# Chapitre 5. Progressions – Corrigé

## 1. Progressions arithmétiques

Progression arithmétique:

1er terme, 2e terme, 3e terme, ...., ne terme

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} a_n$$

On a: $a_n = a_1 + (n-1)r$

et $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$

### Exercice 1

On a $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, $a_4 = 11$, ... et $r = 3$

1. $a_{216} = a_1 + (216-1)\cdot r = 2 + 215 \cdot 3 = \underline{647}.$

2. $a_n = 1070 \Rightarrow a_1 + (n-1)\cdot r = 1070 \Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl|l} 2 + (n-1)\cdot 3 &=& 1070 & -2 \\ (n-1)\cdot 3 &=& 1068 & :3 \\ n-1 &=& 356 & +1 \\ \underline{n} &\underline{=}& \underline{357} & \end{array}$$

3. On a $a_{224} = a_1 + (224-1)\cdot r = 2 + 223 \cdot 3 = 671.$

Ainsi $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{224} = 224 \cdot \dfrac{a_1 + a_{224}}{2} = 224 \cdot \dfrac{2 + 671}{2} = \underline{75'376.}$

### Exercice 2

On a $a_1 = 2$, $a_n = 118$ et $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1800$.

On cherche $n$ et $r$.

On a $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \Rightarrow 118 = 2 + (n-1)\cdot r \Rightarrow (n-1)\cdot r = 116$

et $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow 1800 = n \cdot \dfrac{2 + 118}{2} \Rightarrow 1800 = n \cdot 60 \Rightarrow \underline{n = 30.}$

Avec $n = 30$ dans $(n-1)\cdot r = 116 \Rightarrow (30-1)\cdot r = 116 \Rightarrow 29 \cdot r = 116 \Rightarrow \underline{r = 4.}$

②

Exercice 3

On a : $a_1 = 48'000$, $a_2 = 49'200$, $a_3 = 50'400$, ... ; $r = 1200$.

$+1200$ $+1200$

On cherche $n$ pour lequel $a_n > 70'000$. Comme $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r = 48'000 + (n-1)\cdot 1200$,

on a $48'000 + (n-1)\cdot 1200 > 70'000$ | $-48'000$

$(n-1)\cdot 1200 > 22'000$ | $:1200$

$n-1 > 18,\overline{3}$ | $+1$

$n > 19,\overline{3}$

$\Longrightarrow n = 20$, autrement dit dans 20 ans.

Le salaire total accumulé est $a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = 20 \cdot \frac{a_1 + a_{20}}{2}$.

On a $a_{20} = a_1 + (n-1)\cdot r = 48'000 + (20-1)\cdot 1200 = 70'800$.

Ainsi le salaire total accumulé est $20 \cdot \frac{48'000 + 70'800}{2} = 1'188'000.-$.

On cherche maintenant $n$ pour que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1'000'000$

$\Longrightarrow n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 1'000'000$.

Comme $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r = 48'000 + (n-1)\cdot 1200 = 48'000 + 1200n - 1200 = 46'800 + 1200n$,

on obtient $n \cdot \frac{48'000 + 46'800 + 1200n}{2} = 1'000'000 \Longrightarrow n \cdot \frac{94'800 + 1200n}{2} = 1'000'000$

$\Longrightarrow n(47'400 + 600n) = 1'000'000 \Longrightarrow 47'400n + 600n^2 = 1'000'000$

$\Longrightarrow 600n^2 + 47'400n - 1'000'000 = 0 \Longrightarrow 6n^2 + 474n - 10'000 = 0$

$\Longrightarrow 3n^2 + 237n - 5000 = 0$.

On a $a = 3$, $b = 237$, $c = -5000$, $b^2 - 4ac = 237^2 - 4\cdot 3\cdot(-5000) = 116'169 > 0$

$\Longrightarrow n_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-237 + \sqrt{116'169}}{2\cdot 3} \cong 17,3$ et

$n_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-237 - \sqrt{116'169}}{2\cdot 3} \cong -96,3 < 0$ exclu.

