-1)$

$d_{AC} : x-9y-29=0$: $x=2 \Rightarrow 2-9y-29=0 \Rightarrow 9y=-27 \Rightarrow y=-3 \rightarrow (2;-3)$

$x=-7 \Rightarrow -7-9y-29=0 \Rightarrow 9y=-36 \Rightarrow y=-4 \rightarrow (-7;-4)$



On a : $A(-7;-4)$
$B(3;2)$
$C(11;-2)$

A est l'intersection de d_{AB} : $3x-5y+1=0$ et d_{AC} : $x-9y-29=0$:

$$\begin{cases} 3x-5y+1=0 & \xrightarrow{\cdot 1} \quad 3x-5y+1=0 \\ x-9y-29=0 & \xrightarrow{\cdot(-3)} \quad -3x+27y+87=0 \quad + \end{cases}$$

$$22y+88=0 \Rightarrow 22y=-88 \Rightarrow y=-4;$$

avec $y=-4$, on a $x=9y+29=9(-4)+29=-36+29=-7$.

Donc $A(-7;-4)$.

Pour C, on sait que $C(11;y)$.

Or $C \in d_{AC}$: on doit donc avoir $11-9y-29=0 \Rightarrow 9y=-18 \Rightarrow y=-2$.

Donc $C(11;-2)$.

Un vecteur directeur de la droite BC est $\vec{t} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi des équations paramétriques de la droite BC sont:

$$d_{BC} \begin{cases} x = 11 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \end{cases}.$$

B est l'intersection de d_{AB} et d_{BC}.

Par substitution des équations paramétriques de d_{BC} dans l'équation cartésienne de d_{AB},

on a : $3(11 + 2\lambda) - 5(-2 - \lambda) + 1 = 0 \Rightarrow 33 + 6\lambda + 10 + 5\lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow 11\lambda + 44 = 0 \Rightarrow 11\lambda = -44 \Rightarrow \lambda = -4.$

Avec $\lambda = -4$, on trouve : $x = 11 + 2\lambda = 11 - 8 = 3$ et $y = -2 + 4 = 2$.

Donc $\underline{B(3;2)}$.

Exercice 20

$A(2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(-2;-2)$.

La médiane passant par A, m_A, passe aussi par M_A, le milieu du segment BC.

On a $M_A = \left(\frac{-1+(-2)}{2} ; \frac{3+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Un vecteur directeur de m_A est $\overrightarrow{M_A A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2+\frac{3}{2} \\ -1-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de m_A sont donc : $\begin{cases} x = 2+7\lambda \\ y = -1-3\lambda. \end{cases}$

La médiane passant par B, m_B, passe aussi par M_B, le milieu du segment AC.

On a $M_B = \left(\frac{2+(-2)}{2} ; \frac{-1+(-2)}{2}\right) = \left(0 ; -\frac{3}{2}\right)$.

Un vecteur directeur de m_B est $\overrightarrow{M_B B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de m_B sont donc : $\begin{cases} x = -1-2\mu \\ y = 3+9\mu. \end{cases}$

La médiane passant par C, m_C, passe aussi par M_C, le milieu du segment AB.

On a $M_C = \left(\frac{2+(-1)}{2} ; \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; 1\right)$.

Un vecteur directeur de m_C est $\overrightarrow{M_C C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2-\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de m_C sont donc : $\begin{cases} x = -2-5\nu \\ y = -2-6\nu. \end{cases}$

On a : $m_A : \begin{cases} x = 2+7\lambda \\ y = -1-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6+21\lambda \\ 7y = -7-21\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x+7y = -1.$

Ainsi __l'équation cartésienne de m_A est $3x+7y+1=0$.__

On a : $m_B : \begin{cases} x = -1-2\mu \\ y = 3+9\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = -9-18\mu \\ 2y = 6+18\mu \end{cases} \Rightarrow 9x+2y = -3.$

Ainsi __l'équation cartésienne de m_B est $9x+2y+3=0$.__

On a : $m_C : \begin{cases} x = -2-5\nu \\ y = -2-6\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = -12-30\nu \\ -5y = 10+30\nu \end{cases} \Rightarrow 6x-5y = -2.$

Ainsi __l'équation cartésienne de m_C est $6x-5y+2=0$.__

Cherchons les coordonnées de K, intersection de m_A et m_B, et les coordonnées de L, intersection de m_A et m_C.

