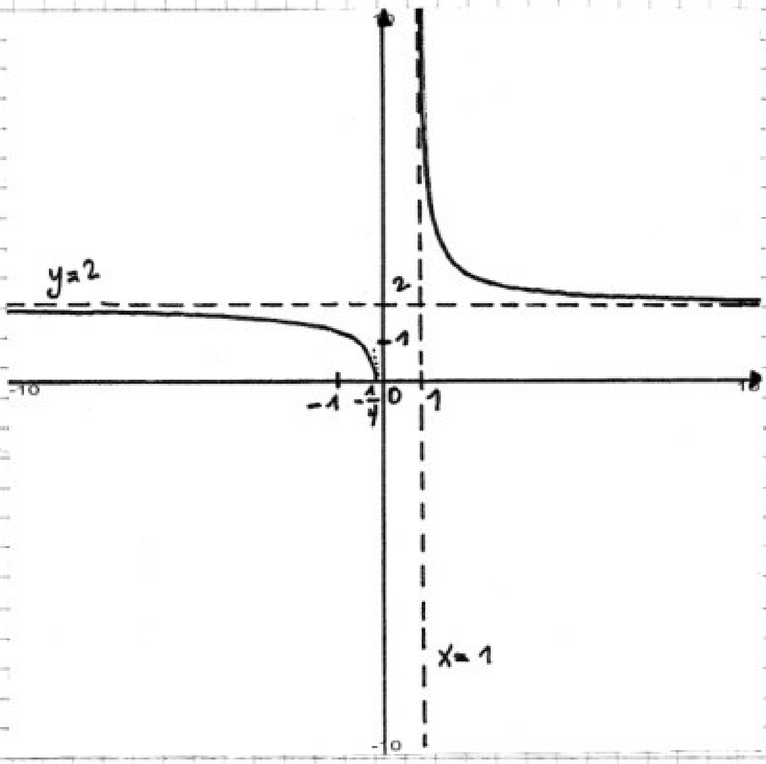


h. $f(x) = \dfrac{1-|1-x^2|}{1-x}$.

Commençons par écrire cette fonction sans la valeur absolue :

- si $1-x^2 \geqslant 0$, on a $f(x) = \dfrac{1-(1-x^2)}{1-x} = \dfrac{1-1+x^2}{1-x} = \dfrac{x^2}{1-x}$;
- si $1-x^2 < 0$, on a $f(x) = \dfrac{1-(-(1-x^2))}{1-x} = \dfrac{1+1-x^2}{1-x} = \dfrac{2-x^2}{1-x}$.

De plus $1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$.

Ainsi $1-x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-1;1]$ et $1-x^2<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

On peut donc écrire :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x^2}{1-x} & \text{si } x>1 \\ \dfrac{x^2}{1-x} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{2-x^2}{1-x} & \text{si } x<-1. \end{cases}$$

a) <u>Domaine de définition</u>: On doit avoir $1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Ainsi $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On peut donc écrire :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x^2}{1-x} & \text{si } x>1 \\ \dfrac{x^2}{1-x} & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{2-x^2}{1-x} & \text{si } x<-1. \end{cases}$$

b) <u>Parité</u>: $f(-x) = \dfrac{1-|1-(-x)^2|}{1-(-x)} = \dfrac{1-|1-x^2|}{1+x} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) <u>Périodicité</u>: f ne contenant pas de fonctions périodiques (fonctions trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) <u>Zéros</u>: On doit résoudre $f(x)=0$:

- si $x<-1$ ou $x>1$, $f(x) = \dfrac{2-x^2}{1-x}$: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{2-x^2}{1-x}=0 \Rightarrow 2-x^2=0$

$\Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (on a bien $\sqrt{2}>1$ et $-\sqrt{2}<-1$) ;

- si $-1\leq x<1$, $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{1-x}=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$ (on a bien $-1\leq 0<1$).

Ainsi les zéros de f sont $x=-\sqrt{2}$, $x=0$ et $x=\sqrt{2}$.

e) Intersections avec Oy: On pose $x=0$. En $-1\leq x<1$, $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$. Ainsi $f(0)=\frac{0^2}{1-0}=0$
$\Rightarrow f$ coupe l'axe Oy en $y=0$.

f) Tableau de signes:

x		$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{2}$	
signes de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: On doit considérer l'exclu de D_f : $x=1$.
On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^2}{1-x}=\text{"}\frac{1^2}{0_+}\text{"}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{2-x^2}{1-x}=\text{"}\frac{2-1^2}{0_-}\text{"}=$
$=\text{"}\frac{1}{0_-}\text{"}=-\infty$.

Ainsi $x=1$ est une asymptote verticale. Il n'y a pas de sauts, ni de trous.

h) Comportement asymptotique: D'après g), on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=-\infty$.

i) Asymptotes non verticales: Comme on va chercher ce qu'il se passe lorsque $x\to\pm\infty$, on va considérer $|x|>1$. Ainsi, dans cet intervalle, $f(x)=\frac{2-x^2}{1-x}$.
Effectuons la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} -x^2+2 & -x+1 \\ \hline \underline{-(-x^2+x)} & x+1 \\ -x+2 & \\ \underline{-(-x+1)} & \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $y=x+1$ est une asymptote oblique.

j) Comportement asymptotique: D'après i), on a $f(x)=x+1+\frac{1}{1-x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x}=\text{"}\frac{1}{+\infty}\text{"}=0_+$, la courbe s'approchera de $y=x+1$ par au-dessus à $-\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-x}=\text{"}\frac{1}{-\infty}\text{"}=0_-$, la courbe s'approchera de $y=x-1$ par au-dessous à $+\infty$.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: On doit avoir:

1) Si $x<-1$ ou $x>1$, $y=\frac{2-x^2}{1-x}$ et $y=x+1$;
2) Si $-1\leq x<1$, $y=\frac{x^2}{1-x}$ et $y=x+1$.

1) $y=\frac{2-x^2}{1-x}$ et $y=x+1 \Rightarrow \frac{2-x^2}{1-x}=x+1 \Rightarrow 2-x^2=(x+1)(1-x) \Rightarrow 2-x^2=1-x^2$
$\Rightarrow 2=1 \Rightarrow$ impossible $\Rightarrow f$ ne coupe pas $y=x+1$ dans l'intervalle $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

2) $y=\frac{x^2}{1-x}$ et $y=x+1 \Rightarrow \frac{x^2}{1-x}=x+1 \Rightarrow x^2=(x+1)(1-x) \Rightarrow x^2=1-x^2$

$\Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (on a bien $-1 \leq \pm\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$).

Avec $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $f(x)=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\frac{2}{4}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}:\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4-2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\cong 1{,}707.$

Avec $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $f(x)=\dfrac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\frac{2}{4}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}:\frac{2+\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4-2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\cong 0{,}293$

Par conséquent, f coupe son asymptote oblique $y=x+1$ en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\cong$ $\cong(-0{,}707;0{,}293)$ et en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\cong(0{,}707;1{,}707)$.

l) <u>Première dérivée:</u> On doit calculer $f'(x)$ sur: 1) $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et 2) $]-1;1[$.

1) On a $f(x)=\frac{2-x^2}{1-x}=\frac{u}{v}$ avec $u=2-x^2$ et $v=1-x$. On a $u'=-2x$ et $v'=-1$.

Ainsi $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{-2x(1-x)-(2-x^2)(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{-2x+2x^2+2-x^2}{(1-x)^2}=\dfrac{x^2-2x+2}{(1-x)^2}$

2) On a $f(x)=\frac{x^2}{1-x}=\frac{u}{v}$ avec $u=x^2$ et $v=1-x$. On a $u'=2x$ et $v'=-1$.

Ainsi $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2}=\dfrac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$.

$$\text{Ainsi, } f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+2}{(1-x)^2} & \text{si } x>1\\ \dfrac{-x^2+2x}{(1-x)^2} & \text{si } -1<x<1\\ \dfrac{x^2-2x+2}{(1-x)^2} & \text{si } x<-1\end{cases}$$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\dfrac{x^2-2x+2}{(1-x)^2}=\dfrac{(-1)^2-2(-1)+2}{(1+1)^2}=\dfrac{1+2+2}{4}=\dfrac{5}{4}$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\dfrac{-x^2+2x}{(1-x)^2}=\dfrac{-(-1)^2+2(-1)}{(1+1)^2}=\dfrac{-1-2}{4}=-\dfrac{3}{4}$.

Ainsi $f'(x)$ n'existe pas en $x=-1$ (elle n'existe pas en $x=1$ puisque $x=1\notin D_f$ et que $x=1$ est une asymptote verticale). Ainsi $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

m) <u>Points à tangentes horizontales:</u> On doit résoudre $f'(x)=0$ sur: 1) $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et 2) $]-1;1[$.

1) $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-2x+2}{(1-x)^2}=0 \Rightarrow x^2-2x+2=0$, équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-2$ et $c=2$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=4-8=-4<0 \Rightarrow$ il n'y a pas de solution, donc pas de point à tangente horizontale dans $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

2) $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-x^2+2x}{(1-x)^2}=0 \Rightarrow -x^2+2x=0 \Rightarrow -x(x-2)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x=2$;
comme $x=2\notin]-1;1[$, on a la solution unique $x=0$;
en $x=0$, on a $f(x)=\frac{0^2}{1-0}=0 \Rightarrow$ l'unique point à tangente horizontale est $(0;0)$

n) <u>Pente des tangentes aux points critiques de f':</u> Le point critique de f' est $x=-1$.
D'après e), on a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f'(x) = \frac{5}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} = -\frac{3}{4}$.

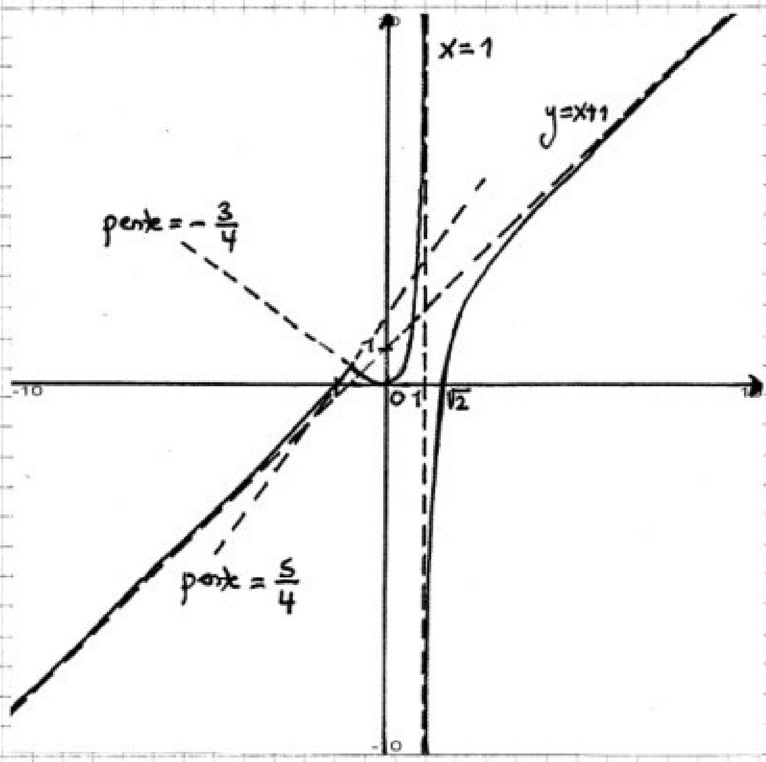
o) <u>Tableau de variations:</u>

x		-1		0		1	
Signes de $f'(x)$	$+$	////	$-$	0	$+$	////	$+$
Croissance ou décroissance de $f(x)$	↗		↘		↗		↗

p) <u>Nature des points à tangentes horizontales:</u> En $x=0$, c'est-à-dire au point $(0;0)$, f atteint un minimum (local).
On remarque que, comme $f(-1) = \frac{(-1)^2}{1+1} = \frac{1}{2}$ existe, f admet un maximum (local) en $(-1; \frac{1}{2})$ (mais ce n'est pas un point à tangente horizontale).

q) r) s) <u>Deuxième dérivée:</u> f' étant une fonction assez compliquée, on ne calcule pas la 2e dérivée.

t) <u>Graphique:</u>



i. $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$.

a) Domaine de définition: On doit avoir $x^2-x-6 \geqslant 0$.

$x^2-x-6=(x+2)(x-3) \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow (x+2)(x-3)=0$

$\Rightarrow$ soit $x+2=0$, c'est-à-dire $x=-2$, soit $x-3=0$, c'est-à-dire $x=3$.

Comme x^2-x-6 est une parabole tournée vers le haut ($\cup$), on a

$x^2-x-6 \geqslant 0$ si $x \in]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[= \mathbb{R}-]-2;3[$.

Ainsi $D_f =]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[= \mathbb{R}-]-2;3[$

b) Parité: $f(-x)=\sqrt{(-x)^2-(-x)-6}=\sqrt{x^2+x-6} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (fonctions trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-6}=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=-2$ et $x=3$ (voir a)).

e) Intersection avec Oy: Comme $x=0 \notin D_f$, il n'y a pas d'intersection avec Oy.

f) Tableau de signes:

x		-2		3	
signes de $f(x)$	$+$	0	//////	0	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Comme $D_f=]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[$ avec $f(-2)=f(3)=0$, il n'y a pas d'asymptotes verticales, ni d'ailleurs de sauts ou de trous.

h) Comportement asymptotique: —

i) Asymptotes non verticales: On va voir s'il existe une (ou des) asymptotes non verticales $y=mx+h$ avec $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$.

On a $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{x}$. Si $x>0$, $\frac{f(x)}{x}=\sqrt{\frac{x^2-x-6}{x^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}$. Si $x<0$, $\frac{f(x)}{x}=$

$=-\sqrt{\frac{x^2-x-6}{x^2}}=-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}=\sqrt{1-0-0}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}\right)=$

$=-\sqrt{1-0-0}=-1$.

Lorsque $x\to+\infty$, on a $m=1$ et, lorsque $x\to-\infty$, on a $m=-1$.

Avec $m=1$ lorsque $x\to+\infty$, on a $h=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x-6}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x-6}-x)(\sqrt{x^2-x-6}+x)}{\sqrt{x^2-x-6}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-6-x^2}{\sqrt{x^2-x-6}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x-6}{\sqrt{x^2-x-6}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(-1-\frac{6}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2})}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(-1-\frac{6}{x})}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(-1-\frac{6}{x})}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}+1}=\frac{-1-0}{\sqrt{1-0-0}+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$.

Avec $m=-1$ lorsque $x\to-\infty$, on a $h=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x-6}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-6}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-6}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-6}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-6-x^2}{\sqrt{x^2-x-6}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x-6}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1-\frac{6}{x}\right)}{\underset{\text{car } x<0}{-x}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1-\frac{6}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{6}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1-0-0}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

On a par conséquent 2 asymptotes obliques :

- si $x\to+\infty$, $m=1$ et $h=-\frac{1}{2} \Rightarrow y = x-\frac{1}{2}$;
- si $x\to-\infty$, $m=-1$ et $h=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-x+\frac{1}{2}$.

j) <u>Comportement asymptotique:</u>

Si $x\to+\infty$, l'asymptote oblique est $y=x-\frac{1}{2}$.

On a $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x-6}-x+\frac{1}{2}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x-6}-x\right)+\frac{1}{2} \underset{\text{Voir i)}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}+1}+\frac{1}{2} = \frac{-1-0_+}{1+1}+\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{-1_-}{2}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}_- + \frac{1}{2} = 0_-.$$ Ainsi f s'approche de $y=x-\frac{1}{2}$ par en-dessous lorsque $x\to+\infty$.

