Examens de fin de module Session de juin 2014

Statistique 2

CORRIGÉ

Problème 1 (1)

De manière générale, la probabilité d'un événement E est :

$$\text{prob(événement E)} = \frac{\text{nb de cas où E se produit}}{\text{nb total de cas possibles}}.$$

Dans ce problème, on ne tient pas compte de l'ordre des villes choisies. On aura donc des combinaisons.

a) Ici, l'événement E est les 8 villes choisies "appartiennent" au parti A.
Comme, il y a au total 23 villes "appartenant" au parti A et qu'on en choisit 8, le nombre de cas où E se produit vaut $C_8^{23} = 490'314$.
Comme, au total, on peut choisir 8 villes parmi 35, le nb total de cas possibles est $C_8^{35} = 23'535'820$.

Ainsi, la probabilité que les 8 villes choisies "appartiennent" au parti A est $\frac{490'314}{23'535'820} = 0{,}0208 = 2{,}08\%$.

Comme $2{,}08\% > 2\%$, cela justifie que le tribunal rejette l'argument.

b) Avoir autant de villes A que de villes B, puisqu'on choisit 8 villes en tout, on choisit 4 villes A et 4 villes B (événement E).
Le nombre de possibilités pour avoir 4 villes A est $C_4^{23} = 8855$.
Le nombre de possibilités pour avoir 4 villes B est $C_4^{12} = 495$.
Le nombre de possibilités pour avoir 4 villes A et 4 villes B est alors $8855 \cdot 495 = 4'383'225$.
Le nombre total de possibilités étant, comme en a), $C_8^{35} = 23'535'800$, la probabilité d'avoir autant de villes A que de villes B est $\frac{4'383'225}{23'535'800} = \underline{0{,}1862}$.

Problème 2

Lorsqu'on cherche la probabilité d'une certaine quantité de choses dans un groupe plus grand, on utilise la loi binomiale:

$$p(X=k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k},$$

où X dénombre ce qui est considéré,
k est le nombre voulu parmi un total de n,
p est la probabilité d'obtenir ce qu'on veut si $n=1$.

Ici, X compte le nombre d'appareils défectueux.
On a p = probabilité d'obtenir un appareil défectueux si on en choisit un au hasard $= 2\% = 0{,}02$.

a) On a $n=45$ et $k=3$.

Ainsi $p(X=3) = C_3^{45} \cdot 0{,}02^3 \cdot (1-0{,}02)^{45-3} = \underline{0{,}0486}$.

b) On a: prob (au moins 1 smartphone soit défectueux) $= P(X \geq 1)$
$= 1 -$ prob (aucun smartphone ne soit défectueux) $= 1 - P(X=0)$
$= 1 - C_0^{45} \cdot 0{,}02^0 (1-0{,}02)^{45-0} = \underline{0{,}5971}$.

c) On doit chercher n pour que $P(X \geq 1) = 99\%$.
Comme en b), on a $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$.
On doit donc avoir $1 - P(X=0) = 0{,}99 \implies P(X=0) = 0{,}01$

$$\implies \underbrace{C_0^n}_{1} \cdot \underbrace{0{,}02^0}_{1} \cdot \underbrace{(1-0{,}02)^{n-0}}_{0{,}98^n} = 0{,}01$$

$$\implies 0{,}98^n = 0{,}01$$

$$\implies n = \frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}98)} \simeq 228.$$

On est donc sûr à 99% dès $\underline{228 \text{ unités}}$.

Problème 3

Lorsqu'on considère le nombre de "réussites" (par exemple) se produisant dans un intervalle de temps donné et qu'on connaît la moyenne de ces réussites, on a alors une loi de Poisson.

Ici, le nombre de "réussites" est le nombre de véhicules s'arrêtant au guichet et la moyenne est 4,8 en une minute.

On note $X=$ le nombre de véhicules s'arrêtant au guichet et $\lambda = 4,5$ la moyenne en une minute.

On a alors $P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$.

a) On a $P(X=3) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^3}{3!} = \dfrac{e^{-4,8}\cdot 4,8^3}{3!} = \underline{\underline{0,1517}}$.

b) $P(X>4) = 1 - P(X\leq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) =$

$$= 1 - \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^1}{1!} - \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^2}{2!} - \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^3}{3!} - \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^4}{4!} =$$

$$= 1 - \frac{e^{-4,8}\cdot 1}{1} - \frac{e^{-4,8}\cdot 4,8}{1} - \frac{e^{-4,8}\cdot 4,8^2}{2} - \frac{e^{-4,8}\cdot 4,8^3}{6} - \frac{e^{-4,8}\cdot 4,8^4}{24} =$$

$= \underline{\underline{0,5238}}$.