$\Longrightarrow n \cong 17,3$, autrement dit dans 18 ans.

## Exercice 4

On a $n = 25$, $a_1 = 86$ et $a_1 + a_2 + \dots + a_{25} = 1550$. On cherche $a_{25}$ et $r$.

On a $a_{25} = a_1 + (25-1)\cdot r = a_1 + 24\cdot r = 86 + 24r$ et

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 25 \cdot \frac{a_1 + a_{25}}{2} = 12{,}5 \cdot (86 + a_{25}) =$$

$$= 1075 + 12{,}5\,a_{25} = 1550 \Rightarrow 12{,}5\,a_{25} = 475 \Rightarrow \underline{a_{25} = 38}.$$

Avec $a_{25} = 38$ dans $a_{25} = 86 + 24r$, on a : $38 = 86 + 24r \Rightarrow 24r = -48$

$\Rightarrow \underline{r = -2}.$

## Exercice 5

On a $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 450$ avec $a_2 = a_1 + (2-1)\cdot r = a_1 + r = a_1 - 30$,

$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot r = a_1 + 2\cdot(-30) = a_1 - 60$, $a_4 = a_1 + (4-1)\cdot r = a_1 + 3\cdot(-30) = a_1 - 90$

et $a_5 = a_1 + (5-1)\cdot r = a_1 + 4\cdot(-30) = a_1 - 120$ ($r = -30$ car les prix sont décroissants).

On obtient ainsi $a_1 + a_1 - 30 + a_1 - 60 + a_1 - 90 + a_1 - 120 = 450$

$\Rightarrow 5a_1 - 300 = 450 \Rightarrow 5a_1 = 750 \Rightarrow \underline{a_1 = 150}.$

D'où $a_2 = 150 - 30 = \underline{120}$, $a_3 = 150 - 60 = \underline{90}$, $a_4 = 150 - 90 = \underline{60}$ et $a_5 = 150 - 120 = \underline{30}$.

## Exercice 6

On a $\underbrace{a_1 = 200, a_2 = 240}_{+40}, \underbrace{a_3 = 280}_{+40}, \dots, r = 40$.

1. $a_{30} = a_1 + (30-1)\cdot r = 200 + 29\cdot 40 = 1360$ (montant du 30e jour).
   L'entreprise devra donc payer au total
   $a_1 + a_2 + \dots + a_{30} = 30 \cdot \frac{a_1 + a_{30}}{2} = 30 \cdot \frac{200 + 1360}{2} = 30 \cdot 780 = \underline{23'400.-}$

2. On a $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 50'000$ et on cherche $n$.
   On a $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 50'000$
   $\Rightarrow n\cdot(a_1 + a_n) = 100'000 \Rightarrow n\cdot(200 + a_n) = 100'000.$

   De plus, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r = 200 + (n-1)\cdot 40 = 200 + 40n - 40 = 40n + 160.$
   On obtient ainsi $n\cdot(200 + 40n + 160) = 100'000 \Rightarrow n(40n + 360) = 100'000$
   $\Rightarrow 40n^2 + 360n = 100'000 \Rightarrow 40n^2 + 360n - 100'000 = 0 \Rightarrow n^2 + 9n - 2500 = 0$
   On a $a = 1$, $b = 9$, $c = -2500$, $b^2 - 4ac = 9^2 - 4\cdot 1\cdot(-2500) = 10'081 > 0$
   $\Rightarrow n_1 = \frac{-9 + \sqrt{10'081}}{2} \cong 45{,}7$ et $n_2 = \frac{-9 - \sqrt{10'081}}{2} = -54{,}7 < 0$ exclu.
   Elle peut donc s'accorder $\underline{45 \text{ jours}}$ de retard (après 46 jours, ça dépasse 50'000.-).