Si $x\to-\infty$, l'asymptote oblique est $y=-x+\frac{1}{2}$.

On a $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x-6}+x-\frac{1}{2}\right) =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x-6}+x\right)-\frac{1}{2} \underset{\text{Voir i)}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}+1}-\frac{1}{2} = \frac{1+0_-}{1+1}-\frac{1}{2} = \frac{1_-}{2}+\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2_-}+\frac{1}{2} = 0_-.$$ Ainsi f s'approche de $y=-x+\frac{1}{2}$ par en-dessous lorsque $x\to-\infty$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> On doit chercher les $x\in D_f=\mathbb{R}\setminus\,]-2;3[$ tels que: 1) $f(x)=x-\frac{1}{2}$ et 2) $f(x)=-x+\frac{1}{2}$.

1) $f(x)=x-\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-x-6}=x-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2-x-6=x^2-x+\frac{1}{4}$
$\Rightarrow -6=\frac{1}{4} \Rightarrow$ impossible.

2) $f(x)=-x+\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-x-6}=-x+\frac{1}{2} \Rightarrow x^2-x-6=\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2-x-6=x^2-x+\frac{1}{4}$
$\Rightarrow -6=\frac{1}{4} \Rightarrow$ impossible.

Ainsi f ne coupe pas ses asymptotes non verticales.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-x-6}}(2x-1)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-6}}$. Son domaine est le même que celui de f à l'exception des zéros de x^2-x-6 qui sont $x=-2$ et $x=3$.

Ainsi le domaine de f' est $D_{f'} =]-\infty;-2[\cup]3;+\infty[= \mathbb{R} \setminus [-2;3]$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> On doit résoudre $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-6}}=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Or $x=\frac{1}{2} \notin D_{f'}$. Ainsi f n'a pas de points à tangente horizontale.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Les points critiques sont $x=-2$ et $x=3$ (avec $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus [-2;3]$).

On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-6}} = \frac{-4-1}{0+} = -\infty$. Ainsi la pente de f en $x=-2$ est $-\infty$.

De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-6}} = \frac{6-1}{0+} = +\infty$. Ainsi la pente de f en $x=3$ est $+\infty$.

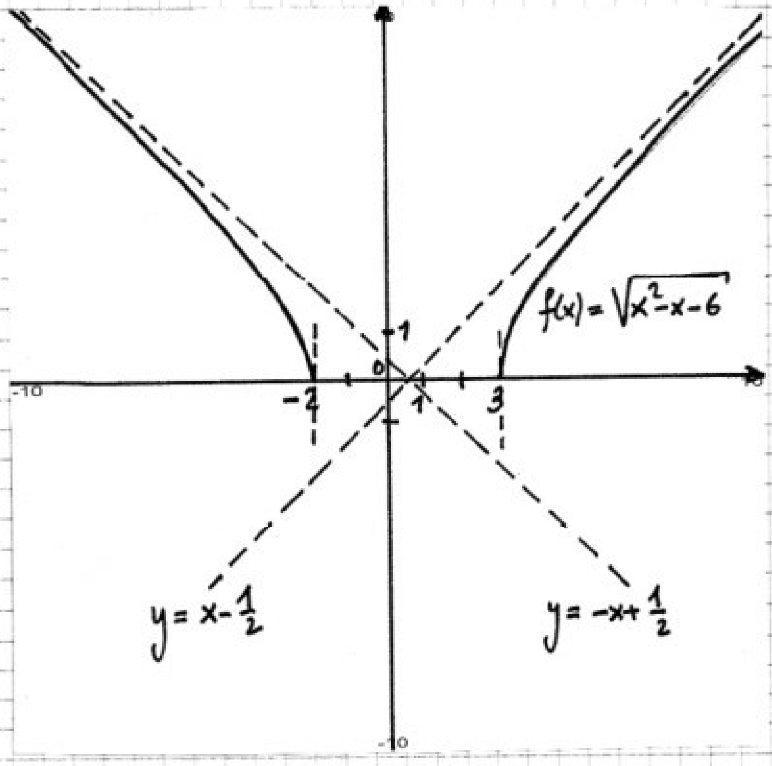
o) <u>Tableau de variations:</u>

x		-2		3	
signes de $f'(x)$	$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↘				↗

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> Il n'y a pas de points à tangente horizontale.

q) r) s) <u>Deuxième dérivée:</u> f' étant une fonction assez compliquée, on ne calcule pas la 2^e dérivée.

t) <u>Graphique:</u>



j. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2} \cdot |x-2|$.

Si $x-2 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant 2$, on a $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2}(x-2) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{2}$.

Si $x-2 < 0$, c'est-à-dire si $x < 2$, on a $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2}\left(-(x-2)\right) = -\frac{(x+1)^2(x-2)}{2}$.

On a ainsi $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2(x-2)}{2} & \text{si } x \geqslant 2 \\ -\frac{(x+1)^2(x-2)}{2} & \text{si } x < 2. \end{cases}$

a) Domaine de définition: On a $D = \mathbb{R}$ (on peut calculer f pour toute valeur de x).

b) Parité: $f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{2}|-x-2| = \frac{(-x+1)^2}{2}|x-2| \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (fonctions trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{2} \cdot |x-2| = 0 \Rightarrow$ soit $(x+1)^2 = 0$, soit $|x-2| = 0$

$\Rightarrow$ soit $x+1 = 0$, soit $x-2 = 0 \Rightarrow$ soit $x = -1$, soit $x = 2$.

e) Intersection avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{(0+1)^2}{2}|0-2| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

f) Tableau de signes:

x		-1		2	
signe de $f(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$

g) Asymptotes verticales, pouts, trous: Comme $D = \mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 0$, il n'y a ni pouts, ni trous.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: Comme $f(x)$, autant si $x \geqslant 2$ que si $x < 2$, est un polynôme du 3^e degré, f n'a pas d'asymptotes non verticales.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: Si $x \geqslant 2$, $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{2} = \frac{(x^2+2x+1)(x-2)}{2} =$

$= \frac{x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2}{2} = \frac{x^3 - 3x - 2}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{2}$.

Si $x < 2$, $f(x) = -\frac{(x+1)^2(x-2)}{2} = -\frac{x^3 - 3x - 2}{2}$ (voir ci-dessus) $\Rightarrow f'(x) = -\frac{3x^2-3}{2}$.

On a ainsi $f'(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-3}{2} & \text{si } x \geqslant 2 \\ -\frac{3x^2-3}{2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$. On a $D_{f'} = \mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: On doit résoudre $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \pm\frac{3x^2-3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2-3}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

En $x = -1$, on a $f(x) = \frac{(-1+1)^2}{2}|-1-2| = 0$. En $x = 1$, on a $f(x) = \frac{(1+1)^2}{2} \cdot |1-2| =$

$= \frac{2^2}{2}\cdot 1 = 2.$

Les points à tangente horizontale de f sont $(-1;0)$ et $(1;2)$.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Le point critique de f' est $x=2$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left(-\frac{3x^2-3}{2}\right) = -\frac{3\cdot 2^2-3}{2} = -\frac{9}{2}$ et on a $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f'(x) =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{3x^2-3}{2} = \frac{3\cdot 2^2-3}{2} = \frac{9}{2}$. Ainsi la pente en $x=2$ est $-\frac{9}{2}$ si $x \underset{<}{\to} 2$

et $\frac{9}{2}$ si $x \underset{>}{\to} 2$.

o) <u>Tableau de variation:</u>

x		-1		1		2	
Signes de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{9}{2}/\frac{9}{2}$	$+$
Croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	min en $(-1;0)$	$\nearrow$	max en $(1;2)$	$\searrow$	min en $(2;0)$	$\nearrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> La fonction a 2 minimums : en $(-1;0)$ et $(2;0)$. Elle a un maximum (local) en $(1;2)$.

q) <u>Deuxième dérivée:</u> Si $x \geqslant 2$, $f'(x) = \frac{3x^2-3}{2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x}{2} = 3x$.

Si $x < 2$, $f'(x) = -\frac{3x^2-3}{2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{6x}{2} = -3x$.

On a ainsi $f''(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \geqslant 2 \\ -3x & \text{si } x < 2 \end{cases}$. Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}$.

r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x) = 0 \Rightarrow \pm 3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

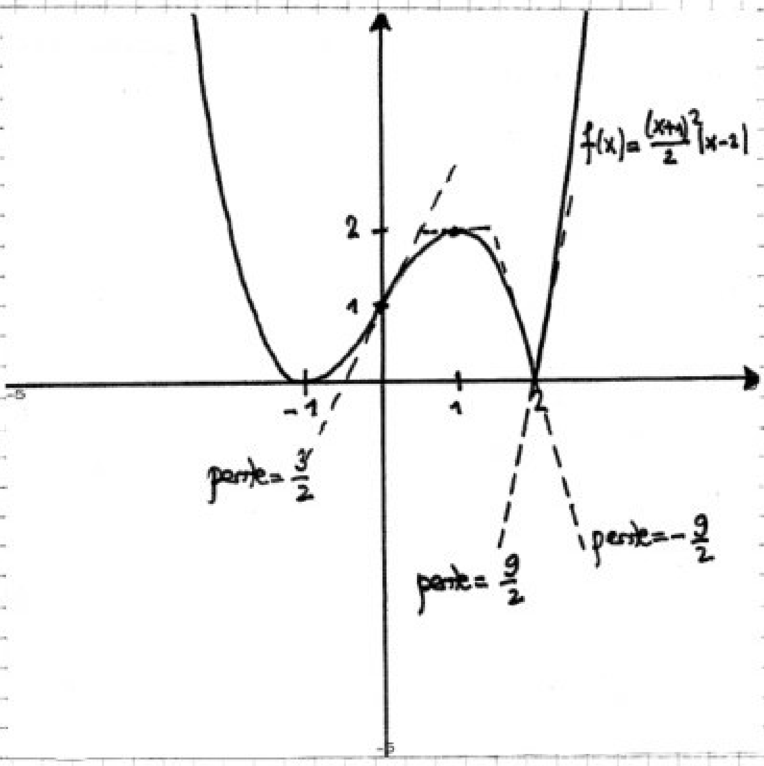
Avec $x=0$, on a $f(x) = 1$ (voir e)) et $f'(x) = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x		0		2	
Signes de $f''(x)$	$+$	0	$-$		$+$
Concavité ou convexité de $f(x)$	$\cup$ convexe	P.I.	$\cap$ concave		$\cup$ convexe

D'après r), $(0;\frac{3}{2})$ est un point d'inflexion (P.I.) et la pente de la tangente de f en $x=0$ est $\frac{3}{2}$.

t) <u>Graphique:</u>



k. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

a) Domaine de définition: On doit avoir $x-2 \neq 0$ et $\dfrac{x^3}{x-2} \geqslant 0$.

Si $x-2>0$, c'est-à-dire $x>2$, on a $\dfrac{x^3}{x-2} \geqslant 0$.

Si $0<x<2$, on a $\dfrac{x^3}{x-2} < 0$.

Si $x \leqslant 0$, on a $\dfrac{x^3}{x-2} \geqslant 0$.

Ainsi $D = \mathbb{R} \setminus]0;2] =]-\infty;0] \cup]2;+\infty[$.

b) Parité: $f(-x) = \sqrt{\dfrac{(-x)^3}{-x-2}} = \sqrt{\dfrac{-x^3}{-(x+2)}} = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (fonctions trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}} = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{x-2} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x=0$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{\dfrac{0^3}{0-2}} = 0$.

f) Tableau de signes:

x		0		2	
signe de $f(x)$	+	0	//////		+

g) Asymptotes verticales, pents, trous: Le point à considérer est $x=2$. On a

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}} = " \sqrt{\dfrac{2^3}{2_+ - 2}} " = +\infty$. Ainsi $x=2$ est une asymptote verticale.

h) Comportement asymptotique: D'après g), on a $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$. Comme $D = \mathbb{R} \setminus]0;2]$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ n'existe pas (puisque f n'existe pas si $x<2$).

i) Asymptotes non verticales: On aura une asymptote non verticale $y=mx+h$ si $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ existe et, là où m existe, si $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$ existe.

On a $\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$. Si $x>0$, $\frac{f(x)}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{x-2}}=\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\sqrt{\frac{x}{x(1-\frac{2}{x})}}=\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}$.

Si $x<0$, $\frac{f(x)}{x}=-\sqrt{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{x-2}}=-\sqrt{\frac{x}{x-2}}=-\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}=\sqrt{\frac{1}{1-0}}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}\right)=$

$=-\sqrt{\frac{1}{1-0}}=-1$. On a donc 2 valeurs possibles pour m:

1) $m=1$ si $x\to+\infty$ et 2) $m=-1$ si $x\to-\infty$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x-2}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}-x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^3}-x\sqrt{x-2})(\sqrt{x^3}+x\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x^3}+x\sqrt{x-2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2(x-2)}{\sqrt{(x-2)x^3}+x(x-2)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2}{\sqrt{x^4-2x^3}+x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1-\frac{2}{x})}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1-\frac{2}{x}}=\frac{2}{1+1}=1.$

Ainsi, avec $x\to+\infty$, on a $m=1$ et $h=1$ et l'asymptote oblique est $y=x+1$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{-x^3}{-x+2}}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{-x^3}}{\sqrt{-x+2}}+x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{-x^3}+x\sqrt{-x+2}}{\sqrt{-x+2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{-x^3}+x\sqrt{-x+2})(\sqrt{-x^3}-x\sqrt{-x+2})}{\sqrt{-x+2}(\sqrt{-x^3}-x\sqrt{-x+2})}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3-x^2(-x+2)}{\sqrt{-x+2}(\sqrt{-x^3}-x\sqrt{-x+2})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3+x^3-2x^2}{\sqrt{(-x+2)(-x^3)}-x(-x+2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{\sqrt{x^4-2x^3}+x^2-2x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{x^2\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x^2-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{x^2(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1-\frac{2}{x})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1-\frac{2}{x}}=\frac{-2}{1+1}=-1.$

Ainsi, avec $x\to-\infty$, on a $m=-1$ et $h=-1$ et l'asymptote oblique est $y=-x-1$.

j) Comportement asymptotique: On doit étudier le signe de $f(x)-(mx+h)$ lorsque $x\to\pm\infty$ avec $y=mx+h$ une des asymptotes obliques.

Si $x\to+\infty$, l'asymptote est $y=x+1$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+h))=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x-2}}-(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}-(x+1)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^3}-(x+1)\sqrt{x-2})(\sqrt{x^3}+(x+1)\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x^3}+(x+1)\sqrt{x-2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-(x+1)^2(x-2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x^3}+(x+1)\sqrt{x-2})}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-(x^2+2x+1)(x-2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x^3}+(x+1)\sqrt{x-2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-(x^3-2x^2+2x^2-4x+x-2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x^3}+(x+1)\sqrt{x-2})}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+3x+2}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x^3}+(x+1)\sqrt{x-2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x^3}+(x+1)\sqrt{x-2})}=0_+$, puisque $y=x+1$

est une asymptote oblique et que $\dfrac{3x+2}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x^3}+(x+1)\sqrt{x-2}\right)} > 0$ si $x \to +\infty$.

Ainsi f s'approche de $y=x+1$ par au-dessus lorsque $x \to +\infty$.