Problème 4

R suit une loi normale de moyenne 0,7 et d'écart-type 0,18.
Il y a 12'450 entreprises considérées.
Notons X le ratio d'une entreprise prise au hasard.

a) On a $P(X < 0{,}61) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0{,}61-\mu}{\sigma}\right)$ (ainsi $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suivra une loi centrée réduite et on pourra utiliser la table adéquate)

$$\Rightarrow P(X<0{,}61) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0{,}61-0{,}7}{0{,}18}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < -0{,}5\right)$$
$$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < 0{,}5\right) = 1-0{,}69146 = 0{,}30854.$$

Ainsi, le nombre d'entreprises ayant un ratio inférieur à 0,61 est
$$0{,}30854 \cdot 12'450 = \underline{\underline{3841.}}$$

b) On a $P(0{,}43 < X < 1{,}06) = P\left(\frac{0{,}43-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1{,}06-\mu}{\sigma}\right)$
$$= P\left(\frac{0{,}43-0{,}7}{0{,}18} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1{,}06-0{,}7}{0{,}18}\right) = P\left(-1{,}5 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 2\right)$$
$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < 2\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < -1{,}5\right)$$
$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < 2\right) - \left(1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < 1{,}5\right)\right)$$
$$= 0{,}97725 - (1-0{,}93319) = 0{,}97725 - 0{,}06681 = 0{,}91044.$$

Ainsi, le nombre d'entreprises ayant un ratio entre 0,43 et 1,06 est
$$0{,}91044 \cdot 12'450 = \underline{\underline{11'335.}}$$

c) Par analogie avec a) et b), on doit trouver k tel que
$$P(X<k) \cdot 12'450 = 4000.$$

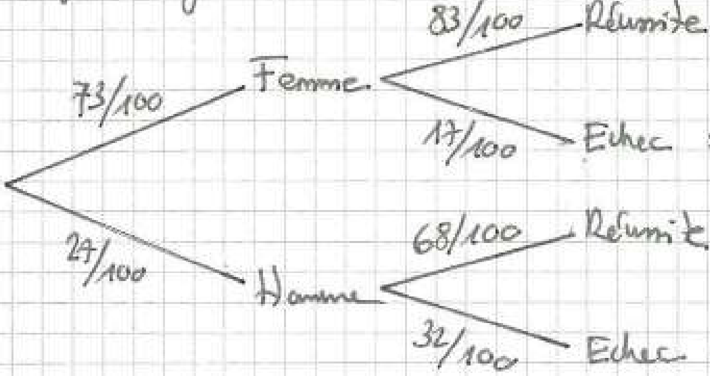
On doit avoir $P(X<k) = \frac{4000}{12'450} = 0{,}3213$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}3213$$
$$\Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < -\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 1-0{,}3213 = 0{,}6787$$
$$\Rightarrow -\frac{k-\mu}{\sigma} = 0{,}462 \quad \text{en utilisant la table de la loi normale}$$
$$\Rightarrow \frac{k-\mu}{\sigma} = -0{,}462 \Rightarrow k = \mu - 0{,}462\sigma = 0{,}7 - 0{,}462 \cdot 0{,}18 = 0{,}617.$$

On trouvera donc les 4000 entreprises les moins saines en dessous du ratio $\underline{\underline{0{,}617}}$.

Problème 5

Ici, on peut faire un arbre :



Réussite : $\frac{73}{100} \cdot \frac{83}{100} = 0,6059$ (1)

Echec : $\frac{73}{100} \cdot \frac{17}{100} = 0,1241$ (2)

Réussite : $\frac{27}{100} \cdot \frac{68}{100} = 0,1836$ (3)

Echec : $\frac{27}{100} \cdot \frac{32}{100} = 0,0864$ (4)

a) (1) + (3) $= 0,6059 + 0,1836 = 0,7895 = \underline{\underline{78,95\,\%}}$.

b) C'est une probabilité conditionnelle. La formule est $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Ici $A =$ c'est un homme et $B =$ la personne a réussi l'examen.

On a $A \cap B = A$ et $B =$ homme qui a réussi l'examen et

$p(A \cap B) =$ (3) $= 0,1836$.

De plus, $p(B) = p$ (réussite à l'examen) $= 0,7895$ d'après a).

Ainsi $P(A|B) = \frac{0,1836}{0,7895} = \underline{\underline{0,2326}}$.