# 2. Progressions géométriques

**Progression géométrique :**

1er terme 2e terme 3e terme .... ne terme

$$a_1 \xrightarrow{\cdot r} a_2 \xrightarrow{\cdot r} a_3 \xrightarrow{\cdot r} \dots \xrightarrow{\cdot r} a_n$$

On a $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{et}$$

$$S = a_1 + a_2 + \dots \text{(jusqu'à l'infini)} = a_1 \cdot \frac{1}{1-r} \quad \text{si}$$

$|r| < 1$, autrement dit $-1 < r < 1$.

## Exercice 1

1. On a $a_1 = 2$ et $r = 2 \Rightarrow a_{11} = a_1 \cdot r^{11-1} = 2 \cdot 2^{10} = 2^{11} = \underline{2048}$.

   Et $S_{11} = a_1 \cdot \frac{1-r^{11}}{1-r} = 2 \cdot \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2 \cdot \frac{-2047}{-1} = \underline{4094}$.

2. On a $a_1 = 729$ et $r = \frac{486}{729} = \frac{2}{3} \Rightarrow a_{11} = a_1 \cdot r^{11-1} = 729 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \underline{\frac{1024}{81} \cong 12,64}$.

   Et $S_{11} = a_1 \cdot \frac{1-r^{11}}{1-r} = 729 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{1-\frac{2}{3}} = 729 \cdot \frac{1-\frac{2048}{177'147}}{\frac{1}{3}} = 729 \cdot \frac{175099}{177'147} : \frac{1}{3} =$

   $\cong \underline{2161,716}$.

3. On a $a_1 = \frac{1}{3}$ et $r = \frac{1}{3} \Rightarrow a_{11} = a_1 \cdot r^{11-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \left(\frac{1}{3}\right)^{11} = \underline{\frac{1}{177'147} \cong 0,000005645}$.

   Et $S_{11} = a_1 \cdot \frac{1-r^{11}}{1-r} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\frac{1}{177'147}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{177'146}{177'147} : \frac{2}{3} \cong \underline{0,5}$.

4. On a $a_1 = 48$ et $r = \frac{-72}{48} = -1,5 \Rightarrow a_{11} = a_1 \cdot r^{11-1} = 48 \cdot (-1,5)^{10} \cong \underline{2767,92}$.

   Et $S_{11} = a_1 \cdot \frac{1-r^{11}}{1-r} = 48 \cdot \frac{1-(-1,5)^{11}}{1-(-1,5)} \cong 48 \cdot \frac{87,5}{2,5} \cong \underline{1679,95}$.

## Exercice 2

On a $a_1 = 78'125$ et $a_8 = 128$. On a alors $a_8 = a_1 \cdot r^{8-1} \Rightarrow r^7 = \frac{a_8}{a_1} = \frac{128}{78'125}$

$\Rightarrow \underline{r = \frac{2}{5}}$.

On a alors $S_8 = a_1 \cdot \frac{1-r^8}{1-r} = 78'125 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^8}{1-\frac{2}{5}} = 78'125 \cdot \frac{1-\frac{256}{390'625}}{\frac{3}{5}} =$

$= 78'125 \cdot \frac{390'369}{390'625} \cdot \frac{5}{3} = \underline{130'123}$.

## Exercice 3

Une dépréciation annuelle de 25% de la valeur au début de l'année correspond à faire valeur au début de l'année − 25% de valeur au début de l'année

$\Rightarrow$ valeur au début de l'année − 0,25 · valeur au début de l'année

$\Rightarrow$ 0,75 · valeur au début de l'année.

On a donc $r = 0{,}75$.

Comme $a_1 = 18'000$, on a $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = 18'000 \cdot 0{,}75^4 = \underline{5695{,}31}$.

## Exercice 4

Une augmentation annuelle de 8% correspond à ajouter 8% aux 100%, donc à calculer les 108%, donc à multiplier par 1,08. On a donc $r = 1{,}08$.