Si $x \to -\infty$, l'asymptote est $y=-x-1$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(mx+h)\right)=$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-(-x-1)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{-x^3}{-x+2}}+x+1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{-x^3}}{\sqrt{-x+2}}+x+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x^3}+(x+1)\sqrt{-x+2}}{\sqrt{-x+2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{-x^3}+(x+1)\sqrt{-x+2}\right)\left(\sqrt{-x^3}-(x+1)\sqrt{-x+2}\right)}{\sqrt{-x+2}\left(\sqrt{-x^3}-(x+1)\sqrt{-x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3-(x+1)^2(-x+2)}{\sqrt{-x+2}\left(\sqrt{-x^3}-(x+1)\sqrt{-x+2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3-(x^2+2x+1)(-x+2)}{\sqrt{-x+2}\left(\sqrt{-x^3}-(x+1)\sqrt{-x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3-(-x^3+2x^2-2x^2+4x-x+2)}{\sqrt{-x+2}\left(\sqrt{-x^3}-(x+1)\sqrt{-x+2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+x^3-3x-2}{\sqrt{-x+2}\left(\sqrt{-x^3}-(x+1)\sqrt{-x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-2}{\sqrt{-x-2}\left(\sqrt{-x^3}-(x+1)\sqrt{-x+2}\right)} = 0_+,$$ puisque $y=-x-1$ est une asymptote oblique et que $\dfrac{-3x-2}{\sqrt{-x-2}\left(\sqrt{-x^3}-(x+1)\sqrt{-x+2}\right)} > 0$ si $x \to -\infty$ (toutes les racines sont positives, $-3x-2>0$ et $-(x+1)>0$).

Ainsi f s'approche de $y=-x-1$ par au-dessus lorsque $x \to -\infty$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> On doit chercher s'il existe des x tels que $f(x)=x+1$ ou $f(x)=-x-1$.

$f(x)=x+1 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=x+1 \Rightarrow \dfrac{x^3}{x-2}=(x+1)^2 \Rightarrow x^3=(x-2)(x+1)^2$

$\Rightarrow x^3=(x-2)(x^2+2x+1) \Rightarrow x^3=x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2$

$\Rightarrow x^3=x^3-3x-2 \Rightarrow -3x-2=0 \Rightarrow 3x=-2 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.

Avec $x=-\dfrac{2}{3}$, on a $f(x)=\sqrt{\dfrac{(-2/3)^3}{-\frac{2}{3}-2}}=\sqrt{\dfrac{-8/27}{-8/3}}=\sqrt{\dfrac{8/27}{8/3}}=\sqrt{\dfrac{8}{27}:\dfrac{8}{3}}=\sqrt{\dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{3}{8}}=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$.

Ainsi f coupe l'asymptote $y=x+1$ en $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$f(x)=-x-1 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=-x-1 \Rightarrow \dfrac{x^3}{x-2}=(-x-1)^2 \Rightarrow \dfrac{x^3}{x-2}=(x+1)^2 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

Comme ci-dessus.

Or, contrairement à $x=-\frac{2}{3}$ qui jouait dans l'équation $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=x+1$, $x=-\dfrac{2}{3}$ ne joue pas dans $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=-x-1$.

Ainsi f ne coupe pas l'asymptote $y=-x-1$.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=\left(\dfrac{x^3}{x-2}\right)^{1/2}$.

Ainsi $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^3}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\dfrac{3x^2(x-2)-x^3\cdot 1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^3}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{3x^3-6x^2-x^3}{(x-2)^2}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}=\frac{1}{2}\,\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}(2x^3-6x^2)}{x^{\frac{3}{2}}(x-2)^2}=\frac{(x-2)^{1/2}\,2x^2(x-3)}{2x^{\frac{3}{2}}(x-2)^2}=$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}(x-3)}{(x-2)^{3/2}}$$. Son domaine est $D_{f'} = D_f =]-\infty;0] \cup]2;+\infty[$

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^{\frac{1}{2}}(x-3)}{(x-2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}(x-3) = 0$

$\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 0$ ou $x-3=0 \Longrightarrow x=0$ ou $x=3$.

Avec $x=0$, on a $f(x)=0$ (voir e)).

Avec $x=3$, on a $f(x) = \sqrt{\frac{3^3}{3-2}} = \sqrt{\frac{27}{1}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

On a donc 2 points à tangente horizontale: $(0;0)$ et $(3;3\sqrt{3})$.

n) <u>Pente des tangentes aux points critiques de f':</u> Le point critique (bord de D_f) est $x=0$ ($x=2$ est asymptote verticale). D'après m), $x=0$ est un point à tangente horizontale.

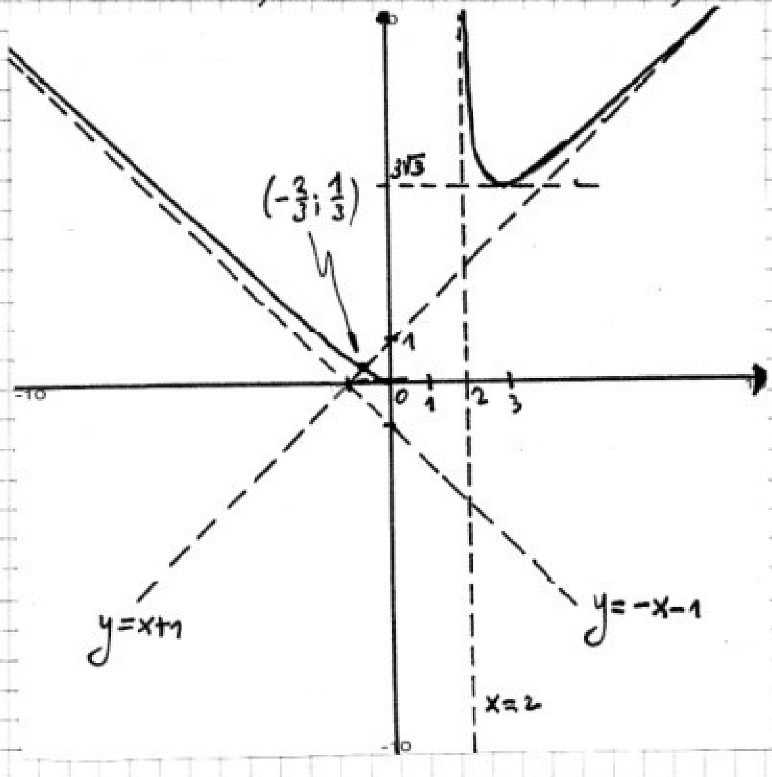
o) <u>Tableau de variations:</u>

x		0		2		3	
Signes de $f'(x)$	$-$	0	//////		$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	min	//////		$\searrow$	min	$\nearrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> La fonction a 2 minimums: $(0;0)$ et $(3;3\sqrt{3})$.

q)r)s) <u>Deuxième dérivée:</u> Vu la complexité de f', on ne cherche pas f''.

t) <u>Graphique:</u>



l. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x} = (x^3-3x)^{1/3}$

a) Domaine de définition: On a clairement $D=\mathbb{R}$ (la racine cubique existe toujours).

b) Parité: $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^3-3(-x)} = \sqrt[3]{-x^3+3x} = -\sqrt[3]{x^3-3x} = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (fonctions trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3-3x}=0 \Rightarrow x^3-3x=0 \Rightarrow x(x^2-3)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Ainsi f a 3 zéros: $x=0$, $x=-\sqrt{3}$ et $x=\sqrt{3}$.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=0$.

f) Tableau de signes:

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
signes de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Comme $D=\mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale. Il n'y a ni sauts, ni trous.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: On aura une asymptote non verticale $y=mx+h$ si $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ existe et, là où m existe, si $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$ existe.

On a $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[3]{x^3-3x}}{x}=\sqrt[3]{\frac{x^3-3x}{x^3}}=\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt[3]{1}=1$.

On a donc $m=1$ lorsque $x\to\pm\infty$.

Ainsi l'asymptote oblique (si h existe) est de la forme $y=x+h$.

Or, comme la fonction est impaire et que m est identique à $+\infty$ et $-\infty$, on aura forcément $h=0$.

L'asymptote oblique est donc $y=x$.

j) Comportement asymptotique: On doit étudier le signe de $f(x)-(mx+h)$ lorsque $x\to\pm\infty$ avec $y=mx+h$ l'asymptote oblique.

Si $x\to+\infty$, on a $f(x)-(mx+h)=f(x)-x=\sqrt[3]{x^3-3x}-x=$
$=x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}-x=x\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}-1\right)<0$, car $\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}<1$.

Si $x\to-\infty$, on a $f(x)-(mx+h)=f(x)-x=x\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}-1\right)>0$ (car $x<0$ et $\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}<1$).

Ainsi f s'approche de $y=x$ par en-dessous à $+\infty$ et par en-dessus à $-\infty$.

k) Intersection avec les asymptotes non verticales: On doit résoudre $f(x)=x$:

$f(x)=x \Rightarrow \sqrt[3]{x^3-3x}=x \Rightarrow x^3-3x=x^3 \Rightarrow -3x=0 \Rightarrow x=0$.

Ainsi l'asymptote $y=x$ coupe f en $(0;0)$.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f'(x)=\frac{1}{3}(x^3-3x)^{1-\frac{1}{3}}(3x^2-3)=\frac{1}{3}(x^3-3x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-3)=$
$=\dfrac{3x^2-3}{3(x^3-3x)^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{x^2-1}{(x^2-3x)^{2/3}}$. Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0;-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$ (divisions par 0).

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x)=0 \Longrightarrow \dfrac{x^2-1}{(x^3-3x)^{2/3}}=0 \Longrightarrow x^2-1=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$.

Avec $x=1$, $f(x)=\sqrt[3]{1^3-3\cdot 1}=\sqrt[3]{1-3}=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$.

Avec $x=-1$, comme f est impaire, on a $f(-1)=-f(1)=\sqrt[3]{2}$.

On a donc 2 points à tangente horizontale: $(1;-\sqrt[3]{2})$ et $(-1;\sqrt[3]{2})$.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Les points critiques de f' sont $x=-\sqrt{3}$ et $x=\sqrt{3}$.

On a $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f'(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-1}{(x^3-3x)^{2/3}}=\dfrac{3-1}{0+}=+\infty$.

Puisque f est impaire, on a aussi $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f'(x)=+\infty$. En outre $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=-\infty$.

Ainsi les pentes des tangentes aux points $x=\pm\sqrt{3}$ sont $+\infty$.

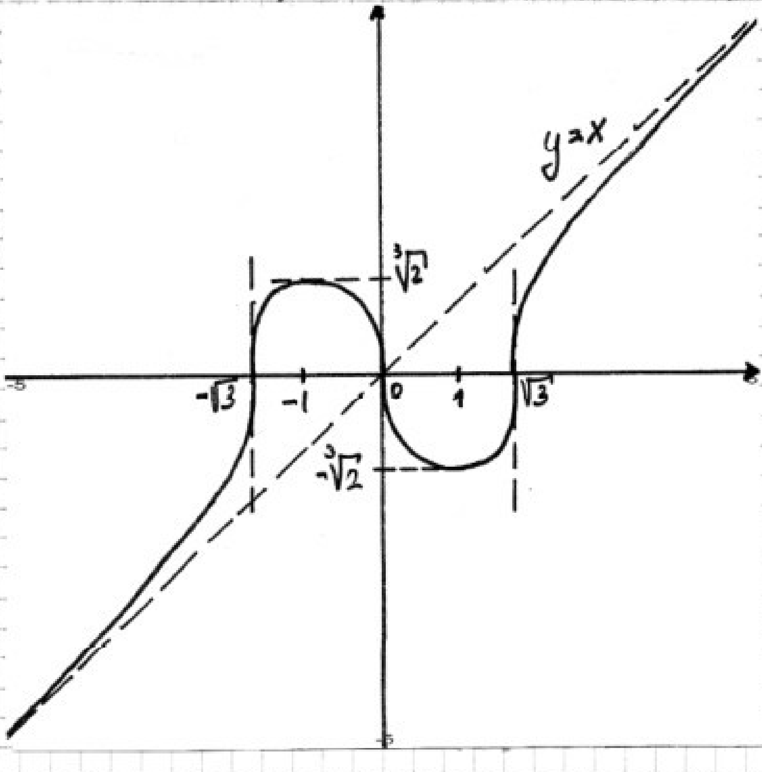
o) <u>Tableau de variations:</u>

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
Signes de $f'(x)$	$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$
Croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> $(-1;\sqrt[3]{2})$ est un maximum (local) et $(1;-\sqrt[3]{2})$ est un minimum (local).

q)r)s) <u>Deuxième dérivée:</u> Vu la complexité de f', on ne cherche pas f''.

t) <u>Graphique:</u>



Exercice 6.51

De manière générale, le domaine de définition de la fonction $y = \arcsin(x)$ est $[-1;1]$ et l'ensemble de ses images est $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. En outre, cette fonction est croissante sur $[-1;1]$.

a. $y = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}\right)$: on doit avoir $-1 \leq \sqrt{\frac{1}{2}+x^2} \leq 1$; comme $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} > 0$, on doit donc avoir $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} \leq 1$, d'où $\frac{1}{2}+x^2 \leq 1$ ($\frac{1}{2}+x^2$ est supérieur à zéro) $\Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\sqrt{\frac{1}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ le domaine de définition est $[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}]$; sur l'intervalle $[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}]$, la valeur minimale de $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}$ est en $x=0$ et la valeur maximale est en $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; en $x=0$, on a $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; en $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$; ainsi $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} \in [\frac{\sqrt{2}}{2};1]$; comme arcsin est croissante sur $[-1;1]$, et donc aussi sur $[\frac{\sqrt{2}}{2};1]$, la valeur minimale de $y = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}\right)$ est en $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et la valeur maximale est en $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} = 1$; avec $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $y = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$; avec $\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} = 1$, on a $y = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$; ainsi l'ensemble des images est $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$.

b. $y = \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$: on doit avoir $-1 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1$; si $x+1>0$, on obtient $-(x+1) \leq x-1 \leq x+1 \Rightarrow -x-1 \leq x-1 \leq x+1 \Rightarrow -1 \leq 2x-1 \leq 2x+1$ $\Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2x+2 \Rightarrow 0 \leq x \leq x+1$; ainsi si $x \geq 0$, on a $-1 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1$; si $x+1<0$, on obtient $-(x+1) \geq x-1 \geq x+1$ $\Rightarrow -x-1 \geq x-1 \geq x+1 \Rightarrow -1 \geq 2x-1 \geq 2x+1 \Rightarrow 0 \geq 2x \geq 2x+2$ $\Rightarrow 0 \geq x \geq x+1$, ce qui est impossible ($x < x+1$ pour tout x) ; ainsi le domaine de définition est $[0;+\infty[$ ($x \geq 0$) ; cherchons la valeur minimale et la valeur maximale de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ sur $[0;+\infty[$; on a $f'(x) = \frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$; $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow 2=0$ impossible $\Rightarrow f$ n'a pas de points à tangentes horizontales ; comme $f'(x)>0$ si $x \geq 0$, on en déduit que f est croissante ; ainsi la valeur minimale de $\frac{x-1}{x+1}$ est en $x=0$ et la valeur maximale est lorsque $x \to +\infty$; en $x=0$, on a $\frac{x-1}{x+1} = \frac{-1}{1} = -1$; en outre, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = $ $= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$; comme arccos est décroissante sur $[-1;1]$

(contrairement à arcsin qui est croissante), la valeur minimale de $y = \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ sera lorsque $x \to +\infty$ (alors $\frac{x-1}{x+1} \to 1$) et la valeur maximale sera en $x = 0$ (alors $\frac{x-1}{x+1} = -1$) ; on a $\lim_{x \to +\infty} \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \arccos\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1}\right) = \arccos(1) = 0$ et, en $x = 0$, $\arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \arccos(-1) = \pi$; l'ensemble des images est donc $]0 ; \pi]$ (l'intervalle est ouvert en 0 car il s'agit d'une limite).

