Lycée Denis-de-Rougemont Mathématiques de niveau 1

TE de révision - GEOMETRIE DANS L'ESPACE

CORRIGÉ B

Exercice 1

a) Pour prouver que le triangle ABC est isocèle, il faut calculer la longueur de ses côtés, i.e. $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ et $\|\overrightarrow{CA}\|$.

On a:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$;

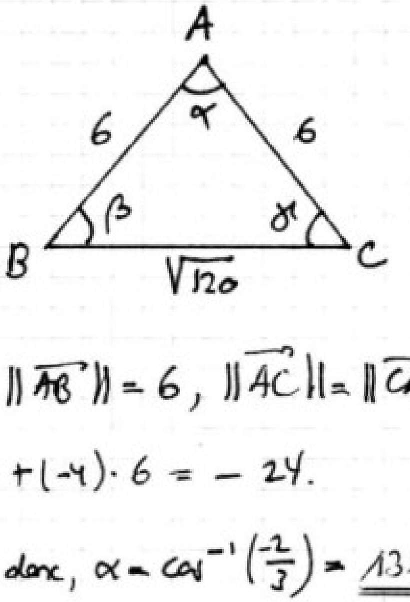
$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 10^2} = \sqrt{4+16+100} = \sqrt{120}$;

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{36} = 6$.

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CA}\|$, le triangle ABC est isocèle.

b) Le triangle se présente comme suit:



Comme le triangle est isocèle, on a $\beta = \gamma$.

Calculons α.

On a $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 6$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = 6$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-4) \cdot 6 = -24$.

Ainsi $\cos(\alpha) = \dfrac{-24}{6 \cdot 6} = \dfrac{-24}{36} = \dfrac{-2}{3}$ et, donc, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-2}{3}\right) = 131,81^\circ$.

On a $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, i.e. $131,81^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ$, i.e. $\beta + \gamma = 48,19^\circ$, i.e. $\beta + \beta = 48,19^\circ$, i.e. $2\beta = 48,19^\circ$, i.e. $\beta = \gamma = 24,09^\circ$.

c) L'équation cartésienne du plan contenant le triangle est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan.

On sait que le vecteur $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et à

$\overrightarrow{AC}$, donc au plan.

On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 6 - (-4)\cdot 0 \\ -4\cdot 0 - 2\cdot 6 \\ 2\cdot 0 - 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En divisant ce vecteur par 12, on obtient le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteur perpendiculaire au plan.

On peut donc choisir ce vecteur pour le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ainsi l'équation du plan est : $2x - y + d = 0$.

Pour trouver d on utilise un des points, par exemple le point $A(1;2;2)$; par substitution, on obtient $2\cdot 1 - 2 + d = 0$, i.e. $d = 0$.

L'équation du plan est donc $\underline{\underline{2x - y = 0.}}$

<u>Exercice 2</u>

a) Le centre de la sphère est $K(-4;3;2)$ et son rayon est 12 $(12^2 = 144)$.

Calculons la distance de K au plan $\pi : x + 2y - 2z - 40 = 0$.

Avec la formule de la distance d'un point à un plan, cette distance vaut :

$$\frac{|-4 + 2\cdot 3 - 2\cdot 2 - 40|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-4+6-4-40|}{\sqrt{9}} = \frac{|-42|}{3} = \frac{42}{3} = 14.$$

Comme cette distance est supérieure au rayon de la sphère $(14 > 12)$, on en déduit que <u>le plan ne touche pas la sphère.</u>

b) Deux plans parallèles ont mêmes vecteurs normaux.

Un vecteur normal à $\pi : x + 2y - 2z - 40 = 0$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Les équations des plans parallèles à π sont : $x + 2y - 2z + d = 0$.

Pour déterminer les valeurs possibles de d, on va utiliser le fait que le plan doit être tangent à la sphère, autrement dit que la distance du centre de la sphère au plan vale 12.

En utilisant la formule de la distance d'un point à un plan, on a :

$$\frac{|-4 + 2\cdot 3 - 2\cdot 2 + d|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 12 \qquad \Big| \text{ calculs}$$

$$\frac{|-4+6-4+d|}{\sqrt{9}} = 12 \qquad \Big| \text{ calculs}$$

$$\frac{|-2+d|}{3} = 12 \qquad \Big| \cdot 3$$

$$|-2+d| = 36$$

On a alors les 2 possibilités suivantes:

1) $-2+d = 36$, i.e. $d = 38$;

2) $-2+d = -36$, i.e. $d = -34$.