1. Comme $a_1 = 60'000$, on a $a_{11} = a_1 \cdot r^{11-1} = 60'000 \cdot 1{,}08^{10} \cong \underline{129'535{,}50}$.

2. On a $n = 20$, $a_1 = 60'000$, $a_{20} = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 60'000 = 180'000$.
De plus $a_{20} = a_1 \cdot r^{20-1} \Rightarrow 180'000 = 60'000 \cdot r^{19} \Rightarrow r^{19} = 3 \Rightarrow r \cong 1{,}0595$.
L'augmentation annuelle devra être de $0{,}0595 \rightarrow \underline{5{,}95\,\%}$.

## Exercice 5

On a la progression géométrique $a_1$, $a_2 = a_1 \cdot r$, $a_3 = a_1 \cdot r^2$.

La somme est 217 : $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 217$

Le produit est 42'875 : $a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 = 42'875 \Rightarrow a_1^3 r^3 = 42'875$

$\Rightarrow (a_1 r)^3 = 42'875 \Rightarrow a_1 r = 35 \Rightarrow r = \frac{35}{a_1}$.

Dans $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 217$, cela donne $a_1 + a_1 \frac{35}{a_1} + a_1 \left(\frac{35}{a_1}\right)^2 = 217$

$\Rightarrow a_1 + 35 + \frac{1225}{a_1} = 217 \Rightarrow a_1^2 + 35 a_1 + 1225 = 217 a_1 \Rightarrow a_1^2 - 182 a_1 + 1225 = 0$.

On a $a = 1$, $b = -182$, $c = 1225$, $b^2 - 4ac = (-182)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1225 = 28'224 > 0$

$\Rightarrow a_{1_1} = \frac{182 + \sqrt{28'224}}{2} = 175$ et $a_{1_2} = \frac{182 - \sqrt{28'224}}{2} = 7$.

Avec $a_1 = 175$, on a $r = \frac{35}{175} = 0{,}2$, $a_2 = a_1 \cdot r = 175 \cdot 0{,}2 = 35$, $a_3 = a_1 \cdot r^2 =$
$= 175 \cdot 0{,}2^2 = 7$.

Avec $a_1 = 7$, on a $r = \frac{35}{7} = 5$, $a_2 = a_1 \cdot r = 7 \cdot 5 = 35$, $a_3 = a_1 \cdot r^2 = 7 \cdot 5^2 = 175$.

Les 3 nombres sont donc $\underline{7,\ 35 \text{ et } 175 \text{ ou inversement.}}$

## Exercice 6

On a $a_1 = 6$ , $S = 10$ avec $S = a_1 \cdot \frac{1}{1-r}$.

Ainsi $10 = 6 \cdot \frac{1}{1-r} \Rightarrow 10(1-r) = 6 \Rightarrow 1-r = 0,6 \Rightarrow \underline{r = 0,4}$.

## Exercice 7

On a $a_1 = \frac{32}{9}$ et $a_9 = \frac{729}{8}$.

De plus, $a_9 = a_1 \cdot r^{9-1} \Rightarrow \frac{729}{8} = \frac{32}{9} \cdot r^8 \Rightarrow r^8 = \frac{729}{8} : \frac{32}{9} = \frac{6561}{256}$

$\Rightarrow \underline{r = \frac{3}{2}}$.

On a alors $S_9 = a_1 \cdot \frac{1-r^9}{1-r} = \frac{32}{9} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^9}{1-\frac{3}{2}} = \frac{32}{9} \cdot \frac{1-\frac{19'683}{512}}{-\frac{1}{2}} =$

$= \frac{32}{9} \cdot \left(-\frac{19171}{512}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{32}{9} \cdot \frac{19171}{512} \cdot 2 = \frac{19171}{72} \cong \underline{266,26}$.