Exercice 6.52.

a. $f(x) = \arcsin(1 - \sqrt[3]{x^2})$.

a) Domaine de définition: le domaine de définition de arcsin est $[-1;1]$; on doit donc avoir $-1 \leq 1 - \sqrt[3]{x^2} \leq 1 \Rightarrow -1 + \sqrt[3]{x^2} \leq 1 \leq 1 + \sqrt[3]{x^2}$;
$-1 + \sqrt[3]{x^2} \leq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 8 \Rightarrow -\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$;
$1 \leq 1 + \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$;
ainsi le domaine de définition est $[-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$.

b) Parité: $f(-x) = \arcsin(1 - \sqrt[3]{(-x)^2}) = \arcsin(1 - \sqrt[3]{x^2}) = f(x) \Rightarrow f$ est paire.

c) Périodicité: comme le domaine de définition est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, f ne peut pas être périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \arcsin(1 - \sqrt[3]{x^2}) = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt[3]{x^2} = \sin(0) \Rightarrow 1 - \sqrt[3]{x^2} = 0$
$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ et $x = 1$.

e) Intersection avec l'axe Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

f) Tableau de signes:

x		$-\sqrt{8}$		-1		1		$\sqrt{8}$	
signe de $f(x)$			$-$	0		0	$-$		

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Comme l'ensemble de définition est $[-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$, on va voir ce qu'il se passe en $x = \pm\sqrt{8}$; on a $f(\pm\sqrt{8}) =$
$= \arcsin(1 - \sqrt[3]{(\pm\sqrt{8})^2}) = \arcsin(1 - \sqrt[3]{8}) = \arcsin(1-2) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
Ainsi f n'a pas d'asymptote verticale, ni d'ailleurs de saut ou de trou.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: Comme le domaine de définition est $[-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$, on ne va pas jusqu'à $\pm\infty$ et, donc, il ne peut pas y avoir d'asymptotes non verticales.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: Comme la dérivée de $\arcsin(x)$ est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on a
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2}}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2}}\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = \frac{-2}{3x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2}}.$$
Son domaine est $]-\sqrt{8}; 0[\cup]0; \sqrt{8}[$

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2}{3x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2}} = 0 \Rightarrow -2 = 0$
impossible $\Rightarrow$ il n'y a pas de points à tangente horizontale.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Les points critiques sont $x = -\sqrt{8}$, $x = 0$ et $x = \sqrt{8}$ (bords du domaine de définition de f').

On a $\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{8}} \sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2} = \sqrt{1-(1-\sqrt[3]{(\pm\sqrt{8})^2})^2} = \sqrt{1-(1-\sqrt[3]{8})^2} =$

$= \sqrt{1-(1-2)^2} = \sqrt{1-(-1)^2} = \sqrt{1-1} = 0$ (en fait 0_+ puisque $\sqrt{\dots} \geq 0$).

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\sqrt{8}} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\sqrt{8}} \dfrac{-2}{3x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2}} \text{ "}=\text{" } \dfrac{-2}{3(-\sqrt{8})^{\frac{1}{3}}\ 0_+} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to\sqrt{8}} f'(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{8}} \dfrac{-2}{3x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2}} = \text{"} \dfrac{-2}{3(\sqrt{8})^{\frac{1}{3}}\ 0_+} \text{"} = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{-2}{3x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2}} = \text{"} \dfrac{-2}{3\,0_+\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{0^2})^2}} \text{"} = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{-2}{3x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{x^2})^2}} = \text{"} \dfrac{-2}{3\,0_-\sqrt{1-(1-\sqrt[3]{0^2})^2}} \text{"} = +\infty$.

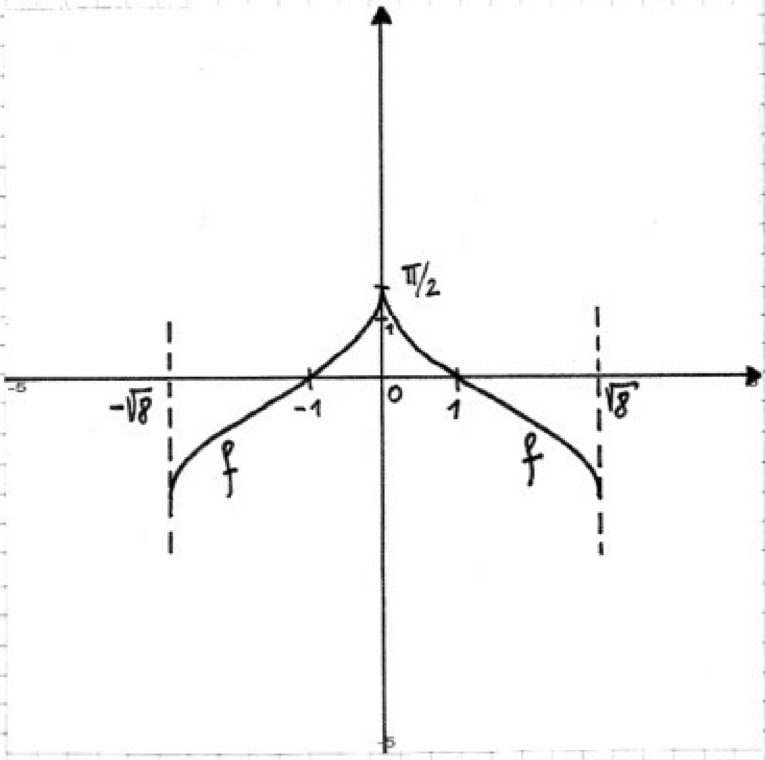
Les pentes aux points critiques de f' sont : $f'(-\sqrt{8}) = +\infty$, $f'(\sqrt{8}) = -\infty$, $f'(0_+) = -\infty$ et $f'(0_-) = +\infty$.

o) Tableau de variations:

x		$-\sqrt{8}$		0		$\sqrt{8}$	
Signes de $f'(x)$		$+\infty$		$+\infty / -\infty$		$-\infty$	
Croissance ou décroissance de $f(x)$		$\uparrow$	$+$	$\uparrow\downarrow$	$-$	$\downarrow$	

p) Nature des points à tangente horizontale: Il n'y a pas de points à tangente horizontale.

q) Graphique:



b. $f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

a) Domaine de définition: le domaine de définition de arctan est $\mathbb{R}$; il faut donc que $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -1$, pour pouvoir calculer f; le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Parité: $f(-x) = \arctan\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: arctan n'étant pas une fonction périodique, f ne l'est pas non plus.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \tan(0) \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$.

e) Intersection avec l'axe Oy: $x=0 \Rightarrow f(x) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

f) Tableau de signes:

x		-1		1	
signes de $f(x)$	$+$	//////	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Il faut étudier ce qu'il se passe en $x=-1$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \arctan\left(\frac{-1-1}{-1_- +1}\right) = \arctan\left(\frac{-2}{0_-}\right) =$

$= \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \arctan\left(\frac{-1-1}{-1_+ +1}\right) =$

$= \arctan\left(\frac{-2}{0_+}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

Ainsi f a un saut en $x=-1$ et on a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) =$

$= \arctan\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x+1}\right) = \arctan\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}\right) = \arctan\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) =$

$= \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $y = \frac{\pi}{4}$ est une asymptote horizontale (pour $x \to +\infty$ et pour $x \to -\infty$).

j) Comportement asymptotique: D'après i), on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \arctan\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \arctan\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \arctan\left(\frac{1_-}{1_+}\right) = \arctan(1_-) = \frac{\pi}{4}_-$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \arctan\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \arctan\left(\frac{1_+}{1_-}\right) = \arctan(1_+) = \frac{\pi}{4}_+$.

Par conséquent f s'approche de $y = \frac{\pi}{4}$ par en-dessous à $+\infty$ et par en-dessus à $-\infty$.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: On doit résoudre $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

$f(x) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 1 \Rightarrow x-1 = x+1 \Rightarrow -1 = 1$ impossible $\Rightarrow f$ ne coupe pas son asymptote horizontale.

l) Première dérivée: La dérivée de $\arctan(x)$ est $\frac{1}{1+x^2}$.

Ainsi $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2+(x-1)^2} = \frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} =$

$= \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$. Son domaine est $\mathbb{R}$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1}=0 \Rightarrow 1=0$ impossible $\Rightarrow$ il n'y a pas de points à tangente horizontale.

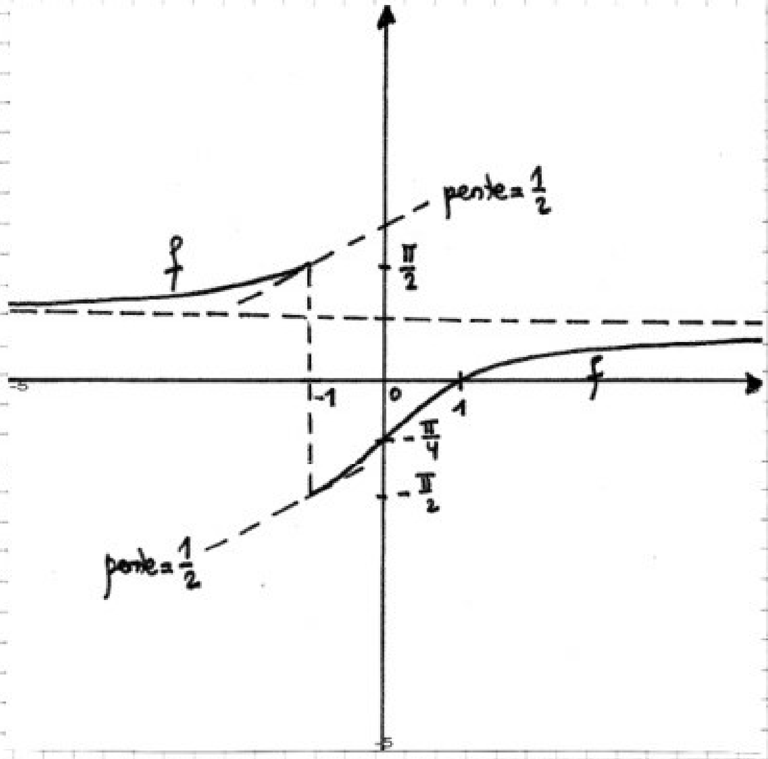
n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> f a un saut en $x=-1$.
On a $f'(-1)=\frac{1}{(-1)^2+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$. Ainsi la pente de f lorsque $x \underset{<}{\to} -1$ est $\frac{1}{2}$ et la pente de f lorsque $x \underset{>}{\to} -1$ est aussi $\frac{1}{2}$.

o) <u>Tableau de variation:</u>

x		-1	
signes de $f'(x)$		$\frac{1}{2}>0$	
croissante ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	saut	$\nearrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> Il n'y a pas de point à tangente horizontale.
Comme $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ (voir g), on peut dire que $(-1_-; \frac{\pi}{2})$ est un maximum (local) de f et que $(-1_+; -\frac{\pi}{2})$ est un minimum (local) de f.

q) <u>Graphique:</u>



c. $f(x) = -3+\sqrt{-x^2+8x+9}$.

a) Domaine de définition: On doit avoir $-x^2+8x+9 \geq 0$

$-x^2+8x+9=0 \Rightarrow x^2-8x-9=0 \Rightarrow (x+1)(x-9)=0 \Rightarrow x=-1$ et $x=9$.

Comme $-x^2+8x+9$ est une parabole tournée vers le bas ($\frown$), on a $-x^2+8x+9 \geqslant 0$ si $x\in[-1;9]$. Ainsi le domaine de définition de f est $[-1;9]$.

b) Parité: Comme le domaine de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0, f n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow -3+\sqrt{-x^2+8x+9}=0 \Rightarrow \sqrt{-x^2+8x+9}=3 \Rightarrow -x^2+8x+9=9$

$\Rightarrow -x^2+8x=0 \Rightarrow -x(x-8)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=8$ (vérification: $x=0$

$\Rightarrow f(x)=-3+\sqrt{-0^2+8\cdot0+9}=-3+\sqrt{9}=-3+3=0$ OK; $x=8 \Rightarrow f(x)=-3+\sqrt{-8^2+8\cdot8+9}=$

$=-3+\sqrt{-64+64+9}=-3+\sqrt{9}=-3+3=0$ OK).

e) Intersection avec l'axe Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=-3+\sqrt{-0^2+8.0+9}=-3+\sqrt{9}=-3+3=0$

f) Tableau de signes:

x		-1		0		8		9	
Signes de $f(x)$	//////		$-$	0	$+$	0	$-$		//////

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Comme le domaine de définition de f est un intervalle fermé, f n'a ni asymptote verticale, ni saut, ni trou.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: Comme le domaine de définition de f est $[1;9]$, on ne va pas jusqu'à $\pm\infty$ et, donc, il n'y a pas d'asymptotes non verticales.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: On a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+8x+9}}(-2x+8)=\dfrac{-x+4}{\sqrt{-x^2+8x+9}}$.

Son domaine de définition est $]-1;9[$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-x+4}{\sqrt{-x^2+8x+9}}=0 \Rightarrow -x+4=0 \Rightarrow x=4$.

Avec $x=4$, on a $f(x)=-3+\sqrt{-4^2+8\cdot4+9}=-3+\sqrt{-16+32+9}=-3+\sqrt{25}=-3+5=2$.

Ainsi $(4;2)$ est l'unique point à tangente horizontale de f.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Les points critiques de f' sont $x=-1$ et $x=9$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}}\dfrac{-x+4}{\sqrt{-x^2+8x+9}}=\text{"}\dfrac{1+4}{0+}\text{"}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to9 \\ <}} f'(x)=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{-x+4}{\sqrt{-x^2+8x+9}}=$

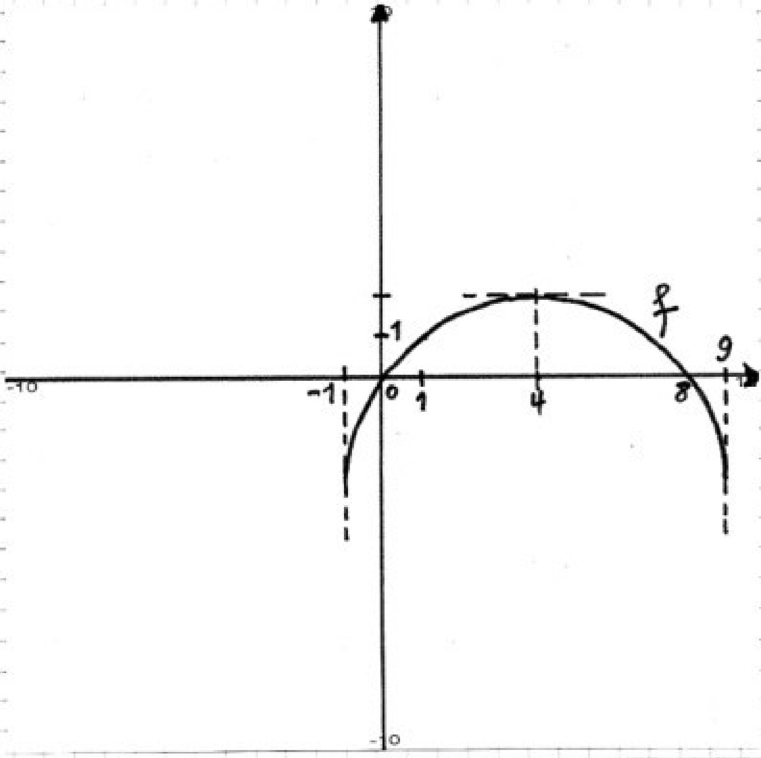
$= "\dfrac{-9+4}{0+}" = -\infty.$

o) <u>Tableau de variations:</u>

x		-1		4		9	
Signes de $f'(x)$		$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	
Croissance ou décroissance de $f(x)$		$\uparrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\downarrow$	

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> D'après le tableau de variation, on a que $(4;2)$ est un maximum.

q) <u>Graphique:</u>



d. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}$.

a) <u>Domaine de définition:</u> On doit avoir $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire, $x \neq -1$, et $x^2-4x+3 \geqslant 0$.
$x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1$ et $x=3$; comme x^2-4x+3 est une parabole tournée vers le haut ($\smile$), on a $x^2-4x+3 \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty;1\right] \cup \left[3;+\infty\right[$.
Ainsi le domaine de définition de f est $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;1\right] \cup \left[3;+\infty\right[$.

b) <u>Parité:</u> Comme le domaine de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0, f n'est ni paire, ni impaire.

c) <u>Périodicité:</u> Comme f ne contient pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), elle n'est pas périodique.

d) <u>Zéros:</u> $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4x+3}=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1$ et

$x=3$ (voir a)).

e) <u>Intersection avec Oy:</u> $x=0 \Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{0^2-4.0+3}}{0+1}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x		-1		1		3	
signes de $f(x)$	$-$	////	$+$	0	////	0	$+$

g) <u>Asymptotes verticales, sauts, trous:</u> $x=-1$ correspond à une asymptote verticale. Autrement, f n'a ni saut, ni trou.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> On a $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}=\frac{\sqrt{(-1)^2-4.(-1)+3}}{-1_-+1}=$

$=\frac{\sqrt{8}}{0_-}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}=\frac{\sqrt{(-1)^2-4(-1)+3}}{-1_++1}=\frac{\sqrt{8}}{0_+}=+\infty$.