Les équations des plans tangents sont donc: $x+2y-2z+38=0$ (α)
et $\underline{\underline{x+2y-2z-34=0}}$ (β)

c) Les points de contact entre la sphère et les plans α et β seront les intersections de la droite perpendiculaire à ces plans passant par le centre de la sphère et des plans α et β.
Un vecteur normale aux plans α et β est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
On va le prendre comme vecteur de la droite perpendiculaire.
Comme elle passe par $K(-4;3;2)$, ses équations paramétriques sont: $\begin{cases} x = -4+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 2-2\lambda . \end{cases}$

Intersection avec α:

$$\begin{array}{rl|l} & -4+\lambda+2(3+2\lambda)-2(2-2\lambda)+38=0 & \text{distr.} \\ & -4+\lambda+6+4\lambda-4+4\lambda+38=0 & \text{réd.} \\ & 9\lambda+36=0 & -36 \\ & 9\lambda=-36 & :9 \\ & \lambda=-4 & \end{array}$$

ainsi $x=-4-4=-8$, $y=3+2(-4)=-5$
et $z=2-2(-4)=10$;
l'intersection est donc $\underline{\underline{(-8;-5;10)}}$.

Intersection avec β:

$$\begin{array}{rl|l} & -4+\lambda+2(3+2\lambda)-2(2-2\lambda)-34=0 & \text{distr.} \\ & -4+\lambda+6+4\lambda-4+4\lambda-34=0 & \text{réd.} \\ & 9\lambda-36=0 & +36 \\ & 9\lambda=36 & :9 \\ & \lambda=4 & \end{array}$$

ainsi $x=-4+4=0$, $y=3+2\cdot4=11$ et
$z=2-2\cdot4=-6$;
l'intersection est donc $\underline{(0;11;-6)}$.

Exercice 3

a) Le rayon de la sphère est égal à la distance du centre M de la sphère à la droite d.

La formule de la distance d'un point M à une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$ est $\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\times\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$.

On peut prendre ici $A(14;14;-3)$ et $\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$.

On a :

$$AM=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14\\14\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18\\-12\\6\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AM}\times\vec{d}=\begin{pmatrix}-18\\-12\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\cdot4-6\cdot2\\6\cdot5-(-18)\cdot4\\-18\cdot2-(-12)\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-48-12\\30+72\\-36+60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-60\\102\\24\end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{AM}\times\vec{d}\|=\sqrt{(-60)^2+102^2+24^2}=\sqrt{3600+10'404+576}=\sqrt{14580};$$

$$\|\vec{d}\|=\sqrt{5^2+2^2+4^2}=\sqrt{25+4+16}=\sqrt{45}.$$

Ainsi la distance cherchée est $\dfrac{\sqrt{14580}}{\sqrt{45}}=\sqrt{\dfrac{14580}{45}}=\sqrt{324}=18.$

Le rayon de la sphère est donc $\underline{\underline{18}}$.

b) L'équation de la sphère est : $(x+4)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=324$ $(18^2=324)$.

Par substitution des équations de la droite, on a :

$(14+5\lambda+4)^2+(14+2\lambda-2)^2+(-3+4\lambda-3)^2=324$	calculs
$(5\lambda+18)^2+(2\lambda+12)^2+(4\lambda-6)^2=324$	identités remarquables
$25\lambda^2+180\lambda+324+4\lambda^2+48\lambda+144+16\lambda^2-48\lambda+36=324$	réduction
$45\lambda^2+180\lambda+504=324$	-324
$45\lambda^2+180\lambda+180=0$	$:45$
$\lambda^2+4\lambda+4=0$	identité remarquable
$(\lambda+2)^2=0$	$\sqrt{}$
$\lambda+2=0$	-2
$\lambda=-2$	

Avec $\lambda=-2$, on trouve $x=14+5\cdot(-2)=4$, $y=14+2\cdot(-2)=10$ et $z=-3+4\cdot(-2)=-11$.

Ainsi le point de contact est $\underline{\underline{I(4;10;-11)}}$.

c) La droite p doit être perpendiculaire à d, donc à un vecteur perpendiculaire à un vecteur directeur de d, donc perpendiculaire à $\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$.

La droite p doit être tangente à la sphère en T, donc elle doit être perpendiculaire à $\overrightarrow{MT}$.

On a :

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la droite p doit être perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$.

Or, $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$ sera parallèle à la droite p.

On a : $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-14) - 4\cdot 8 \\ 4\cdot 8 - 5\cdot(-14) \\ 5\cdot 8 - 2\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28-32 \\ 32+70 \\ 40-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 102 \\ 24 \end{pmatrix}.$

En divisant par 2, on peut prendre le vecteur $\begin{pmatrix} -30 \\ 51 \\ 12 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de p.

Comme p passe par $T(4; 10; -11)$, ses équations paramétriques sont :

$$\underline{\underline{\begin{cases} x = 4 - 30\lambda \\ y = 10 + 51\lambda \\ z = -11 + 12\lambda. \end{cases}}}$$