$$m_A : 3x + 7y + 1 = 0 \xRightarrow{\cdot 3} 9x + 21y + 3 = 0$$
$$m_B : 9x + 2y + 3 = 0 \xRightarrow{\cdot(-1)} -9x - 2y - 3 = 0 \quad +$$
$$19y = 0 \Rightarrow y = 0 \,;$$

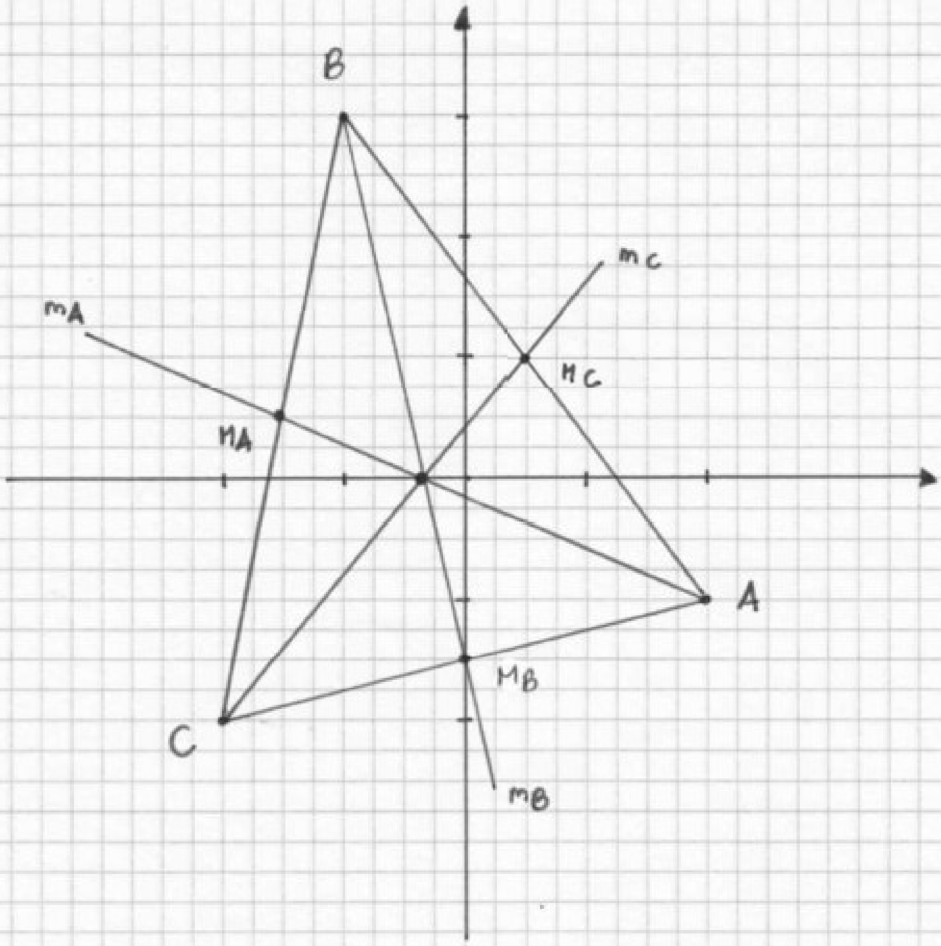
avec $y = 0$, on a $3x + 1 = 0$, i.e. $3x = -1$, i.e. $x = -\frac{1}{3}$;
ainsi $K\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Cherchons les coordonnées de L:

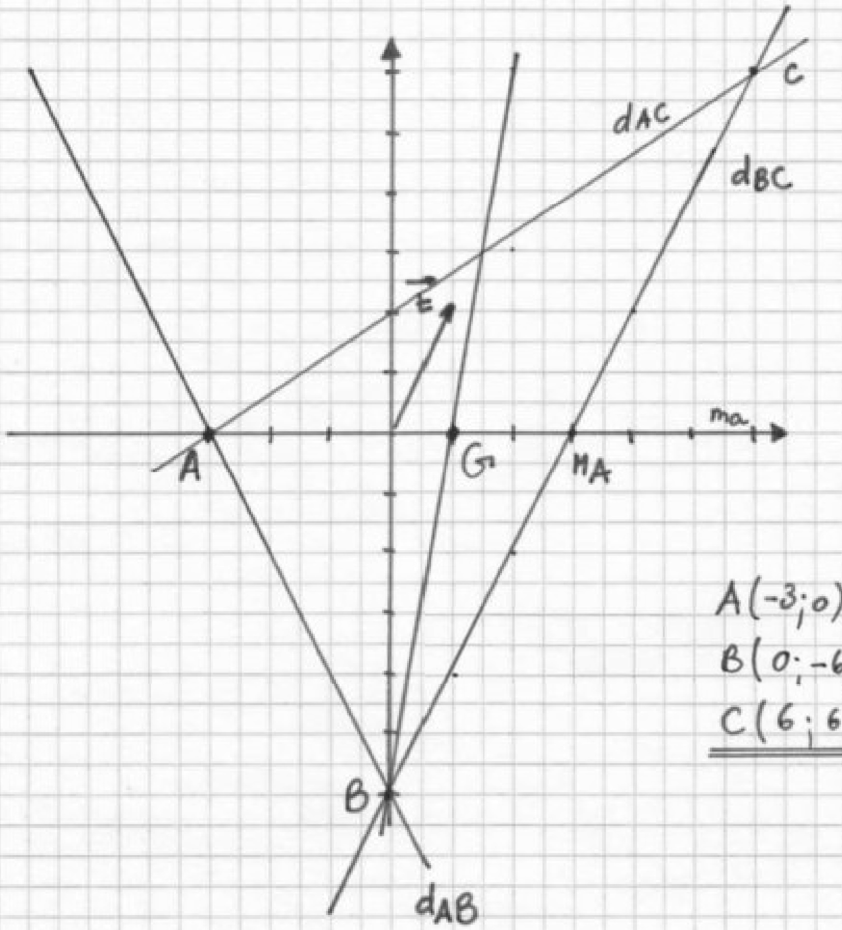
$$m_A : 3x + 7y + 1 = 0 \xRightarrow{\cdot 5} 15x + 35y + 5 = 0$$
$$m_C : 6x - 5y + 2 = 0 \xRightarrow{\cdot 7} 42x - 35y + 14 = 0 \quad +$$
$$57x + 19 = 0 \Rightarrow 57x = -19 \Rightarrow x = -\frac{19}{57} = -\frac{1}{3} \,;$$

avec $x = -\frac{1}{3}$, on a $3\left(-\frac{1}{3}\right) + 7y + 1 = 0$, i.e. $-1 + 7y + 1 = 0$, i.e. $7y = 0$, i.e. $y = 0$;
ainsi $L\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

On a donc $K = L$, ce qui signifie que <u>m_A, m_B et m_C ont un point commun : $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$</u>.



Exercice 21



$A(-3;0)$
$B(0;-6)$
$C(6;6)$

1. $d_{AB}: 2x+y+6=0$
3. L'ordonnée de A vaut 0 : $A(x;0)$ $\Big\} \Rightarrow 2x+6=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow A(-3;0)$

Si M_A est le milieu de BC, on sait que $\overrightarrow{GM_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$ (le centre de gravité se trouve au $\frac{2}{3}$ du segment AM_A en partant de A).

On a : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{GM_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{GM_A} = \overrightarrow{OM_A} - \overrightarrow{OG}$, on a $\overrightarrow{OM_A} - \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OM_A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{OG} =$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_A(3;0)$.

La droite d_{BC} passe par M_A et est parallèle à $\vec{t} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de d_{BC} sont donc : $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2\lambda. \end{cases}$

B est l'intersection de d_{AB} et d_{BC}.

Par substitution des équations paramétriques de d_{BC} dans l'équation cartésienne de d_{AB}, on trouve : $2(3+\lambda) + 2\lambda + 6 = 0 \Rightarrow 6+2\lambda+2\lambda+6=0 \Rightarrow 4\lambda+12=0$

$\Rightarrow 4\lambda = -12 \Rightarrow \lambda = -3$.

Avec $\lambda = -3$, on obtient : $x = 3+\lambda = 3-3 = 0$ et $y = 2\cdot\lambda = 2\cdot(-3) = -6$.

Ainsi $\underline{\underline{B(0;-6)}}$.

Comme M_A est le milieu de BC, on a $\overrightarrow{BM_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM_A}$.

On a : $\overrightarrow{BM_A} = \overrightarrow{OM_A} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{BC} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, on obtient : $\overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\underline{\underline{C(6;6)}}$.

Exercice 22

La norme d'un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

a) On a : $\vec{a} = 2\vec{u_1} - 3\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$;

$\vec{b} = -2\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$;

$\vec{c} = 3\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{c}\| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$;

$\vec{d} = -8\vec{u_1} + 15\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{d}\| = \sqrt{(-8)^2 + 15^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = \underline{\underline{17}}$.

b) On a : $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$;

$\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{a} + \vec{c}\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$.

c)

$\cdot$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
$\vec{a}$	13	-4	-9	-61
$\vec{b}$	-4	4	0	16
$\vec{c}$	-9	0	9	45
$\vec{d}$	-61	16	45	289

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 + 9 = 13$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -4$;

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -9$;

$\vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} = -16 - 45 = -61$;

$\vec{b} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$;

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$;

$\vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} = 16$;

$\vec{c} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$;

$\vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} = 45$;

$\vec{d} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} = 64 + 225 = 289$.

Exercice 23

$\vec{a} = 3\vec{u_1} + 4\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Un vecteur $\vec{b}$ est orthogonal (= perpendiculaire) à $\vec{a}$ si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

En posant $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on doit donc avoir $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$, i.e. $3b_1 + 4b_2 = 0$.

On peut alors choisir $b_1 = 4$ et $b_2 = -3$.

Un vecteur orthogonal à $\vec{a}$ est donc $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Un vecteur $\vec{c}$ unité orthogonal à $\vec{a}$ est un vecteur $\vec{c}$ tel que $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ et $\|\vec{c}\| = 1$.

D'après a), $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{a}$.

On a : $\|\vec{b}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

Posons $\vec{c} = \frac{1}{\|\vec{b}\|} \cdot \vec{b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$.

On a : $\|\vec{c}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$.

Un vecteur unité orthogonal à $\vec{a}$ est donc $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$.

c) Un vecteur $\vec{d}$ de norme 7 orthogonal à $\vec{a}$ est un vecteur $\vec{d}$ tel que $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$ et $\|\vec{d}\| = 7$.

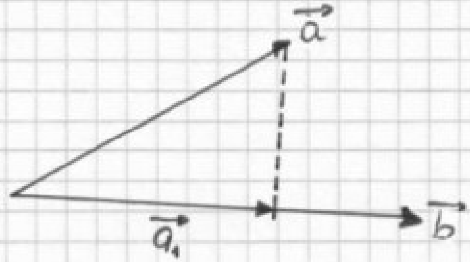
D'après b), $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et $\|\vec{c}\| = 1$.

Posons $\vec{d} = 7 \cdot \vec{c} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/5 \\ -21/5 \end{pmatrix}$.

On a : $\|\vec{d}\| = \sqrt{\left(\frac{28}{5}\right)^2 + \left(-\frac{21}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{784}{25} + \frac{441}{25}} = \sqrt{\frac{1225}{25}} = \sqrt{49} = 7$.

Un vecteur de norme 7 orthogonal à $\vec{a}$ est donc $\vec{d} = \begin{pmatrix} 28/5 \\ -21/5 \end{pmatrix}$.

Exercice 24



Par définition du produit scalaire, on a : $|\vec a \cdot \vec b| = \|\vec{a_1}\| \cdot \|\vec b\|$.

On a donc $\|\vec{a_1}\| = \dfrac{|\vec a \cdot \vec b|}{\|\vec b\|}$.

Ici $\vec a = 5\vec{u_1} - 12\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ et $\vec b = 6\vec{u_1} + 8\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On a : $|\vec a \cdot \vec b| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = |30 - 96| = |-66| = 66$;

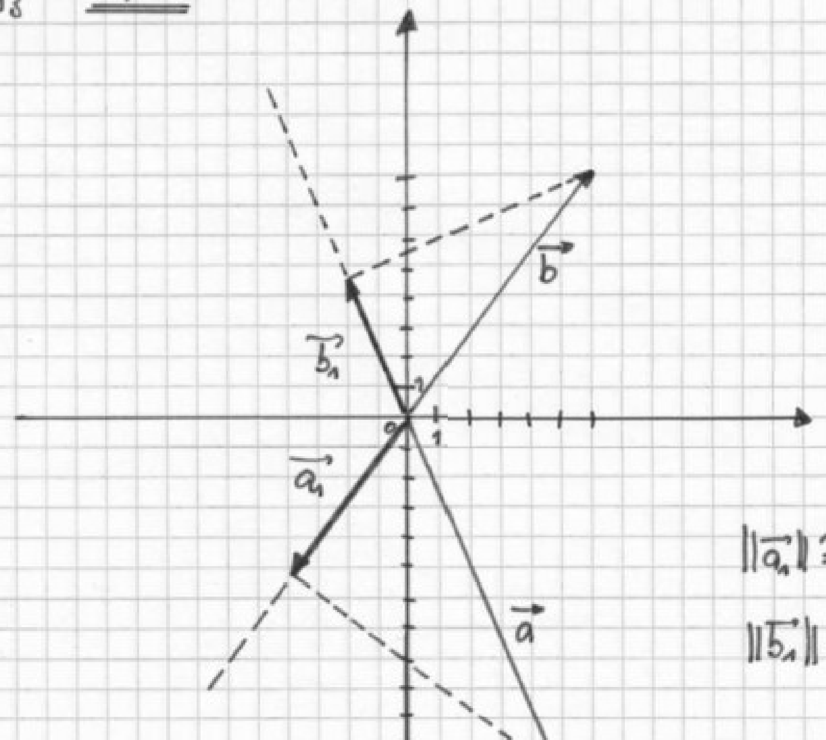
$$\|\vec b\| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

Ainsi $\|\vec{a_1}\| = \dfrac{66}{10} = \underline{\underline{6,6}}$.

Similairement, on va avoir $\|\vec{b_1}\| = \dfrac{|\vec a \cdot \vec b|}{\|\vec a\|}$.

Comme $\|\vec a\| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$, on trouve :

$\|\vec{b_1}\| = \dfrac{66}{13} \cong \underline{\underline{5,08.}}$



$\|\vec{a_1}\| \cong 6,6.$

$\|\vec{b_1}\| \cong 5,1.$

Exercice 25

$\vec{a} = 5\vec{u_1} - 12\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$; $\|\vec{a}\| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$;

$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/13 \\ -12/13 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = 3\vec{u_1} + 4\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\|\vec{b}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$; $\vec{v} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{1}{\|\vec{b}\|}\vec{b} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$.

Posons $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On doit avoir : $\vec{u} \cdot \vec{c} = 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5/13 \\ -12/13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \Rightarrow \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y = 6$

$\Rightarrow 5x - 12y = 78$ ① ;

$\vec{v} \cdot \vec{c} = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = -1$

$\Rightarrow 3x + 4y = -5$ ②.

On a donc 2 équations à 2 inconnues : $\begin{cases} 5x - 12y = 78 & ① \\ 3x + 4y = -5 & ② \end{cases}$.

$$\begin{array}{lll} ① \cdot 1 & \Rightarrow & 5x - 12y = 78 \\ ② \cdot 3 & \Rightarrow & \underline{9x + 12y = -15 \;+} \\ & & 14x = 63 \Rightarrow x = \frac{63}{14} = \frac{9}{2}. \end{array}$$

Avec $x = \frac{9}{2}$ dans ②, on obtient $4y = -5 - 3x = -5 - 3 \cdot \frac{9}{2} = -5 - \frac{27}{2} =$

$= -\frac{37}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{37}{2}\right) = -\frac{37}{8}$.

Ainsi $\vec{c} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ -37/8 \end{pmatrix}$.

Exercice 26

On sait que, si le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à une droite d, alors une équation cartésienne de d est $ax + by + c = 0$.

Ici $\overrightarrow{AB}$ doit être perpendiculaire à la médiatrice.

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à la médiatrice.

Une équation cartésienne de la médiatrice est donc : $4x + 3y + c = 0$.

Reste à déterminer c. Pour cela, on va utiliser un point commun de la droite.
On sait que la médiatrice de AB passe par le milieu M de AB.

On a $M = \left(\frac{-5+3}{2} ; \frac{-4+2}{2} \right) = \left(\frac{-2}{2} ; \frac{-2}{2} \right) = (-1 ; -1)$. Ainsi $M(-1 ; -1)$.

Par substitution dans $4x + 3y + c = 0$, on trouve :
$4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow -4 - 3 + c = 0 \Rightarrow -7 + c = 0 \Rightarrow c = 7$.

Une équation cartésienne de la médiatrice est donc $\underline{\underline{4x + 3y + 7 = 0}}$.