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}}{x(1+\frac{1}{x})}\overset{x>0}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{1-0+0}}{1+0}=\frac{1}{1}=1$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}}{x(1+\frac{1}{x})}\overset{x<0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{-\sqrt{1-0+0}}{1+0}=\frac{-1}{1}=-1$.

Ainsi $y=1$ est asymptote horizontale lorsque $x\to+\infty$ et $y=-1$ est asymptote horizontale lorsque $x\to-\infty$.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après i), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$. Comme $\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\to 1$ lorsque $x\to\pm\infty$,

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{1+0_+}=1_-$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-1}{1+0_+}=-1_-$.

Ainsi f s'approche de $y=1$ par en-dessous à $+\infty$ et f s'approche de $y=-1$ par en-dessous à $-\infty$.

k) <u>Intersection avec les asymptotes non verticales:</u> On doit voir s'il existe x tel que $f(x)=\pm 1$:

$f(x)=\pm1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}=\pm1 \Rightarrow \sqrt{x^2-4x+3}=\pm(x+1)\Rightarrow x^2-4x+3=(x+1)^2$

$\Rightarrow x^2-4x+3=x^2+2x+1 \Rightarrow -4x+3=2x+1 \Rightarrow -6x=-2 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

(vérification: avec $x=\frac{1}{3}$, $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{(\frac{1}{3})^2-4.\frac{1}{3}+3}=\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{4}{3}+3}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$,

$x+1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$ et $\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}=\frac{4/3}{4/3}=1$.

Ainsi f coupe $y=1$ en $x=\frac{1}{3}$, mais ne coupe pas $y=-1$.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=\sqrt{x^2-4x+3}$ et $v=x+1$.

Ainsi $u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4x+3}}(2x-4) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$, $v' = 1$ et

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1}{(x+1)^2}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}(x+1) - \sqrt{x^2-4x+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x-2)(x+1) - (x^2-4x+3)}{\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{x^2 - x - 2 - x^2 + 4x - 3}{(x+1)^2\sqrt{x^2-4x+3}} =$$

$$= \frac{3x-5}{(x+1)^2\sqrt{x^2-4x+3}}.$$ Son domaine est $]-\infty;-1[\, \cup\,]-1;1[\, \cup\,]3;+\infty[$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{3x-5}{(x+1)^2\sqrt{x^2-4x+3}} = 0 \Rightarrow 3x-5 = 0$
$\Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$. Or $\dfrac{5}{3} \notin$ domaine de définition de f.
Ainsi f n'a pas de point à tangente horizontale.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Comme $x=-1$ est une asymptote verticale, les points critiques de f' sont $x=1$ et $x=3$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{3x-5}{(x+1)^2\sqrt{x^2-4x+3}} = \dfrac{3-5}{2^2 \cdot 0_+} = \dfrac{-2}{0_+} = -\infty$ et

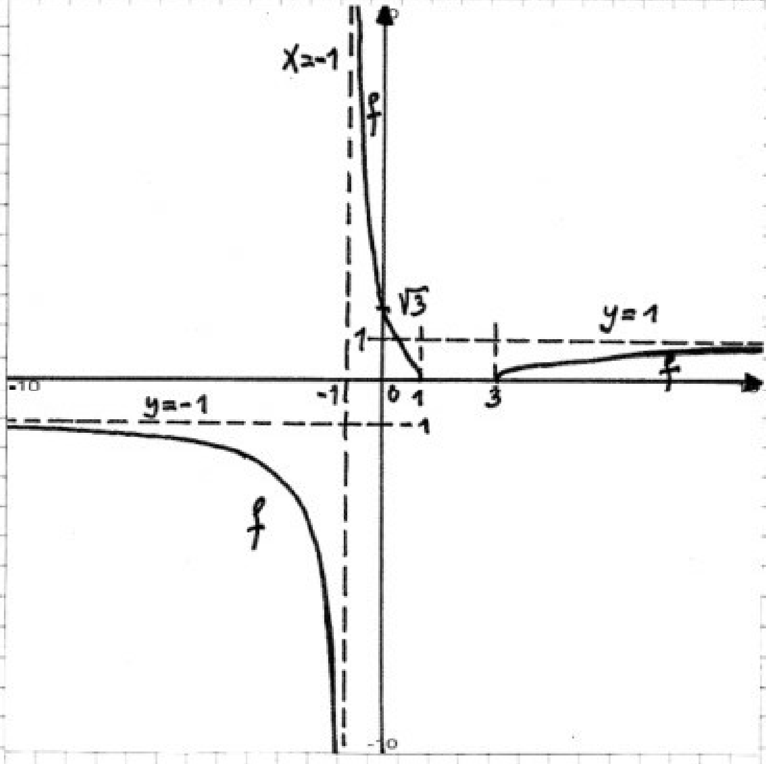
$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{3x-5}{(x+1)^2\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{9-5}{4^2 \cdot 0_+} = \frac{4}{0_+} = +\infty.$$

o) <u>Tableau de variation:</u>

x		-1		1		3	
signes de $f'(x)$	$-$		$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\nearrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> Il n'y a pas de points à tangente horizontale. Comme $f(1) = f(3) = 0$, on peut dire que $x=1$ et $x=3$ sont des minimums (locaux).

q) <u>Graphique:</u>



e. $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}-x$.

a) Domaine de définition: On doit avoir $x^2-2x-3 \geqslant 0$.
$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x+1)(x-3)=0 \Rightarrow x=-1$ et $x=3$; comme x^2-2x-3 est une parabole tournée vers le haut, on a $x^2-2x-3 \geqslant 0$ si $x \in]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[$.
Ainsi le domaine de définition de f est $]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[= \mathbb{R} \setminus]-1;3[$.

b) Parité: Comme le domaine de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0, f n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), elle n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3}-x=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3}=x \Rightarrow x^2-2x-3=x^2$
$\Rightarrow -2x-3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ (vérification: avec $x=-\frac{3}{2}$,
$\sqrt{x^2-2x-3}-x=\sqrt{(-\frac{3}{2})^2-2(-\frac{3}{2})-3}-(-\frac{3}{2})=\sqrt{\frac{9}{4}+3-3}+\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}=$
$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3 \neq 0 \Rightarrow$ not OK). Ainsi f n'a pas de zéros.

e) Intersection avec Oy: Comme $x=0 \notin$ au domaine de définition de f, f ne coupe pas Oy.

f) Tableau de signes:

x		-1		3	
signes de $f(x)$	$+$		//////		$-$

g) Asymptotes verticales, points, trous: Comme on ne divise pas par 0, f n'a pas d'asymptote verticale. f n'a pas non plus de sauts ou de trous.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> /

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> Une asymptote non verticale est de la forme $y=mx+h$ où $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}-1\right)\overset{x>0}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-2x-3}{x^2}}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1}}-1\right)=\sqrt{\frac{1}{1}}-1=1-1=0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}-1\right)\overset{x<0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2-2x-3}{x}}-1\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1}}-1\right)=-\sqrt{\frac{1}{1}}-1=-1-1=-2.$

Ainsi, si $x\to+\infty$, $m=0$ et, si $x\to-\infty$, $m=-2$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}-x-0x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x-3}-x)(\sqrt{x^2-2x-3}+x)}{\sqrt{x^2-2x-3}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-3-x^2}{\sqrt{x^2-2x-3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(-2-\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}+x}\overset{x>0}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(-2-\frac{3}{x})}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{-2}{1+1}=-1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}-x+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}+x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x-3}+x)(\sqrt{x^2-2x-3}-x)}{\sqrt{x^2-2x-3}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-3-x^2}{\sqrt{x^2-2x-3}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(-2-\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}-x}\overset{x<0}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(-2-\frac{3}{x})}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-1}=\frac{-2}{-1-1}=1$;

Par conséquent, si $x\to+\infty$, on a une asymptote horizontale $y=-1$; si $x\to-\infty$, on a une asymptote oblique $y=-2x+1$.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> On doit étudier le signe de $f(x)-(mx+h)$ lorsque $x\to\pm\infty$:

$x\to+\infty$: $f(x)-(mx+h)=\sqrt{x^2-2x-3}-x-(-1)=\sqrt{x^2-2x-3}-x+1\overset{i)}{=}$

$=\frac{-2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}+1\to\frac{-2_{-}}{1_{-}+1}+1=\frac{-2_{-}}{2_{-}}+1=-1_{-}+1=0_{-}$;

ainsi f s'approche de $y=-1$ par en-dessous à $+\infty$;

$x\to-\infty$; $f(x)-(mx+h)=\sqrt{x^2-2x-3}-x-(-2x+1)=\sqrt{x^2-2x-3}-x+2x-1=$

$= \sqrt{x^2-2x-3}+x-1 \overset{i)}{=} \dfrac{-2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-1}-1 \to \dfrac{-2_-}{-1_- -1}-1 =$

$= \dfrac{-2_-}{-2_-}-1 = 1_- -1 = 0_-$; ainsi f s'approche de $y=-2x+1$ par en-dessous à $-\infty$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u>

Avec $y=-1$: $f(x)=-1 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3}-x=-1 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3}=x-1$

$\Rightarrow x^2-2x-3=(x-1)^2 \Rightarrow x^2-2x-3=x^2-2x+1$

$\Rightarrow -3=1$ impossible $\Rightarrow$ pas d'intersection.

Avec $y=-2x+1$: $f(x)=-2x+1 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3}-x=-2x+1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3}=-x+1 \Rightarrow x^2-2x-3=(-x+1)^2$

$\Rightarrow x^2-2x-3=x^2-2x+1 \Rightarrow -3=1$ impossible $\Rightarrow$ pas d'intersection.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x-3}}(2x-2)-1 =$

$= \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}-1 = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}-1$. Son domaine de définition est

$]-\infty;-1[\ \cup\ ]3;+\infty[= \mathbb{R}\setminus[-1;3]$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}-1=0$

$\Rightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}=1 \Rightarrow x-1=\sqrt{x^2-2x-3} \Rightarrow (x-1)^2=x^2-2x-3$

$\Rightarrow x^2-2x+1=x^2-2x-3 \Rightarrow 1=-3$ impossible $\Rightarrow$ pas de points à tangente horizontale.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Les points critiques de f' sont $x=-1$ et $x=3$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}-1\right) = \dfrac{-1-1}{0_+}-1=-\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}-1\right) = \dfrac{3-1}{0_+}-1=+\infty$.

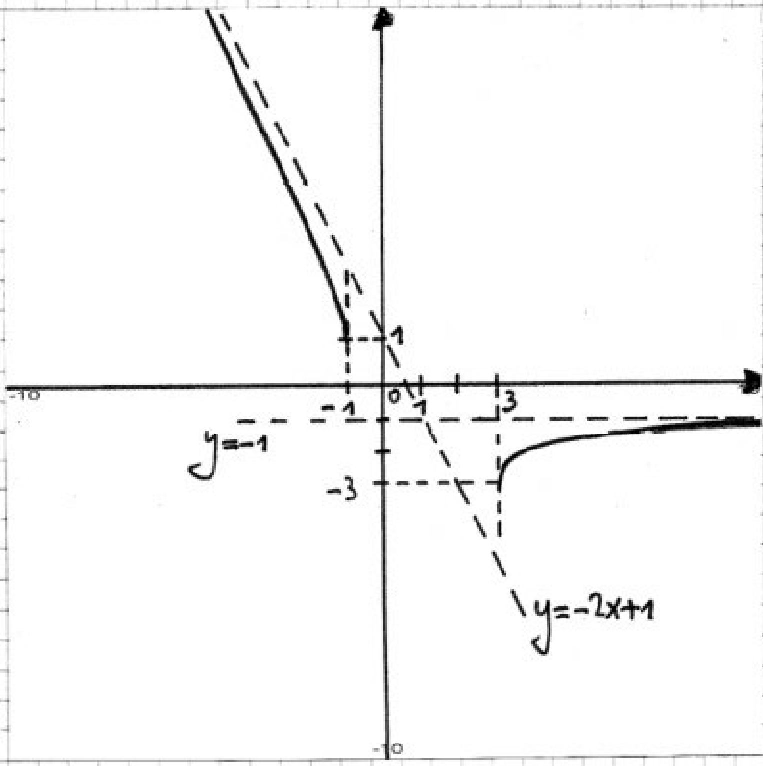
o) <u>Tableau de variations:</u>

x		-1		3	
signes de $f'(x)$	$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↘	↓		↑	↗

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> f n'a pas de points à tangente horizontale. Vu le tableau de variations, f atteint un minimum (local) en

$x=-1$ (où $f(x)=\sqrt{(-1)^2-2(-1)-3}-(-1)=\sqrt{1+2-3}+1=1$) et
un autre minimum en $x=3$ (où $f(x)=\sqrt{3^2-2\cdot3-3}-3=$
$=\sqrt{9-6-3}-3=-3$).

9) Graphique:



Exercice 6.53.

a. $f(x) = 3\sin(x) + 4\cos(x)$, $x \in [0; 2\pi]$

a) Domaine de définition: $D = \mathbb{R}$ (ici $D = [0; 2\pi]$).

b) Parité: $f(-x) = 3\sin(-x) + 4\cos(-x) = -3\sin(x) + 4\cos(x) \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: La période de $\sin(x)$ est 2π ($=360°$). Celle de $\cos(x)$ est aussi 2π. Ainsi f est périodique de période 2π. C'est pourquoi on étudie f sur $[0; 2\pi]$.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow 3\sin(x) + 4\cos(x) = 0 \Rightarrow 3\sin(x) = -4\cos(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{4}{3}$
$\Rightarrow \tan(x) = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) + k\pi \Rightarrow x \cong 2,214$ et $x \cong 5,356$ ($x \in [0; 2\pi]$).

e) Intersection avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = 3\sin(0) + 4\cos(0) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$.

f) Tableau de signes:

x	0		2,214		5,356		2π
signes de $f(x)$		+	0	−	0	+	

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: Comme il n'y a pas d'ex clu, il n'y a pas d'asymptote verticale. Il n'y a pas non plus de saut ou de trou.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: Comme f est périodique, elle ne peut pas avoir d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersection avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: On a $f'(x) = 3\cos(x) - 4\sin(x)$. Son domaine est $\mathbb{R}$ (ici $[0; 2\pi]$).

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3\cos(x) - 4\sin(x) = 0 \Rightarrow 4\sin(x) = 3\cos(x)$
$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan(x) = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + k\pi \Rightarrow x \cong 0,644$ et $x \cong 3,785$
($x \in [0; 2\pi]$).

En $x \cong 0,644$, on a $f(x) = 5$. En $x \cong 3,785$, on a $f(x) = -5$.

f a donc 2 points à tangente horizontale: $(0,644; 5)$ et $(3,785; -5)$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de la dérivée: f' n'a pas de points critiques.

o) Tableau de variations:

x	0		0,644		3,785		2π
signes de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
croissance ou décroissance de $f(x)$		↗	max	↘	min	↗	

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(0,644; 5)$ est un maximum et $(3,785; -5)$ est un minimum.

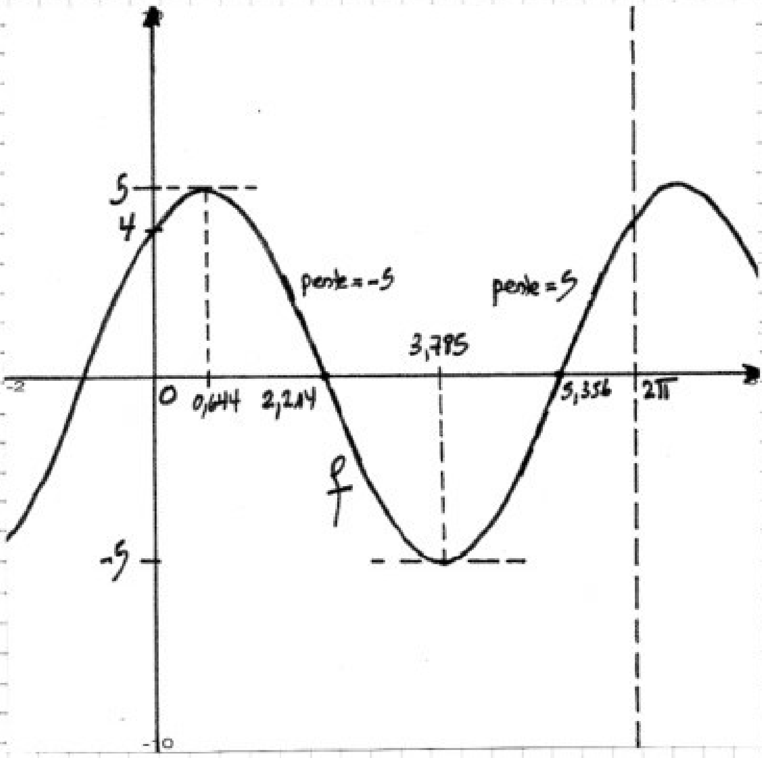
q) Deuxième dérivée: On a $f''(x) = -3\sin(x) - 4\cos(x)$. Son domaine est $\mathbb{R}$ (ici $[0;2\pi]$).

r) Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow -3\sin(x) - 4\cos(x) = 0 \Rightarrow 3\sin(x) = -4\cos(x)$
$\Rightarrow x \cong 2,214$ et $x \cong 5,356$ (voir d)). Ainsi les points d'inflexion sont confondus avec les zéros de f.
En $x \cong 2,214$, on a $f'(x) = -5$. En $x \cong 5,356$, on a $f'(x) = 5$.

s) Tableau de convexité:

x	0		2,214		5,356		2π
signes de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
convexité ou concavité de $f(x)$		⌒ Concave	0	⌣ Convexe	0	⌒ Concave	

t) Graphique:



$g(x) = \frac{1}{\cos(2x)}$, $x \in [0;2\pi]$.

a) Domaine de définition: On doit avoir $\cos(2x) \neq 0$, $x \in [0;2\pi]$. $\cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$ et $x = \frac{7\pi}{4}$. Ainsi le domaine de définition de g est $[0;2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$.

b) Parité: $g(-x) = \frac{1}{\cos(-2x)} = \frac{1}{\cos(2x)} = g(x) \Rightarrow g$ est paire.

c) Périodicité: La période de $\cos(x)$ est $2\pi \Rightarrow$ la période de $\cos(2x)$ est π
$\Rightarrow g$ est périodique de période π. Il suffit donc d'étudier g sur $[0;\pi]$.

d) Zéros: $g(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos(2x)} = 0 \Rightarrow 1 = 0$ exclu $\Rightarrow g$ n'a pas de zéros.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{1}=1.$

f) Tableau de signes:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
signe de $g(x)$		$+$	////	$-$	////	$+$	

g) Asymptotes verticales, points, trous: $x=\frac{\pi}{4}$ et $x=\frac{3\pi}{4}$ sont des asymptotes verticales de g dans l'intervalle $[0;\pi]$. Il n'y a ni points, ni trous.

h) Comportement asymptotiques: On a $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\<}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\<}}\frac{1}{\cos(2x)}=\frac{1}{0+}=+\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\>}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\>}}\frac{1}{\cos(2x)}=\frac{1}{0-}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{4}\\<}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{4}\\<}}\frac{1}{\cos(2x)}=\frac{1}{0-}=-\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{4}\\>}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{4}\\>}}\frac{1}{\cos(2x)}=\frac{1}{0+}=+\infty.$

i) Asymptotes non verticales: Comme g est périodique, elle ne peut pas avoir d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: On a $g(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=1$ et $v=\cos(2x)$. Ainsi $u'=0$ et $v'=-2\sin(2x)$ et $g'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$. Son domaine sur $[0;\pi]$ est $[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$.

m) Points à tangente horizontale: $g'(x)=0 \Rightarrow \frac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}=0 \Rightarrow \sin(2x)=0$
$\Rightarrow 2x=k\cdot\pi \Rightarrow x=k\cdot\frac{\pi}{2}$; ainsi dans l'intervalle $[0;\pi]$, les points à tangente horizontale de g sont en $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=\pi$.

En $x=0$, $g(x)=\frac{1}{\cos(2\cdot 0)}=1$. En $x=\frac{\pi}{2}$, $g(x)=\frac{1}{\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{-1}=-1$. En $x=\pi$, $g(x)=\frac{1}{\cos(2\pi)}=1$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de la dérivée: Mis à part les asymptotes verticales, g' n'a pas de points critiques.

o) Tableau de variations:

x		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π	
signes de $g'(x)$	$-$	0	$+$	////	$+$	0	$-$	////	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $g(x)$	↘	min	↗	////	↗	max	↘	////	↘	min	↗

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(0;1)$ et $(\pi;1)$ sont des minimums et $\left(\frac{\pi}{2};-1\right)$ est un maximum

q) Deuxième dérivée: On a $g'(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=2\sin(2x)$ et $v=\cos^2(2x)$. Ainsi $u'=4\cos(2x)$ et $v'=2\cos(2x)\cdot(-\sin(2x))\cdot 2=-4\cos(2x)\sin(2x)$ et

$$g''(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{4\cos(2x)\cdot\cos^2(2x)+2\sin(2x)\cdot 4\cos(2x)\sin(2x)}{(\cos^2(2x))^2}=\frac{4\cos^3(2x)+8\cos(2x)\sin^2(2x)}{\cos^4(2x)}=$$

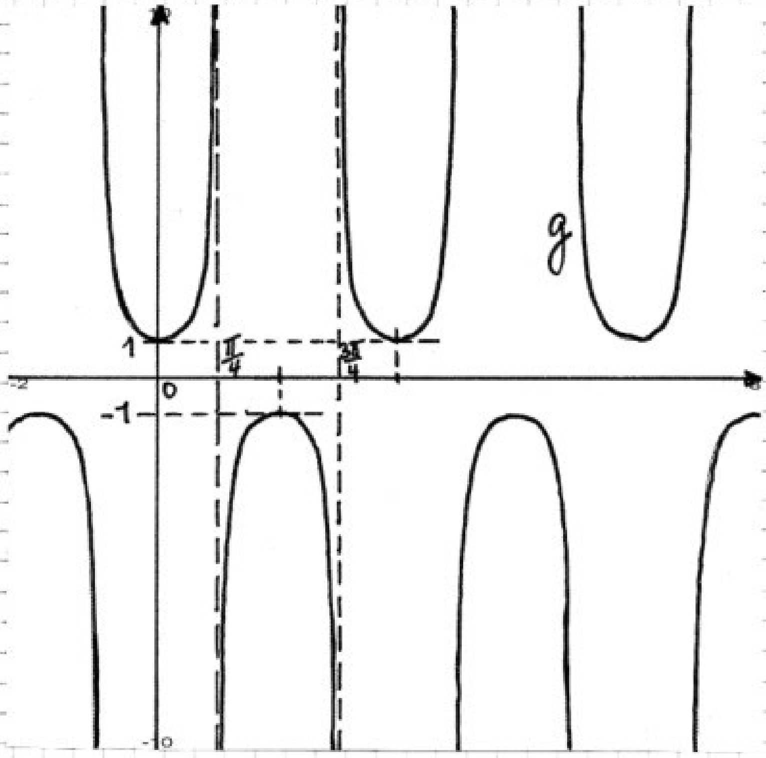
$$= \frac{4\cos^2(2x)+8\sin^2(2x)}{\cos^3(2x)}.$$

r) <u>Points d'inflexion:</u> $g''(x)=0 \Rightarrow \frac{4\cos^2(2x)+8\sin^2(2x)}{\cos^3(2x)}=0 \Rightarrow 4\cos^2(2x)+8\sin^2(2x)=0$, ce qui est impossible car $4\cos^2(2x)+8\sin^2(2x)>0$ pour tout x. Ainsi g n'a pas de point d'inflexion.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
Signe de $g''(x)$		+	//	−	//	+	
Convexité ou concavité de $g(x)$		Convexe	//	Concave	//	Convexe	

t) <u>Graphique:</u>



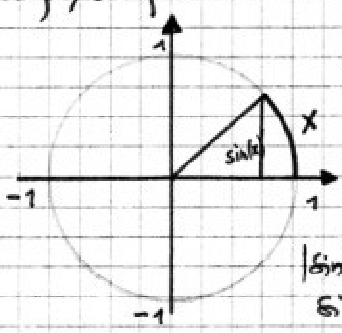
b. $h(x) = x - \sin(x)$.

a) <u>Domaine de définition:</u> $\mathbb{R}$.

b) <u>Parité:</u> $h(-x) = -x - \sin(-x) = -x + \sin(x) = -(x - \sin(x)) = -h(x) \Rightarrow h$ est impaire.

c) <u>Périodicité:</u> $\sin(x)$ est périodique, mais pas $x \Rightarrow h$ n'est pas périodique.

d) <u>Zéros:</u> $h(x)=0 \Rightarrow x-\sin(x)=0 \Rightarrow \sin(x)=x$;
or, si $x\neq 0$, $|\sin(x)|<|x|$; la seule solution est donc $x=0$.



$|\sin(x)|<|x|$ si $x\neq 0$

e) <u>Intersection avec Oy:</u> $x=0 \Rightarrow h(x) = 0-\sin(0)=0$.

f) Tableau de signes:

x		0	
signes de $f(x)$	$-$	0	$+$

g) Asymptotes non verticales, sauts, trous: Il n'y a ni asymptote verticale, ni saut, ni trou.

h) Comportement asymptotiques: /

i) Asymptotes non verticales: la fonction $h(x) = x - \sin(x)$ oscille continuellement autour de la droite $y = x$. Tous les π elle s'en éloigne (en-dessous ou en-dessus) de 1. Elle ne peut donc pas avoir d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: on a $h'(x) = 1 - \cos(x)$. Son domaine est $\mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $h'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
En $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, on a $h(x) = 2k\pi - \sin(2k\pi) = 2k\pi$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de la dérivée: La dérivée n'a pas de point critique.

o) Tableau de variations:

x		-4π		-2π		0		2π		4π	
signes de $h'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$
croissance ou décroissance de $h(x)$	$\nearrow$	PI	$\nearrow$	PI	$\nearrow$	PI	$\nearrow$	PI	$\nearrow$	PI	$\nearrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: Les points $(2k\pi ; 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont tous des points d'inflexion (PI).

q) Deuxième dérivée: on a $h''(x) = \sin(x)$. Son domaine est $\mathbb{R}$.

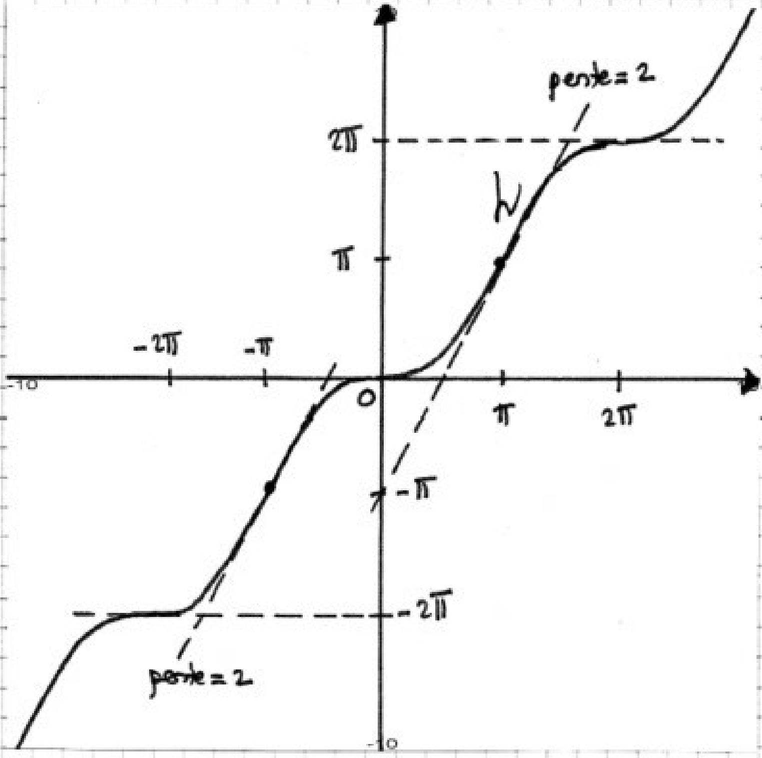
r) Points d'inflexion: $h''(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
En $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, on sait que $h(x) = 2k\pi$ et $h'(x) = 0$ (voir m) et p)).
En $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, on a $h(x) = (2k+1)\pi - \sin((2k+1)\pi) = (2k+1)\pi$ et
$h'(x) = 1 - \cos((2k+1)\pi) = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$.

s) Tableau de convexité:

x		-2π		$-\pi$		0		π		2π	
signes de $h''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
convexité ou concavité de $h(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$

$\frown$ = concave, $\smile$ = convexe

t) Graphique:



C. $i(x) = \sin(\pi x) - \sin^2(\pi x)$.

a) <u>Domaine de définition:</u> $\mathbb{R}$

b) <u>Parité:</u> $i(-x) = \sin(-\pi x) - \sin^2(-\pi x) = -\sin(\pi x) - (-\sin(\pi x))^2 = -\sin(\pi x) - \sin^2(\pi x) \neq \pm i(x)$

$\Rightarrow$ i n'est ni paire, ni impaire.

c) <u>Périodicité:</u> la période de $\sin(\pi x)$ étant 2, i est périodique et sa période est aussi 2. Il suffit donc d'étudier i sur l'intervalle $[0;2]$.

d) <u>Zéros:</u> $i(x) = 0 \Rightarrow \sin(\pi x) - \sin^2(\pi x) = 0 \Rightarrow \sin(\pi x)(1 - \sin(\pi x)) = 0$

$\Rightarrow \sin(\pi x) = 0$ ou $1 - \sin(\pi x) = 0 \Rightarrow \sin(\pi x) = 0$ ou $\sin(\pi x) = 1$

$\Rightarrow \pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou $\pi x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = k, k \in \mathbb{Z}$, ou $x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$.

Dans l'intervalle $[0;2]$, les zéros sont donc $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ et $x = 2$.

e) <u>Intersection avec l'axe Oy:</u> $x = 0 \Rightarrow i(x) = \sin(0) - \sin^2(0) = 0 - 0 = 0$.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x	0		$\frac{1}{2}$		1		2
signes de $i(x)$	0	+	0	+	0	−	0

g) <u>Asymptotes verticales, sauts, trous:</u> Comme il n'y a pas d'exclu, il n'y a pas d'asymptote verticale. Il n'y a pas non plus de sauts ou de trous.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> /

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> Comme i est périodique, elle ne peut pas avoir d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique : /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales : /

l) Première dérivée : On a $i'(x) = \pi\cos(\pi x) - 2\sin(\pi x)\cdot\pi\cos(\pi x) = \pi\cos(\pi x)(1-2\sin(\pi x))$.

Son domaine est $\mathbb{R}$ et elle est aussi périodique de période 2.

m) Points à tangente horizontale : $i'(x) = 0 \Rightarrow \pi\cos(\pi x)(1-2\sin(\pi x)) = 0$

$\Rightarrow$ soit $\cos(\pi x) = 0$, soit $1 - 2\sin(\pi x) = 0$

$\Rightarrow$ soit $\cos(\pi x) = 0$, soit $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ soit $\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, soit $\pi x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\pi x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ soit $x = \frac{1}{2} + k$, soit $x = \frac{1}{6} + 2k$, soit $x = \frac{5}{6} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{1}{6}$ ou $x = \frac{5}{6}$ dans l'intervalle $[0;2]$.

Avec $x = \frac{1}{2}$, on a $i(x) = \sin(\pi\cdot\frac{1}{2}) - \sin^2(\pi\cdot\frac{1}{2}) = 1 - 1^2 = 0$.

Avec $x = \frac{3}{2}$, on a $i(x) = \sin(\pi\cdot\frac{3}{2}) - \sin^2(\pi\cdot\frac{3}{2}) = (-1) - (-1)^2 = -1 - 1 = -2$.

Avec $x = \frac{1}{6}$, on a $i(x) = \sin(\pi\cdot\frac{1}{6}) - \sin^2(\pi\cdot\frac{1}{6}) = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Avec $x = \frac{5}{6}$, on a $i(x) = \sin(\pi\cdot\frac{5}{6}) - \sin^2(\pi\cdot\frac{5}{6}) = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Les points à tangente horizontale sont donc $(\frac{1}{6};\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2};0)$, $(\frac{5}{6};\frac{1}{4})$ et $(\frac{3}{2};-2)$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de la dérivée : i n'a pas de point critique.

o) Tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{6}$		$\frac{3}{2}$		2
signes de $i'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
croissance ou décroissance de $i(x)$		↗	max	↘	min	↗	max	↘	min	↗	

p) Nature des points à tangente horizontale : Dans $[0;2]$, les points $(\frac{1}{6};\frac{1}{4})$ et $(\frac{5}{6};\frac{1}{4})$ sont des maximums et les points $(\frac{1}{2};0)$ et $(\frac{3}{2};-2)$ sont des minimums.

q) Deuxième dérivée : On a $i'(x) = \pi\cos(\pi x)(1-2\sin(\pi x)) = u\cdot v$ avec $u = \pi\cos(\pi x)$ et $v = 1 - 2\sin(\pi x)$. Ainsi $u' = -\pi^2\sin(\pi x)$ et $v' = -2\pi\cos(\pi x)$. On a alors

$i''(x) = u'v + uv' = -\pi^2\sin(\pi x)\cdot(1-2\sin(\pi x)) + \pi\cos(\pi x)(-2\pi\cos(\pi x)) =$

$= -\pi^2\sin(\pi x) + 2\pi^2\sin^2(\pi x) - 2\pi^2\cos^2(\pi x) =$

$= -\pi^2\sin(\pi x) + 2\pi^2\sin^2(\pi x) - 2\pi^2(1-\sin^2(\pi x)) =$

$= -\pi^2\sin(\pi x) + 2\pi^2\sin^2(\pi x) - 2\pi^2 + 2\pi^2\sin^2(\pi x) =$

$= 4\pi^2\sin^2(\pi x) - \pi^2\sin(\pi x) - 2\pi^2 = \pi^2(4\sin^2(\pi x) - \sin(\pi x) - 2)$.

Son domaine est $\mathbb{R}$ et elle est périodique de période 2.

r) Points d'inflexion : $i''(x) = 0 \Rightarrow \pi^2(4\sin^2(\pi x) - \sin(\pi x) - 2) = 0$

$\Rightarrow 4\sin^2(\pi x) - \sin(\pi x) - 2 = 0$. On pose $u = \sin(\pi x)$; on obtient l'équation

$4u^2 - u - 2 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $au^2 + bu + c = 0$, avec $a = 4$, $b = -1$ et $c = -2$; on a $\Delta = b^2 - 4ac =$ $= (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 1 + 32 = 33$; les solutions sont $u_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{33}}{2 \cdot 4} =$ $= \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ et $u_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{33}}{2 \cdot 4} = \frac{1-\sqrt{33}}{8}$;

avec $u_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \cong 0{,}843$, on a $\sin(\pi x) = 0{,}843 \Rightarrow \pi x = 1{,}003 + 2k\pi$ et $\pi x = \pi - 1{,}003 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0{,}319 + 2k$ et $x = 0{,}681 + 2k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0{,}319$ et $x = 0{,}681$ $(x \in [0;2])$;

avec $u_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \cong -0{,}593$, on a $\sin(\pi x) = -0{,}593 \Rightarrow \pi x = -0{,}635 + 2k\pi$ et $\pi x = \pi + 0{,}635 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -0{,}202 + 2k$ et $x = 1{,}202 + 2k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1{,}798$ et $x = 1{,}202$ $(x \in [0;2])$.

On obtient donc 4 points : $x = 0{,}319$, $x = 0{,}681$, $x = 1{,}202$ et $x = 1{,}798$.

Avec $x = 0{,}319$, on a $i(x) = \sin(\pi x) - \sin^2(\pi x) = 0{,}132$.

Avec $x = 0{,}681$, on a $i(x) = 0{,}132$.

Avec $x = 1{,}202$, on a $i(x) = -0{,}945$

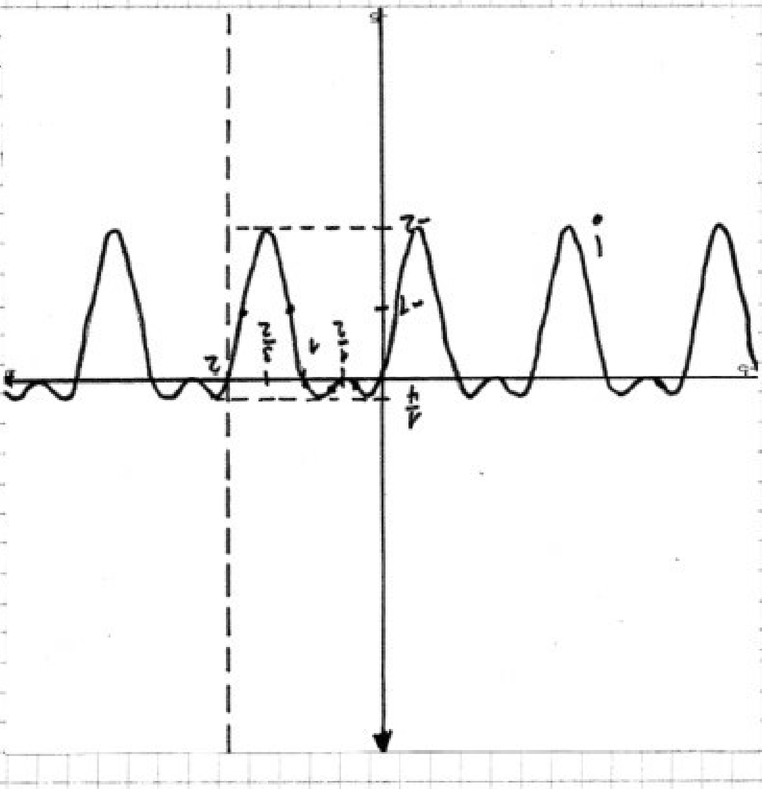
Avec $x = 1{,}798$, on a $i(x) = -0{,}945$.

On a ainsi 4 points d'inflexion : $(0{,}319 ; 0{,}132)$, $(0{,}681 ; 0{,}132)$, $(1{,}202 ; -0{,}945)$ et $(1{,}798 ; -0{,}945)$.

s) Tableau de convexité :

x	0		0,319		0,681		1,202		1,798		2
signe de $i''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
convexité ou concavité de $i(x)$		concave		convexe		concave		convexe		concave	

t) Graphique :



d. $j(x) = x \cdot \sin x$.

a) Domaine de définition: $\mathbb{R}$.

b) Parité: $j(-x) = -x \cdot \sin(-x) = -x \cdot (-\sin x) = x \sin x = j(x) \Rightarrow j$ est paire.

c) Périodicité: Bien que $\sin(x)$ soit périodique, x ne l'est pas $\Rightarrow j$ n'est pas périodique.

d) Zéros: $j(x) = 0 \Rightarrow x \cdot \sin x = 0 \Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $\sin x = 0$
$\Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

e) Intersection avec l'axe Oy: $x = 0 \Rightarrow j(x) = x \cdot \sin x = 0$.

f) Tableau de signes:

x	...	-2π		$-\pi$		0		π		2π	...
Signes de $j(x)$			$+$		$-$		$+$		$+$		$-$	$+$

g) Asymptotes verticales, points, trous: Comme il n'y a pas d'exclu, il n'y a pas d'asymptote verticale. Il n'y a pas non plus de points ou de trous.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticale: Une asymptote non verticale est de la forme $y = mx + h$, où $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{j(x)}{x}$ et, là où m existe, $h = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (j(x) - mx)$.

On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$. Or cette limite n'existe pas.

On en déduit que j n'a pas d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: On a $j(x) = uv$ avec $u = x$ et $v = \sin x$. Ainsi $u' = 1$ et $v' = \cos x$
et on a $f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$.
Son domaine est $\mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $j'(x) = 0 \Rightarrow \sin x + x \cos x = 0$
$\Rightarrow \sin x = -x \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = x \Rightarrow \tan x = x$.
On obtient une équation difficilement résolvable: $\tan x = x$. On ne va pas chercher à la résoudre ici.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de la dérivée: j n'a pas de point critique.

o) Tableau de variations: /

p) Nature des points à tangente horizontale: /

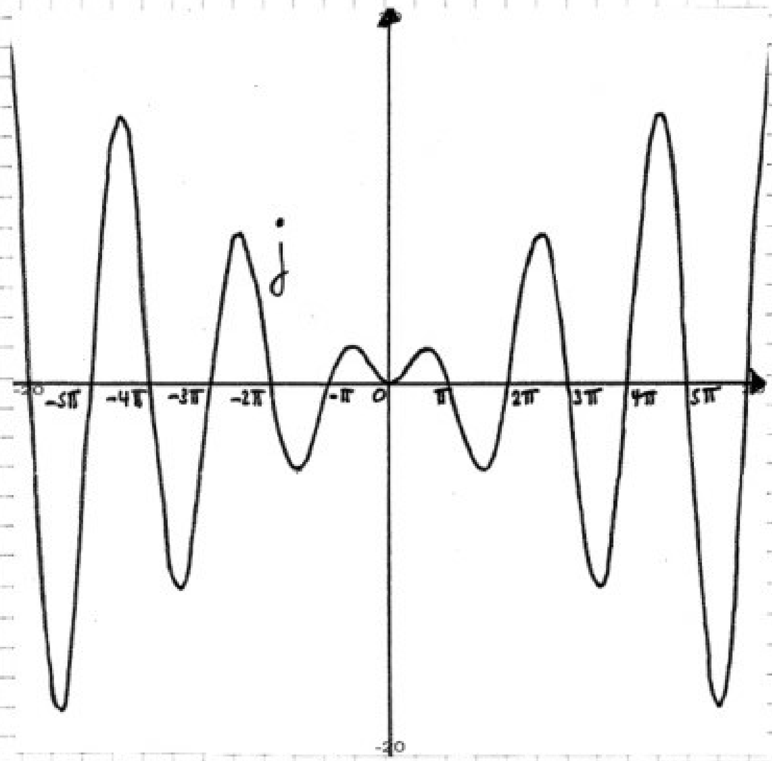
q) Deuxième dérivée: on a $j''(x) = \cos x + 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = 2\cos x - x \sin x$.

r) Points d'inflexion: $j''(x) = 0 \Rightarrow 2\cos x - x \sin x = 0 \Rightarrow 2\cos x = x \sin x$
$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{2}{x}$.

Là aussi on obtient une équation difficile à résoudre : $\tan x = \frac{2}{x}$. On ne cherche pas à la résoudre.

s) Tableau de convexité : /

t) Graphique :



Exercice 6.54

a. $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3(x^2)^{1/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$.

f admet donc un point à tangente verticale en $(0;0)$.

b. $f(x) = \sqrt[5]{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5x^{3/5}} = \frac{2}{5(x^3)^{1/5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} = +\infty$.

f admet donc un point de rebroussement en $(0;0)$.

c. $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} = 5(x^2)^{1/3} = 5x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = 5 \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3} = 5\frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}}$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$.

f admet donc un point de rebroussement en $(0;0)$.

d. $f(x) = 7 \cdot \sqrt[4]{x^2} = 7(x^2)^{1/4} = 7x^{\frac{2}{4}} = 7|x|^{1/2} \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot \frac{2}{4}x^{\frac{2}{4}-1} = \frac{7}{2}x^{-\frac{2}{4}} = \frac{7}{2x^{2/4}} =$

$= \frac{7}{2(x^2)^{1/4}} = \frac{7}{2\sqrt[4]{x^2}}$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{7}{2\sqrt[4]{x^2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{7}{2\sqrt[4]{x^2}} = +\infty$.

f admet donc un point à tangente verticale en $(0;0)$.

e. $f(x) = |x^2 + 4x| = \begin{cases} x^2+4x & \text{si } x^2+4x \geq 0 \\ -(x^2+4x) & \text{si } x^2+4x < 0 \end{cases}$; $x^2+4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -4$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2+4x & \text{si } x \leq -4 \\ -x^2-4x & \text{si } -4 < x < 0 \\ x^2+4x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x \leq -4 \\ -2x-4 & \text{si } -4 < x < 0 \\ 2x+4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-2x-4) = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (2x+4) = 4$.

f admet donc un point anguleux en $(0;0)$.

f. $f(x) = |\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \sin(x) \geq 0 \\ -\sin(x) & \text{si } \sin(x) < 0 \end{cases}$; ainsi, au voisinage de $x = 0$, on a

$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-\cos(x)) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \cos(x) = 1$.

f admet donc un point anguleux en $(0;0)$.

Exercice 6.55

On a $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(x-1)}{x-2}}$.

a) Domaine de définition: On doit avoir $x-2\neq 0$ et $\dfrac{x^2(x-1)}{x-2}\geqslant 0$. $x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$.

$\dfrac{x^2(x-1)}{x-2}\geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x-2}\geqslant 0$; on a

x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{x-2}$	$+$	0	$-$	///	$+$

ainsi $\dfrac{x-1}{x-2}\geqslant 0$ si $x\in\,]-\infty;1]\cup]2;+\infty[$.

Le domaine de définition est donc $D=\,]-\infty;1]\cup]2;+\infty[\,=\mathbb{R}-]1;2]$.

b) Parité: On a $f(-x)=\sqrt{\dfrac{(-x)^2(-x-1)}{(-x-2)}}=\sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{x+2}}\neq\pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions périodiques, elle n'est pas périodique.

d) Zéro: $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2(x-1)}{x-2}}=0 \Rightarrow \dfrac{x^2(x-1)}{x-2}=0 \Rightarrow x^2(x-1)=0 \Rightarrow x^2=0$ ou $x-1=0$

$\Rightarrow x=0$ ou $x=1$.

e) Intersection avec l'axe y: $x=0 \Rightarrow f(x)=0$.

f) Tableau de signes:

x		0		1		2	
x^2	$+$	0	$+$	$+$	///		$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	///		$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	///		$+$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	///		$+$

g) Asymptotes verticales: En $x=1$, on a $f(x)=0$. En $x=2$, on a $f(x)=+\infty$. $x=2$ est donc une asymptote verticale (lorsque $x \underset{>}{\to} 2$).

h) Comportement asymptotique: On a $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} f(x)=\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2}\sqrt{\dfrac{x^2(x-1)}{x-2}}=+\infty$.

i) Asymptotes non verticales: Une asymptote non verticale pour f sera de la forme $y=mx+h$, avec $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$. On a :

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x^2(x-2)}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}}=\sqrt{\frac{1}{1}}=1\ ;$$

$$h=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2(x-1)}}{\sqrt{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{x-1-(x-2)}{\sqrt{(x-1)(x-2)}+x-2}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}+x-2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{2}{x}}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}\ ;$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{x^2}}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x^2(x-2)}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}}=-\sqrt{\frac{1}{1}}=-1\ ;$$

$$h=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{\sqrt{2-x}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}-1\right)=\lim_{x\to-\infty}-x\cdot\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to-\infty}-x\cdot\frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}(\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x})}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\cdot\frac{1-x-(2-x)}{\sqrt{(1-x)(2-x)}+2-x}=\lim_{x\to-\infty}-x\cdot\frac{-1}{\sqrt{x^2-3x+2}+2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+2-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1}-1}=-\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote oblique à $+\infty$ et $y=-x-\frac{1}{2}$ est asymptote oblique à $-\infty$.

j) Comportement asymptotique: On doit étudier le signe de $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+\frac{1}{2}))$ et de $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x-\frac{1}{2}))$.

On a: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+\frac{1}{2}))=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}-x-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}-x\right)-\frac{1}{2}\overset{\text{voir i)}}{=}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{2}{x}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1_-+1_-}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2_-}-\frac{1}{2}=0_+$. Ainsi f s'approche de son asymptote $y=x+\frac{1}{2}$ par au-dessus à $+\infty$.

De plus: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x-\frac{1}{2}))=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}+x+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}+x\right)+\frac{1}{2}\overset{\text{voir i)}}{=}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{-1_--1_-}+\frac{1}{2}=\frac{1}{-2_-}+\frac{1}{2}=0_+$. Ainsi f s'approche de son asymptote $y=-x-\frac{1}{2}$ par au-dessus à $-\infty$.

k) Intersections avec les asymptotes:

1) Avec $y=x+\frac{1}{2}$: $\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}=x+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2(x-1)}{x-2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow x^2(x-1)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(x-2)$

$\Rightarrow x^3-x^2=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)(x-2) \Rightarrow x^3-x^2=x^3-2x^2+x^2-2x+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x^3-x^2=x^3-x^2-\frac{7x}{4}-\frac{1}{2} \Rightarrow 0=-\frac{7x}{4}-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7x}{4}=-\frac{1}{2} \Rightarrow 7x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{7}$;

vérification: avec $x=-\frac{2}{7}$, $x^2=\frac{4}{49}$, $x-1=-\frac{9}{7}$, $x^2(x-1)=-\frac{36}{343}$, $x-2=-\frac{16}{7}$,

$\frac{x^2(x-1)}{x-2}=-\frac{36}{343}:\left(-\frac{16}{7}\right)=\frac{9}{196} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}=\sqrt{\frac{9}{196}}=\frac{3}{14}$, $x+\frac{1}{2}=-\frac{2}{7}+\frac{1}{2}=\frac{3}{14} \rightarrow$ ok;

avec $x=-\frac{2}{7}$, on a $y=\frac{3}{14}$ (voir ci-dessus) ; ainsi f coupe $y=x+\frac{1}{2}$ en $\left(-\frac{2}{7};\frac{3}{14}\right)$.

2) Avec $y=-x-\frac{1}{2}$: $\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}=-x-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2(x-1)}{x-2}=\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2(x-1)}{x-2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x=-\frac{2}{7}$

comme en a) ; vérification: avec $x=-\frac{2}{7}$, $\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}=\frac{3}{14}$ comme en 1) et $-x-\frac{1}{2}=$

$=\frac{2}{7}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{14}\neq\frac{3}{14} \Rightarrow$ not ok ; ainsi f ne coupe pas $y=-x-\frac{1}{2}$.

l) <u>Dérivée:</u> $f(x)=\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x^2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2f(x)}\left(\frac{x^2(x-1)}{x^2}\right)'$.

On a $\frac{x^2(x-1)}{x-2}=\frac{u}{v}$ avec $u=x^2(x-1)=x^3-x^2$ et $v=x-2$; on a $u'=3x^2-2x$ et $v'=1$;

ainsi $\left(\frac{x^2(x-1)}{x-2}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(3x^2-2x)(x-2)-(x^3-x^2)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-6x^2-2x^2+4x-x^3+x^2}{(x-2)^2}=$

$=\frac{2x^3-7x^2+4x}{(x-2)^2}$. Ainsi $f'(x)=\frac{1}{2f(x)}\cdot\frac{2x^3-7x^2+4x}{(x-2)^2}$.

Domaine de f': on doit avoir $f(x)\neq 0$, $x\in D_f$, et $x-2\neq 0 \Rightarrow$

$x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.

Ainsi $D_{f'}=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2f(x)}\cdot\frac{2x^3-7x^2+4x}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow 2x^3-7x^2+4x=0$

$\Rightarrow x(2x^2-7x+4)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $2x^2-7x+4=0$.

$2x^2-7x+4=0$ est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=2$, $b=-7$ et $c=4$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4.2.4=49-32=17$; les solutions sont $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+\sqrt{17}}{4}$ et $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-\sqrt{17}}{4}$.

Avec $x=0$, on a $f(x)=0$.

Avec $x=\frac{7+\sqrt{17}}{4}\cong 2{,}78$, on a $f(x)\cong 4{,}2$.

Avec $x=\frac{7-\sqrt{17}}{4}\cong 0{,}72$, on a $f(x)\cong 0{,}34$.

Les points à tangente horizontale sont donc $(0;0)$, $(0{,}72;0{,}34)$ et $(2{,}78;4{,}2)$.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Les points critiques de f' sont $x=0$, $x=1$ $(x<1)$ et $x=2$ $(x>2)$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{1}{2f(x)}\cdot\frac{2x^3-7x^2+4x}{(x-2)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x-2}}}\cdot\frac{2x^3-7x^2+4x}{(x-2)^2}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\sqrt{\frac{1}{4\frac{x^2(x-1)}{x-2}}}\cdot\frac{2x^3-7x^2+4x}{(x-2)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\sqrt{\frac{x-2}{4x^2(x-1)}}\cdot\frac{2x^3-7x^2+4x}{(x-2)^2}=$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sqrt{\frac{x-2}{4x^2(x-1)}} \cdot \frac{x(2x^2-7x+4)}{(x-2)^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sqrt{\frac{x-2}{4x^2(x-1)}} \cdot \frac{-\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{(2x^2-7x+4)^2}}{\sqrt{(x-2)^4}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} -\sqrt{\frac{(x-2) \cdot x^2 \cdot (2x^2-7x+4)^2}{4x^2(x-1)(x-2)^4}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} -\sqrt{\frac{(2x^2-7x+4)^2}{4(x-1)(x-2)^3}} = -\sqrt{\frac{4^2}{4 \cdot (-1)(-2)^3}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{16}{32}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{\frac{x-2}{4x^2(x-1)}} \cdot \frac{x(2x^2-7x+4)}{(x-2)^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{\frac{x-2}{4x^2(x-1)}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{(2x^2-7x+4)^2}}{\sqrt{(x-2)^4}} =$$

voir ci-dessus

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{\frac{(x-2)x^2(2x^2-7x+4)^2}{4x^2(x-1)(x-2)^4}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{\frac{(2x^2-7x+4)^2}{4(x-1)(x-2)^3}} = \sqrt{\frac{4^2}{4 \cdot (-1) \cdot (-2)^3}} = \sqrt{\frac{16}{32}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

par conséquent, comme $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, f admet un point anguleux en $(0;0)$.

De plus, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{2f(x)} \cdot \frac{2x^3-7x^2+4x}{(x-2)^2} = \frac{1}{20_+} \cdot \frac{2-7+4}{(-2)^2} = \frac{1}{20_+} \cdot \frac{-1}{4} = -\infty$

et $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1}{2f(x)} \cdot \frac{2x^3-7x^2+4x}{(x-2)^2} =$ voir ci-dessus

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x-2}{4x^2(x-1)}} \cdot \frac{x(2x^2-7x+4)}{(x-2)^2} =$$ car $x=2$, $2x^2-7x+4=-2$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x-2}{4x^2(x-1)}} \cdot \frac{\sqrt{x^2} \cdot \left(-\sqrt{(2x^2-7x+4)^2}\right)}{\sqrt{(x-2)^4}} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} -\sqrt{\frac{(x-2)x^2(2x^2-7x+4)^2}{4x^2(x-1)(x-2)^4}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} -\sqrt{\frac{(2x^2-7x+4)^2}{4(x-1)(x-2)^3}} = -\sqrt{\frac{(-2)^2}{4 \cdot 1 \cdot 0_+}} = -\infty.$$

On peut finalement calculer l'angle formé par la fonction en son point anguleux $(0;0)$.
Comme $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cela signifie que la pente de la tangente lorsque $x \underset{<}{\to} 0$ est $m_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que la pente de la tangente lorsque $x \underset{>}{\to} 0$ est $m_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après Formulaires et tables p. 51, l'angle aigu entre 2 droites de pentes respectives m_1 et m_2 est donné par $\tan(\varphi) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$.

On a ici $\tan(\varphi) = \left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{1/2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(2\sqrt{2}) = \arctan(2\sqrt{2}) \cong 70{,}53°$

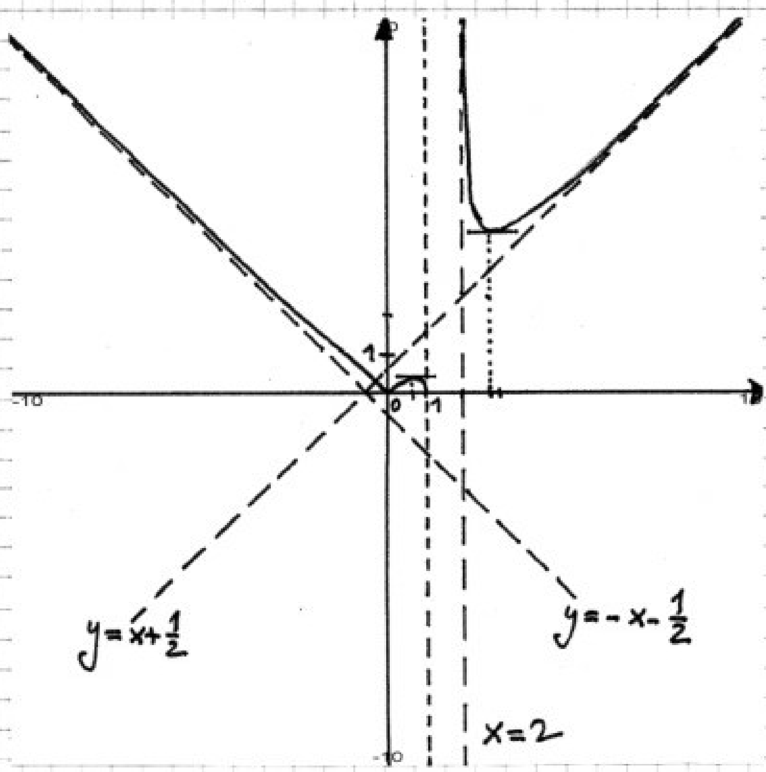
o) Tableau de variation:

x		0		0,72		1		2		2,78	
signes de $f'(x)$	−	0	+	0	−	$-\infty$		$-\infty$	−	0	+
croissance ou décroissance de $f(x)$	↘	min	↗	max	↘	↓		↓	↘	min	↗

p) Nature des points à tangente horizontales:

D'après o), $(0;0)$ est un minimum local, $(0{,}72;\ 0{,}34)$ est un maximum local et $(2{,}78;\ 4{,}2)$ est un minimum local.

q) Graphique:



Exercice 6.56.

On a $f(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2-2x-4$.

Dérivée: $f'(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-2$

Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Longrightarrow \frac{3}{2}x^2+2x-2=0 \Longrightarrow 3x^2+4x-4=0$, équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=3$, $b=4$ et $c=-4$; on a $\Delta=b^2-4ac=$ $=4^2-4.3.(-4)=16+48=64$ et $\sqrt{\Delta}=8$; les solutions sont $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+8}{2\cdot3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ et $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-8}{2\cdot3}=\frac{-12}{6}=-2$; les points à tangente horizontale sont donc $x=-2$ et $x=\frac{2}{3}$.

Tableau de croissance:

x		-2		$\frac{2}{3}$	
signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Intervalles de croissance: f est croissante sur $]-\infty;-2[\ \cup\ ]\frac{2}{3};+\infty[$ et décroissante sur $]-2;\frac{2}{3}[$; elle atteint un maximum local en $x=-2$ (et on a $f(-2)=$ $=\frac{1}{2}(-2)^3+(-2)^2-2(-2)-4=-4+4+4-4=0$) et un minimum local en $x=\frac{2}{3}$ (et on a $f(\frac{2}{3})=\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^3+(\frac{2}{3})^2-2.\frac{2}{3}-4=\frac{4}{27}+\frac{4}{9}-\frac{4}{3}-4=-\frac{128}{27}$).

Deuxième dérivée: $f''(x)=3x+2$

Points d'inflexion: $f''(x)=0 \Longrightarrow 3x+2=0 \Longrightarrow x=-\frac{2}{3}$.

Tableau de convexité:

x		$-\frac{2}{3}$	
signes de $f''(x)$	$-$	0	$+$
convexité ou concavité de $f(x)$	$\frown$		$\smile$

Intervalles de convexité: f est concave sur $]-\infty;-\frac{2}{3}[$ et convexe sur $]-\frac{2}{3};+\infty[$; elle a un point d'inflexion en $x=-\frac{2}{3}$ (et on a $f(-\frac{2}{3})=\frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^3+(-\frac{2}{3})^2-2(-\frac{2}{3})-4=$ $=-\frac{4}{27}+\frac{4}{9}+\frac{4}{3}-4=-\frac{64}{27}$).

Zéros: $f(x)=0 \Longrightarrow \frac{1}{2}x^3+x^2-2x-4=0 \Longrightarrow x^3+2x^2-4x-8=0$.

Voyons s'il existe un nombre entier solution de cette équation du 3e degré. On sait que, si elle existe, elle sera parmi les diviseurs de 8, c'est-à-dire parmi ±1, ±2, ±4 et ±8.

$x=1:\ 1^3+2\cdot1^2-4.1-8=1+2-4-8\neq0$;

$x=-1:\ (-1)^3+2\cdot(-1)^2-4.(-1)-8=-1+2+4-8\neq0$;

$x=2:\ 2^3+2.2^2-4.2-8=8+8-8-8=0$.

Ainsi $x=2$ est solution. On divise alors x^3+2x^2-4x-8 par $x-2$: