Exercice 27

La hauteur issue de A est perpendiculaire au segment BC, donc au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

On a: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de A est donc $x + 2y + c = 0$.

$A(6;0)$ appartient à cette hauteur : on doit donc avoir : $6 + 2.0 + c = 0 \Rightarrow c = -6$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de A est donc $\underline{\underline{x + 2y - 6 = 0}}$.

La hauteur issue de B est perpendiculaire au segment AC, donc au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

On a: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de B est donc $3x - 2y + c = 0$.

$B(-2;0)$ appartient à cette hauteur : on doit donc avoir $3\cdot(-2) - 2.0 + c = 0$
$\Rightarrow -6 + c = 0 \Rightarrow c = 6$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de B est donc $\underline{\underline{3x - 2y + 6 = 0}}$.

La hauteur issue de C est perpendiculaire au segment AB, donc au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de C est donc $x + c = 0$.

$C(0;4)$ appartient à cette hauteur : on doit donc avoir $0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de C est donc $\underline{\underline{x = 0}}$.

Pour trouver l'orthocentre C du triangle, on cherche l'intersection des 3 hauteurs.
Pour cela, on va chercher l'intersection de 2 hauteurs et vérifier qu'elle appartient à la troisième hauteur.

Cherchons l'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de C :
on doit donc résoudre : $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$

De la 2^e relation, on a $x = 1$ et on a $2y = 6 - x = 6 - 0 = 6 \Rightarrow y = 3$.
Avec $x = 0$ et $y = 3$, on a $3x - 2y + 6 = 3.0 - 2.3 + 6 = -6 + 6 = 0$.

L'orthocentre est donc $\underline{\underline{C(0;3)}}$.

Exercice 28

On a : $a : x + 3y - 4 = 0$.

On en déduit que le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (coefficients de x et y) est orthogonal à a.

Comme b est parallèle à a, le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est aussi orthogonal à b.

Ainsi, une équation cartésienne de b est $x + 3y + d = 0$.

b passe par $A(4; 3)$.

Par substitution, on a : $4 + 3 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow 4 + 9 + d = 0 \Rightarrow 13 + d = 0 \Rightarrow d = -13$.

Une équation cartésienne de b est donc $\underline{\underline{x + 3y - 13 = 0}}$.

Comme $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à a, le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est parallèle à a.

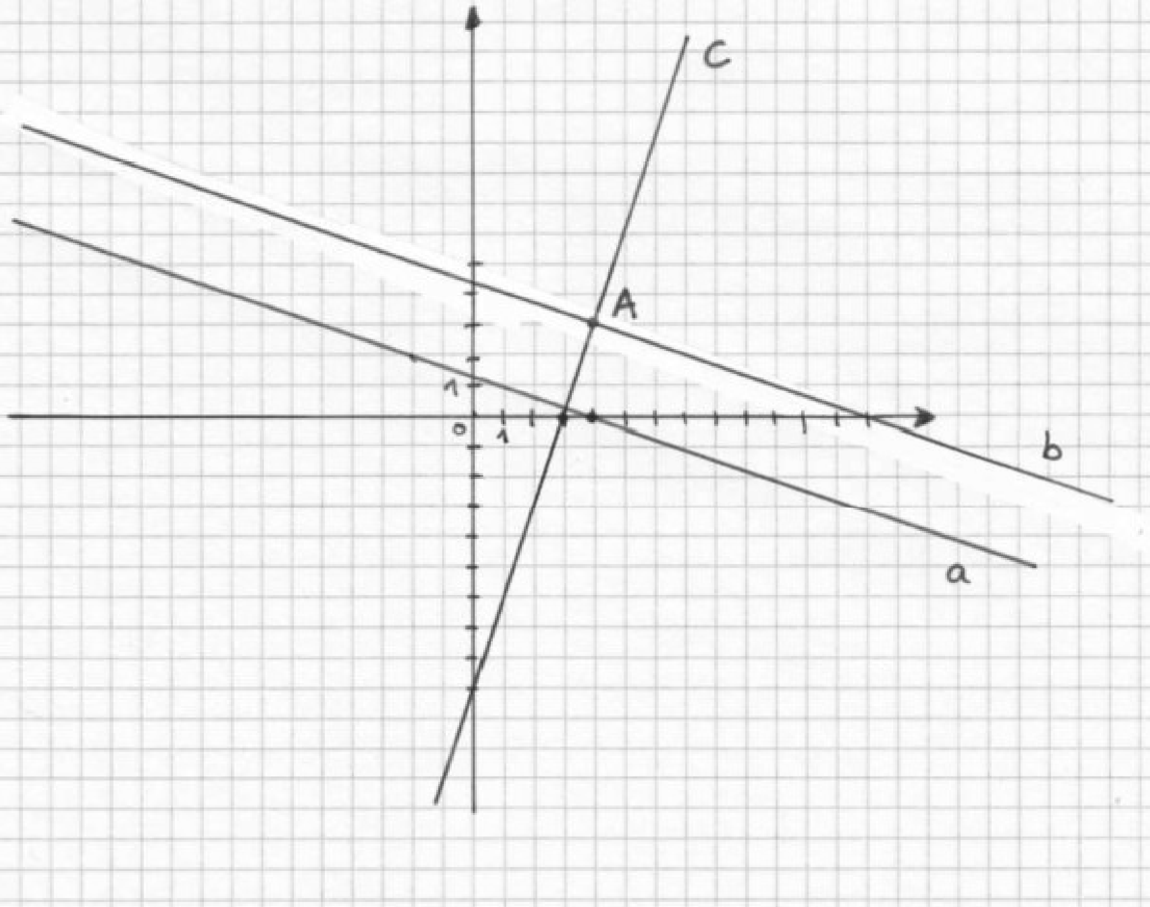
Comme c est orthogonal à a, le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à c.

Une équation cartésienne de c est donc $3x - y + e = 0$.

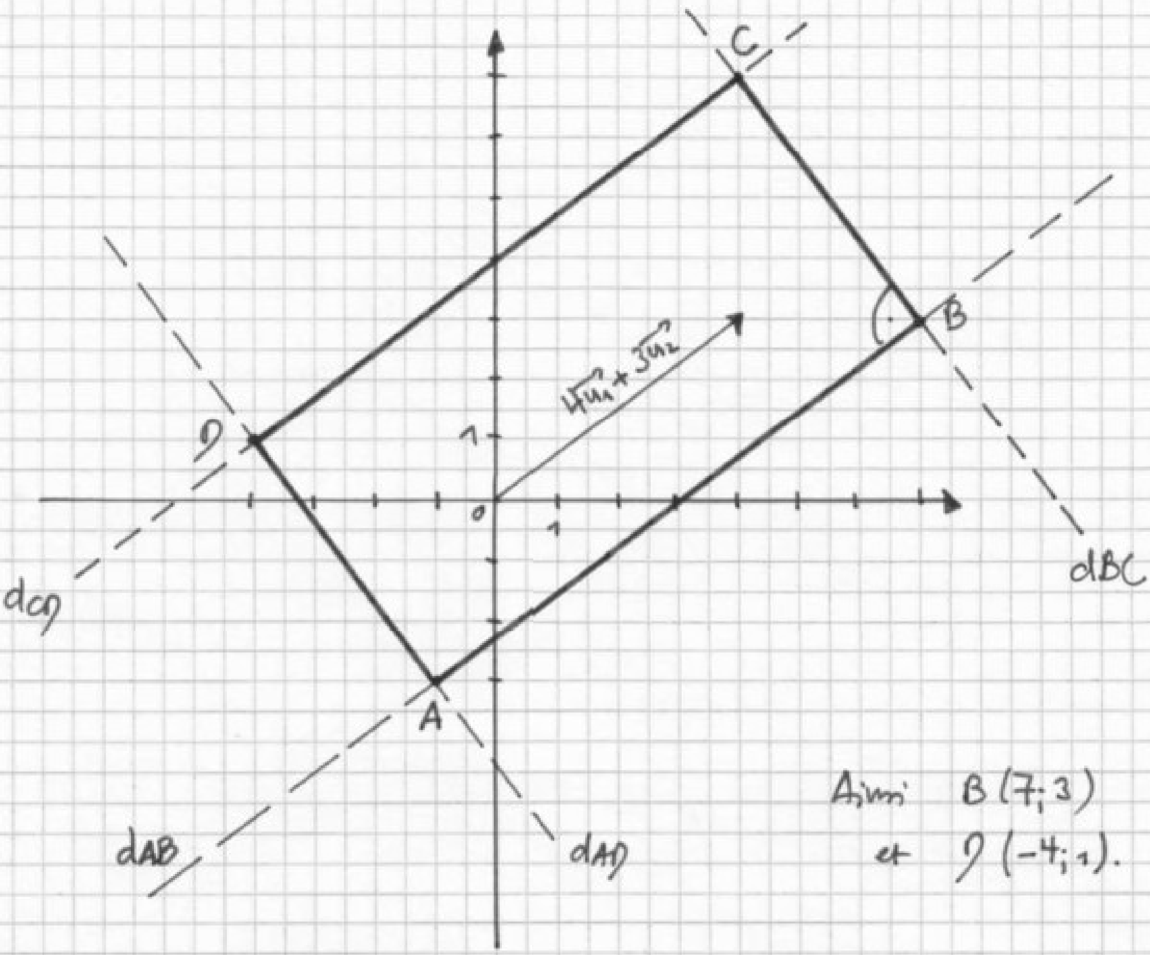
c passe par $A(4; 3)$.

Par substitution, on a : $3 \cdot 4 - 3 + e = 0 \Rightarrow 12 - 3 + e = 0 \Rightarrow 9 + e = 0 \Rightarrow e = -9$.

Une équation cartésienne de c est donc $\underline{\underline{3x - y - 9 = 0}}$.



Exercice 29



Ainsi $B(7;3)$
et $D(-4;1)$.

La droite d_{AB} passe par $A(-1;-3)$ et est parallèle à $4\vec{u_1}+3\vec{u_2}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Elle est donc orthogonale à $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne s'écrit ainsi : $3x-4y+c=0$.

Avec $A(-1;-3)$, on obtient : $3\cdot(-1)-4(-3)+c=0 \Rightarrow -3+12+c=0 \Rightarrow 9+c=0 \Rightarrow c=-9$.

L'équation cartésienne de d_{AB} est donc : $3x-4y-9=0$.

La droite d_{BC} est perpendiculaire à la droite d_{AB} (puisque ABCD est un rectangle) et est donc orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne s'écrit donc : $4x+3y+c=0$.

Avec $C(4;7)$, on obtient : $4\cdot4+3\cdot7+c=0 \Rightarrow 16+21+c=0 \Rightarrow 37+c=0 \Rightarrow c=-37$.

L'équation cartésienne de d_{BC} est donc : $4x+3y-37=0$.

B est l'intersection de d_{AB} et d_{BC}. $B(x;y)$ est donc la solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-4y-9=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x-12y-27=0 \\ 4x+3y-37=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+12y-148=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x-175=0 \Rightarrow 25x=175 \Rightarrow x=7.$$

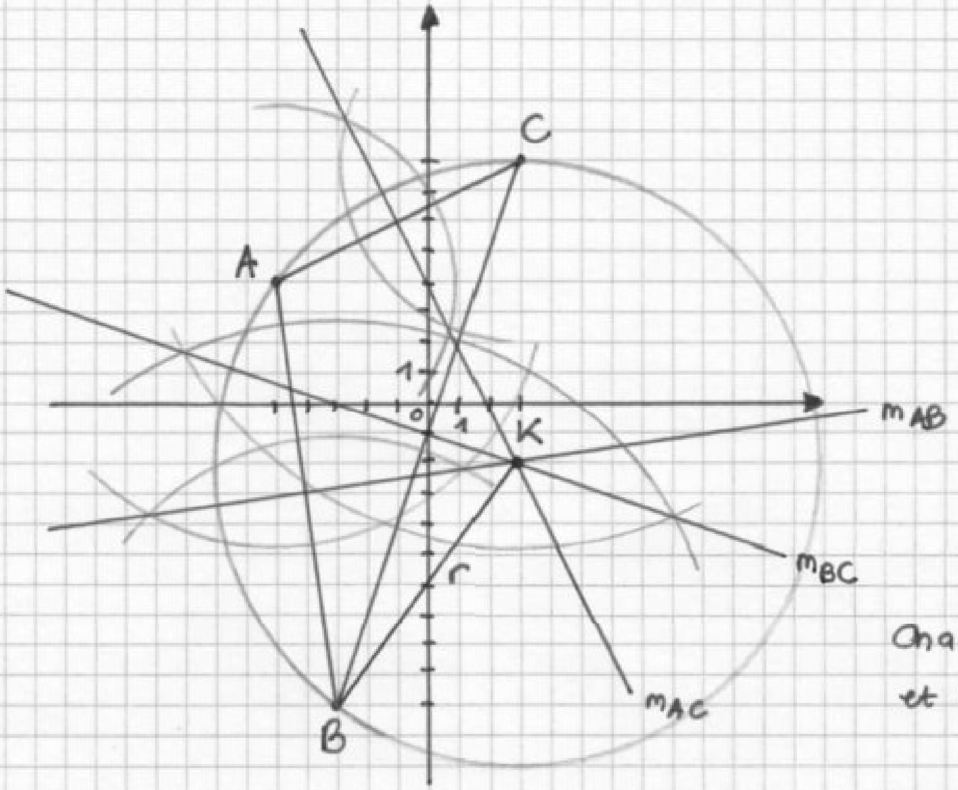
Avec $x=7$, on trouve $4y=3x-9=3\cdot7-9=21-9=12 \Rightarrow y=3$.

Ainsi, on a $\underline{B(7;3)}$.

On a : $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, on a $\underline{D(-4;1)}$.

Exercice 30



On a $K(3;-2)$ et $r=10$.

Cherchons les équations cartésiennes des médiatrices du triangle ABC :

médiatrice de AB : m_{AB} : est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et passe par M_{AB}, milieu de AB ;

on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-3\\-10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-14\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$;

une équation cartésienne de m_{AB} est donc : $x-7y+c=0$;

de plus, $M_{AB}=\left(\frac{-5+(-3)}{2};\frac{4+(-10)}{2}\right)=(-4;-3)$;

par substitution, on trouve : $-4-7.(-3)+c=0$

$\Rightarrow -4+21+c=0 \Rightarrow 17+c=0 \Rightarrow c=-17$;

une équation cartésienne de m_{AB} est donc $x-7y-17=0$;

médiatrice de BC : m_{BC} : est perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}$ et passe par M_{BC}, milieu de BC ;

on a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$;

une équation cartésienne de m_{BC} est donc $x+3y+c=0$;

de plus, $M_{BC}=\left(\frac{-3+3}{2};\frac{-10+8}{2}\right)=(0;-1)$;

par substitution, on trouve : $0+3.(-1)+c=0 \Rightarrow c=3$;

une équation cartésienne de m_{BC} est donc $x+3y+3=0$;

médiatrice de AC : m_{AC} : est perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$ et passe par M_{AC}, milieu de AC ;

on a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$;

une équation cartésienne de m_{AC} est donc $2x+y+c=0$;

de plus, $M_{AC}=\left(\frac{-5+3}{2};\frac{4+8}{2}\right)=(-1;6)$;

par substitution, on trouve : $2\cdot(-1)+6+c=0 \Rightarrow c=-4$;

une équation cartésienne de m_{AC} est donc $2x+y-4=0$.

Les trois médiatrices sont donc: $m_{AB}: x-7y-17=0$

$m_{BC}: x+3y+3=0$

$m_{AC}: 2x+y-4=0.$

On va chercher l'intersection de m_{AB} et m_{BC} et vérifier que ce point appartient à m_{AC}.

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}: x-7y-17=0 \xrightarrow{\cdot 3} 3x-21y-51=0 \\ m_{BC}: x+3y+3=0 \xrightarrow{\cdot 7} 7x+21y+21=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 10x-30=0 \Rightarrow x=3$$

Avec $x=3$, on a $7y=x-17=3-17=-14 \Rightarrow y=-2.$

Avec $x=3$ et $y=-2$, on a: $2x+y-4=2\cdot 3+(-2)-4=6-2-4=0.$

Ainsi l'intersection des 3 médiatrices est $K(3;-2)$.

Donc le <u>centre du cercle circonscrit au triangle ABC est $K(3;-2)$</u>.

Le rayon r du cercle circonscrit est donné par $\|\overrightarrow{KA}\|$, qui doit être égal à $\|\overrightarrow{KB}\|$ et $\|\overrightarrow{KC}\|$. On a:

$\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$; $\|\overrightarrow{KA}\|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10;$

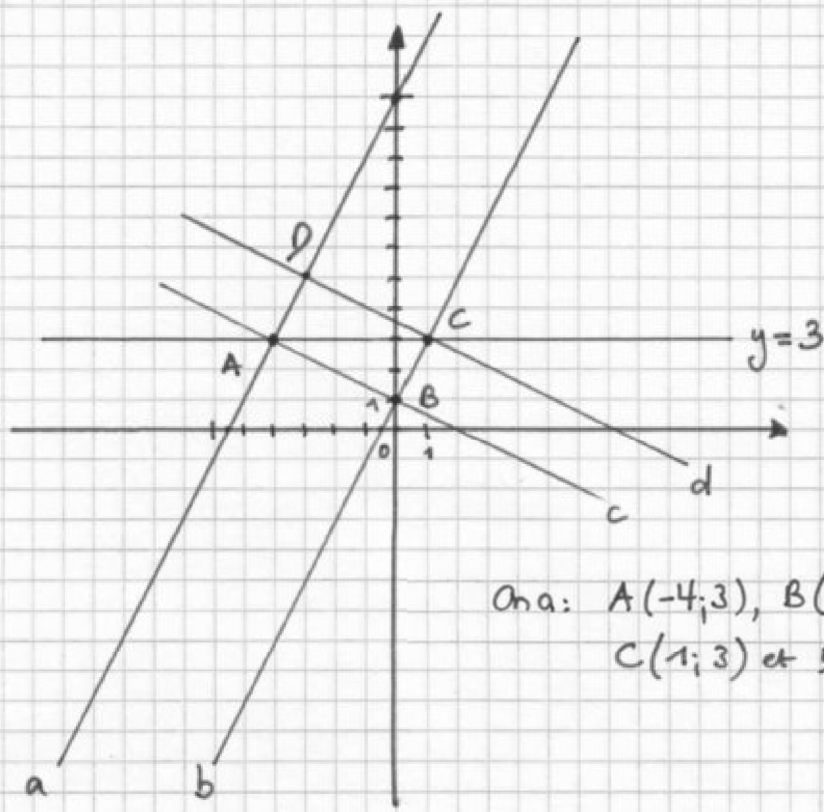
$\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}-3\\-10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$; $\|\overrightarrow{KB}\|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10;$

$\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}$; $\|\overrightarrow{KC}\|=\sqrt{0^2+10^2}=\sqrt{100}=10.$

Ainsi <u>le rayon du cercle circonscrit est $r=10$.</u>

Exercice 31

a)



On a : $A(-4;3)$, $B(0;1)$, $C(1;3)$ et $D(-3;5)$.

a et b sont parallèles (ils ont les 2 le même vecteur orthogonal, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$).

Le point A est l'intersection de a et $y=3$: on a donc $2x = y-11 = 3-11 = -8$
$\Rightarrow x = -4$. Donc $\underline{\underline{A(-4;3)}}$.

Le point C est l'intersection de b et $y=3$: on a donc $2x = y-1 = 3-1 = 2$
$\Rightarrow x = 1$. Donc $\underline{\underline{C(1;3)}}$.

Le point B est l'intersection de b et c, c étant la droite perpendiculaire à a passant par A.
Le vecteur $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à a. Il est donc parallèle à c. On en déduit que le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal à c et que l'équation cartésienne de cette dernière est $x+2y+c=0$.
Avec $A(-4;3)$, on trouve $-4+2\cdot3+c=0 \Rightarrow 2+c=0 \Rightarrow c=-2$.
L'équation cartésienne de c est donc : $x+2y-2=0$.
Cherchons l'intersection de b et c :

$$\left.\begin{array}{l} b: 2x-y+1=0 \xrightarrow{\cdot 2} 4x-2y+2=0 \\ c: x+2y-2=0 \xrightarrow{\cdot 1} x+2y-2=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 5x=0 \Rightarrow x=0.$$

Avec $x=0$, on a $-y+1=0 \Rightarrow y=1$.
Ainsi $\underline{\underline{B(0;1)}}$.

Le point D est donné par : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} =$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$ Donc $\underline{\underline{D(-3;5)}}$.

b) L'aire du rectangle est donné, par exemple, par $\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|$.

On a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

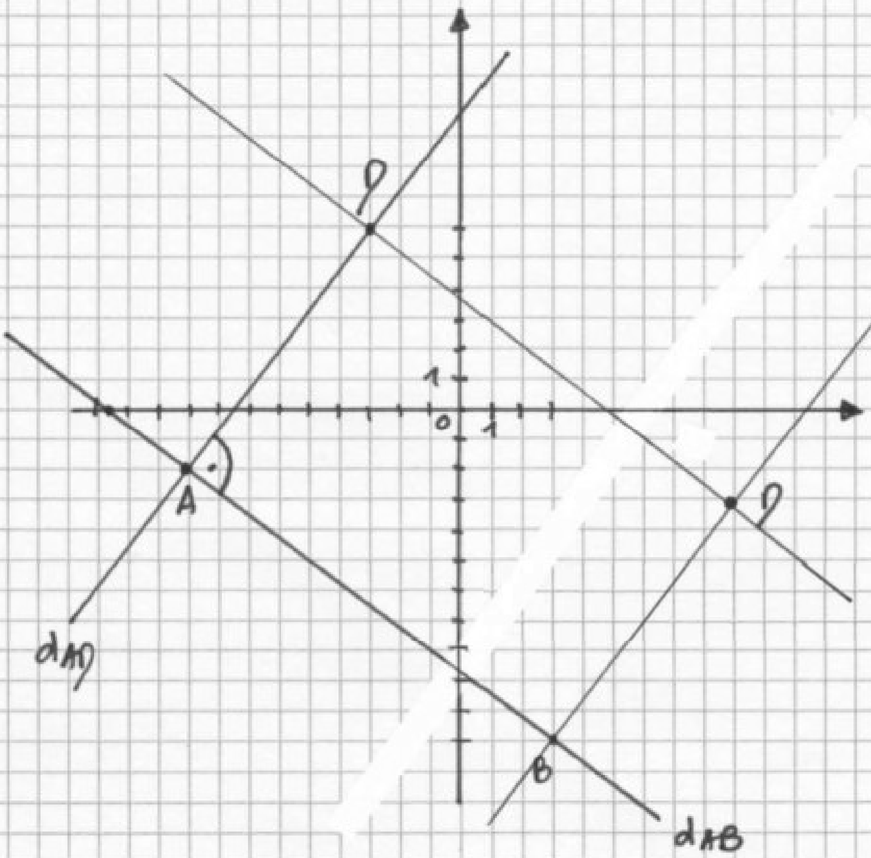
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$;

$\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 5 = 10.$

Ainsi l'aire du rectangle vaut $\underline{\underline{10.}}$

Exercice 32



Un vecteur orthogonal à la droite d_{AB} : $3x+4y+35=0$ est $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.
C'est donc un vecteur parallèle à la droite d_{AD} (puisque $AD \perp AB$).
Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite d_{AD}.
L'équation cartésienne de la droite d_{AD} est donc : $4x-3y+c=0$.
La droite d_{AD} passe par $D(-3;6)$.
On a donc : $4\cdot(-3)-3\cdot 6+c=0 \Rightarrow -12-18+c=0 \Rightarrow -30+c=0 \Rightarrow c=30$.
L'équation cartésienne de d_{AD} est donc : $4x-3y+30=0$.
A est l'intersection de d_{AB} et d_{AD} :

$$\left.\begin{array}{l} d_{AB}: 3x+4y+35=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+12y+105=0 \\ d_{AD}: 4x-3y+30=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x-12y+120=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x+225=0$$

$$\Rightarrow 25x=-225 \Rightarrow x=-9.$$

Avec $x=-9$, on a $4y=-3x-35=-3\cdot(-9)-35=27-35=-8 \Rightarrow y=-2$.
Ainsi $\underline{A=(-9;-2)}$.

La longueur du côté AD est $\|\overrightarrow{AD}\|$. On a :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix};$$

ainsi $\|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

Comme l'aire du rectangle (qui vaut 150) est $\|\overrightarrow{AD}\|\cdot\|\overrightarrow{AB}\|$, on trouve :
$10\cdot\|\overrightarrow{AB}\|=150 \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\|=15$.

Posons $B(x;y)$. On doit avoir $B \in d_{AB}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = 15$.

$B \in d_{AB} \implies 3x + 4y + 35 = 0$ ①.

$\|\overrightarrow{AB}\| = 15$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+9 \\ y+2 \end{pmatrix}$;

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x+9)^2 + (y+2)^2} = 15 \implies (x+9)^2 + (y+2)^2 = 225 \quad ②.$$

On doit donc résoudre le système d'équations suivants :

① $3x + 4y + 35 = 0$

② $(x+9)^2 + (y+2)^2 = 225$

De ①, on tire $4y = -3x - 35 \implies y = -\frac{3}{4}x - \frac{35}{4}$.

Par substitution dans ②, on trouve :

$(x+9)^2 + \left(-\frac{3}{4}x - \frac{35}{4} + 2\right)^2 = 225$	calculs
$(x+9)^2 + \left(-\frac{3}{4}x - \frac{27}{4}\right)^2 = 225$	identités remarquables
$x^2 + 18x + 81 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{81}{8}x + \frac{729}{16} = 225$	$\cdot 16$
$16x^2 + 288x + 1296 + 9x^2 + 162x + 729 = 3600$	réduction
$25x^2 + 450x + 2025 = 3600$	-3600
$25x^2 + 450x - 1575 = 0$	$:25$
$x^2 + 18x - 63 = 0$	

qui est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 18$ et $c = -63$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-63) = 324 + 252 = 576$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{576} = 24$;

ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18+24}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18-24}{2 \cdot 1} = \frac{-42}{2} = -21$.

Avec $x_1 = 3$, on a $y_1 = -\frac{3}{4}x_1 - \frac{35}{4} = -\frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{35}{4} = -\frac{9}{4} - \frac{35}{4} = -\frac{44}{4} = -11$.

Avec $x_2 = -21$, on a $y_2 = -\frac{3}{4} \cdot (-21) - \frac{35}{4} = \frac{63}{4} - \frac{35}{4} = \frac{28}{4} = 7$.

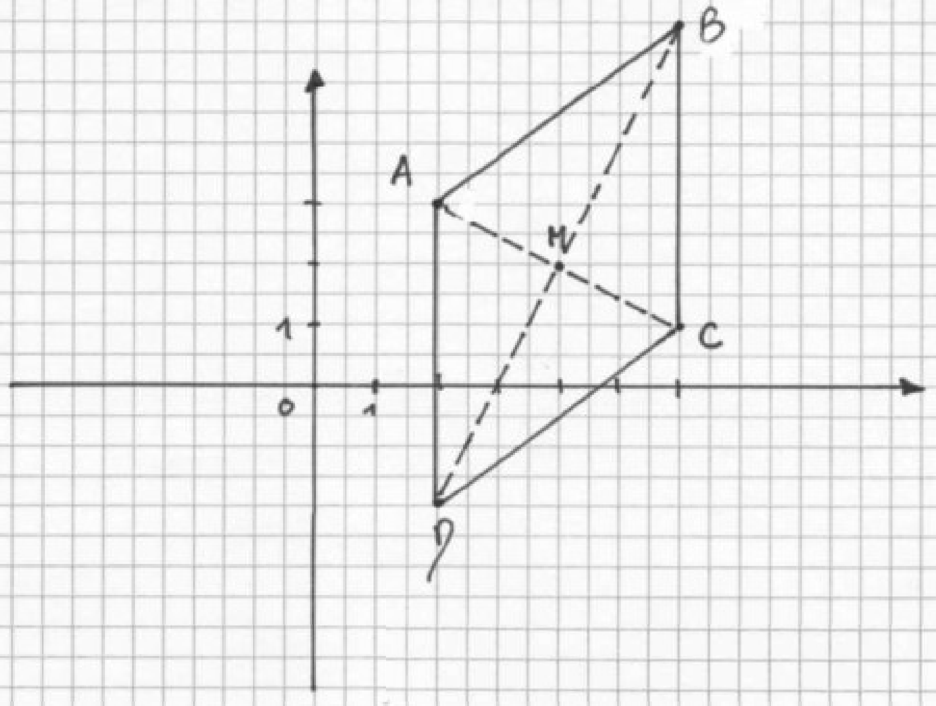
On a donc 2 solutions pour B : soit $B(3;-11)$, soit $B(-21;7)$.

Or, on veut que l'ordonnée de B soit négative. On a donc $\underline{\underline{B(3;-11)}}$.

On a : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\underline{\underline{C(9;-3)}}$.

Exercice 33



On a: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA} =$

$= 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = 2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}.$

Donc $\underline{C(6;1)}$.

L'aire d'un losange est $\dfrac{\text{pte diag. gde diag}}{2}$.

Ici une des diagonales est $\|\overrightarrow{AC}\|$.

On a: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

L'autre diagonale est $\|\overrightarrow{BD}\|$.

L'aire doit valoir 20.

Ainsi $\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\|}{2} = 20 \Longrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\| = 40 \Longrightarrow 2\sqrt{5}\,\|\overrightarrow{BD}\| = 40$

$\Longrightarrow \|\overrightarrow{BD}\| = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = \dfrac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}.$

On en déduit que $\|\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MD}\| = 2\sqrt{5}$.

Un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$ est $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (puisque $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$).

Un vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

Ainsi, on va avoir: $\overrightarrow{MB} = 2\sqrt{5}\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{MD} = -2\sqrt{5}\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}.$

On a ainsi:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{B(6;6)}} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{D(2;-2)}}.$$

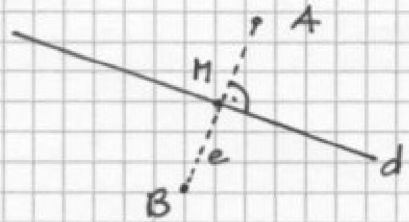
Exercice 34

La plus courte distance entre un point $P(x_0\,;y_0)$ et une droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $d(P;d)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

a) Ici $x_0=2$, $y_0=6$, $a=3$, $b=5$ et $c=-2$.

Ainsi $d(A;d)=\dfrac{|3\cdot2+5\cdot6-2|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\dfrac{|6+30-2|}{\sqrt{9+25}}=\dfrac{34}{\sqrt{34}}=\underline{\underline{\sqrt{34}}}.$

b)



Cherchons l'équation de la droite e passant par A et perpendiculaire à d.

Un vecteur orthogonal à d est $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

Un vecteur orthogonal à e (et parallèle à d) est $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

Ainsi une équation cartésienne de e est $5x-3y+c=0$.

Avec $A(2;6)$, on a : $5\cdot2-3\cdot6+c=0 \Rightarrow 10-18+c=0 \Rightarrow -8+c=0 \Rightarrow c=8$.

Donc l'équation cartésienne de e est $5x-3y+8=0$.

M est l'intersection de d et e, donc la solution du système :

$$\left.\begin{cases}3x+5y-2=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+15y-6=0\\ 5x-3y+8=0 \xrightarrow{\cdot 5} 25x-15y+40=0\end{cases}\right\} \xrightarrow{+} 34x+34=0 \Rightarrow x=-1.$$

Avec $x=-1$, on a $5y=-3x+2=3+2=5 \Rightarrow y=1$.

Ainsi $M(-1;1)$.

(On peut vérifier que $\|\overrightarrow{MA}\|=\sqrt{34}$: $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{MA}\|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$).

B est le symétrique de A par rapport à d.

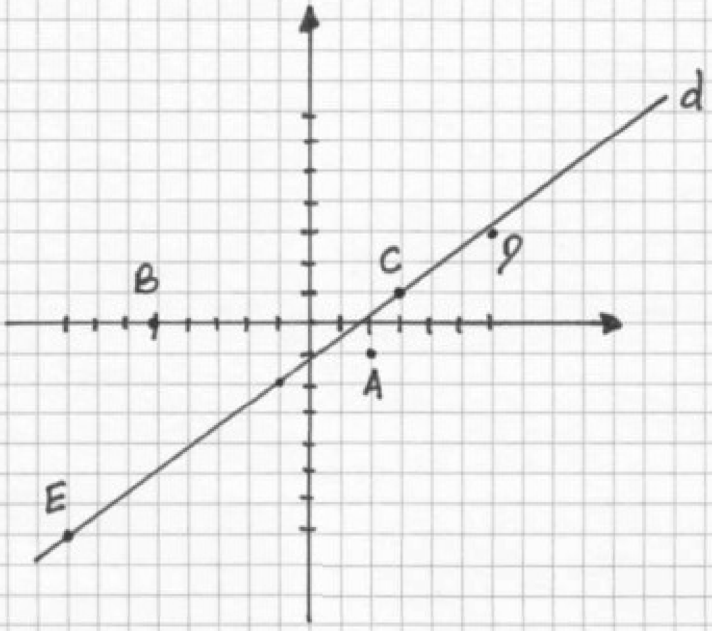
On a donc $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})=$

$=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}.$

Donc $\underline{\underline{B(-4;-4)}}$.

Exercice 35

a)



b) La plus courte distance entre un point $P(x_0;y_0)$ et une droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $d(P;d)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Point A: $d(A;d)=\frac{|3.2-4.(-1)-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|6+8-5|}{\sqrt{9+16}}=\frac{9}{\sqrt{25}}=\frac{9}{5}$.

Point B: $d(B;d)=\frac{|3.(-5)-4.0-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-15-5|}{5}=\frac{|-20|}{5}=\frac{20}{5}=4.$

Point C: $d(C;d)=\frac{|3.3-4.1-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|9-4-5|}{5}=\frac{0}{5}=0.$

Point D: $d(D;d)=\frac{|3.6-4.3-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|18-12-5|}{5}=\frac{1}{5}$.

Point E: $d(E;d)=\frac{|3.(-8)-4.(-7)-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-24+28-5|}{5}=\frac{|-1|}{5}=\frac{1}{5}$.

c) Les points dans la même région que A sont les $(x_0;y_0)$ tels que $3x_0-4y_0-5>0$ (puisque, pour A, $3x_0-4y_0-5>0$).

Ainsi D est dans la même région que A.

Par conséquent, les points $(x_0;y_0)$ tels que $3x_0-4y_0-5>0$ sont du même côté, les points $(x_0;y_0)$ tels que $3x_0-4y_0-5<0$ sont de l'autre côté et les points $(x_0;y_0)$ tels que $3x_0-4y_0-5=0$ sont sur la droite.

Exercice 36

a) Cherchons l'équation cartésienne de a.

a passe par $A(1;4)$ et est parallèle à $15\vec{u_1} - 8\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$.

a est donc perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne de a est donc $8x + 15y + c = 0$.

Avec $A(1;4)$, on a : $8 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow 8 + 60 + c = 0 \Rightarrow c = -68$.

Ainsi l'équation cartésienne de a est $8x + 15y - 68 = 0$.

La distance de l'origine $(0;0)$ à a est donc $\dfrac{|8 \cdot 0 + 15 \cdot 0 - 68|}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = \dfrac{68}{17} = \underline{4}$.

b) La distance de l'origine $(0;0)$ à b est $\dfrac{|0 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}707}$.

c) Cherchons l'équation cartésienne de c.

c passe par $B(4;-11)$ et est parallèle à $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$.

c est donc perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne de c est donc $24x + 7y + c = 0$.

Avec $B(4;-11)$, on a : $24 \cdot 4 + 7 \cdot (-11) + c = 0 \Rightarrow 96 - 77 + c = 0 \Rightarrow 19 + c = 0 \Rightarrow c = -19$.

Ainsi l'équation cartésienne de c est $24x + 7y - 19 = 0$.

La distance de l'origine $(0;0)$ à c est $\dfrac{|24 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 19|}{\sqrt{24^2 + 7^2}} = \underline{\dfrac{19}{25}}$.

Exercice 37

L'équation cartésienne des droites parallèles sont $ax+by+c=0$.
Elles doivent être parallèles au vecteur $3\vec{u_1}-4\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Elles sont donc perpendiculaires à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ainsi $a=4$ et $b=3$.
L'équation cartésienne des droites parallèles sont $4x+3y+c=0$.
Leur distance au point $A(-6;2)$ doit valoir 6.
On doit donc avoir $\frac{|4.(-6)+3.2+c|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Rightarrow \frac{|-24+6+c|}{5} = 6$

$\Rightarrow |-18+c| = 30$.

On a alors soit $-18+c=30$ ①, soit $-18+c=-30$ ②.

① $\Rightarrow c=48$.

② $\Rightarrow c=-12$.

Les équations cartésiennes des droites parallèles sont donc:

$$\underline{4x+3y+48=0 \quad \text{et} \quad 4x+3y-12=0.}$$

Exercice 38

On remarque tout d'abord que les 2 droites sont parallèles (a est orthogonal à $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et b aussi).

La plus courte distance de a et b est la distance de A à b, où $A \in a$.

Cherchons donc un point $A \in b$.

Si $x = -1$, on a $3\cdot(-1) + 4y - 13 = 0 \Rightarrow -3 + 4y - 13 = 0 \Rightarrow 4y - 16 = 0$
$\Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4.$

On peut donc prendre $A(-1;4)$.

La distance de $A(-1;4)$ à $b: 3x + 4y - 3 = 0$ est $\dfrac{|3\cdot(-1) + 4\cdot 4 - 3|}{\sqrt{3^2+4^2}} =$

$$= \frac{|-3+16-3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2.$$

La distance la plus courte entre a et b est donc $\underline{\underline{2}}$.

Exercice 39

Les droites à distance 3 de d sont parallèles à d.

Comme d : $7x-24y-8=0$, les équations de ces droites parallèles sont : $7x-24y+c=0$.

On devra avoir que la distance de $A \in d$ à ces droites parallèles vaut 3.

Cherchons un point A de d : si $x=8$, on a $7.8-24y-8=0 \Rightarrow 56-24y-8=0$

$\Rightarrow 48-24y=0 \Rightarrow 24y=48 \Rightarrow y=2$.

On peut donc prendre $A(8;2)$.

La distance de A aux droites parallèles est $\dfrac{|7.8-24.2+c|}{\sqrt{7^2+(-24)^2}} = \dfrac{|56-48+c|}{\sqrt{49+576}} =$

$$= \frac{|8+c|}{\sqrt{625}} = \frac{|8+c|}{25}.$$

On doit donc avoir $\dfrac{|8+c|}{25} = 3 \Rightarrow |8+c| = 75$.

On a alors soit $8+c=75$ (1), soit $8+c=-75$ (2).

(1) $\Rightarrow c=67$.

(2) $\Rightarrow c=-83$.

Les équations des droites parallèles cherchées sont donc :

$$\underline{\underline{7x-24y+67=0 \quad \text{et} \quad 7x-24y-83=0.}}$$

Exercice 40

Une bissectrice d'un angle est l'ensemble des points à la même distance des côtés de l'angle.
Ainsi les bissectrices des droites a et b sont les points $P(x;y)$ tels que :
$\text{dist}(P;a) = \text{dist}(P;b)$.

On doit donc avoir $\dfrac{|x-3y+8|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \dfrac{|3x-y-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} \Longrightarrow \dfrac{|x-3y+8|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|3x-y-1|}{\sqrt{10}}$

$\Longrightarrow |x-3y+8| = |3x-y-1|$

On a alors soit $x-3y+8 = 3x-y-1$ ①, soit $x-3y+8 = -(3x-y-1)$ ②.

① $\Longrightarrow 2x+2y-9=0$

② $\Longrightarrow x-3y+8 = -3x+y+1 \Longrightarrow 4x-4y+7=0$.

Les équations des bissectrices de a et b sont donc :

$$2x+2y-9=0 \text{ et } 4x-4y+7=0.$$

Exercice 41

$a : 5x+2y-3=0$ et $b : 5x+2y-9=0$.

On cherche l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que $d(P;a)=d(P;b)$.

On a: $d(P;a) = \dfrac{|5x+2y-3|}{\sqrt{5^2+2^2}} = \dfrac{|5x+2y-3|}{\sqrt{29}}$ et $d(P;b) = \dfrac{|5x+2y-9|}{\sqrt{5^2+2^2}} = \dfrac{|5x+2y-9|}{\sqrt{29}}$.

Ainsi $\dfrac{|5x+2y-3|}{\sqrt{29}} = \dfrac{|5x+2y-9|}{\sqrt{29}} \Rightarrow |5x+2y-3| = |5x+2y-9|$.

Donc, soit $5x+2y-3 = 5x+2y-9$ (1),

soit $5x+2y-3 = -(5x+2y-9)$ (2).

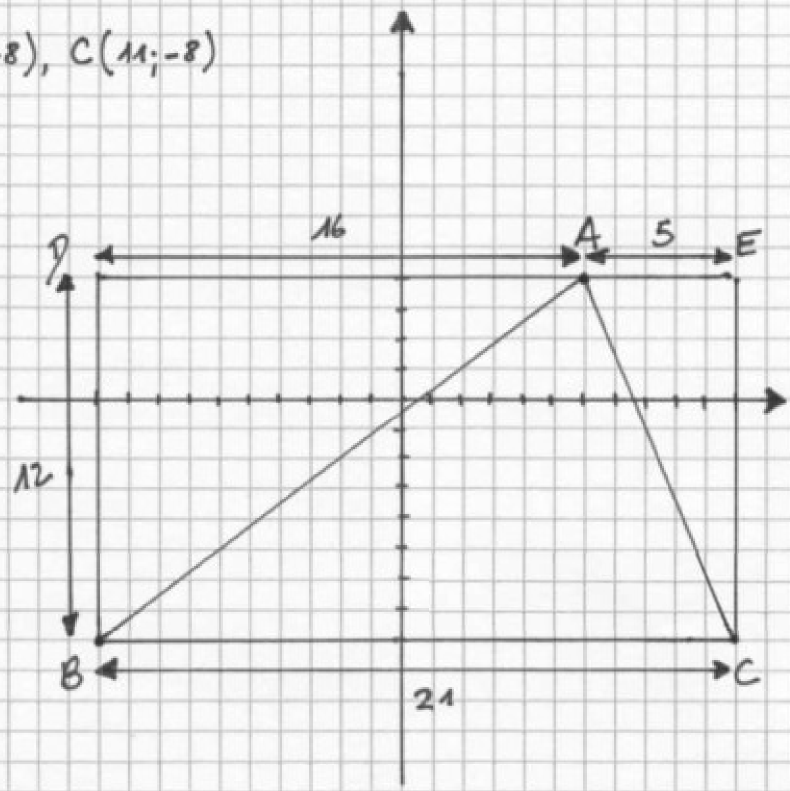
(1) $\Rightarrow -3=-9$ ce qui est exclu.

(2) $\Rightarrow 5x+2y-3 = -5x-2y+9 \Rightarrow 10x+4y-12=0 \Rightarrow 5x+2y-6=0$.

C'est donc la droite $\underline{\underline{5x+2y-6=0}}$.

Exercice 42

$A(6;4)$, $B(-10;-8)$, $C(11;-8)$



On a : aire ABC = aire $BCED$ − aire ACE − aire ABD =

$$= 12\cdot 21 - \frac{5\cdot 12}{2} - \frac{16\cdot 12}{2} = 252 - 30 - 96 = \underline{\underline{126.}}$$

La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points à égale distance des 2 côtés de l'angle.
Commençons par chercher les équations des droites cartésiennes des droites passant par A et B (d_{AB}), par B et C (d_{BC}) et par A et C (d_{AC}).

d_{AB}: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-10\\-8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\-12\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$;

ainsi : $3x - 4y + c = 0$;

avec $A(6;4)$: $3\cdot 6 - 4\cdot 4 + c = 0 \Rightarrow 18 - 16 + c = 0 \Rightarrow 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$;

$\Rightarrow d_{AB}: 3x - 4y - 2 = 0.$

d_{BC}: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-10\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\0\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$;

ainsi : $y + c = 0$;

avec $B(-10;-8)$: $-8 + c = 0 \Rightarrow c = 8$;

$\Rightarrow d_{BC}: y + 8 = 0.$

d_{AC}: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$;

ainsi : $12x + 5y + c = 0$;

avec $A(6;4)$: $12\cdot 6 + 5\cdot 4 + c = 0 \Rightarrow 72 + 20 + c = 0 \Rightarrow c = -92$;

$\Rightarrow d_{AC}: 12x + 5y - 92 = 0.$

Les bissectrices b_A de l'angle $\widehat{BAC}$ est l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que
$d(P; d_{AB}) = d(P; d_{AC})$.

Ainsi : $\dfrac{|3x-4y-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{|12x+5y-92|}{\sqrt{12^2+5^2}} \Rightarrow \dfrac{|3x-4y-2|}{5} = \dfrac{|12x+5y-92|}{13}$.

Donc, soit $\dfrac{3x-4y-2}{5} = \dfrac{12x+5y-92}{13}$ ①,

soit $\dfrac{3x-4y-2}{5} = -\dfrac{12x+5y-92}{13}$ ②.

① $\Rightarrow 39x-52y-26 = 60x+25y-460 \Rightarrow 21x+77y-434=0$.

② $\Rightarrow 39x-52y-26 = -60x-25y+460 \Rightarrow 99x-27y-486=0 \Rightarrow 33x-9y-162=0$

$\Rightarrow 11x-3y-54=0$

Cherchons où ces bissectrices coupent la droite $d_{BC} : y+8=0$.

$y+8=0 \Rightarrow y=-8$.

Dans $21x+77y-434=0$: $21x+77\cdot(-8)-434=0 \Rightarrow 21x-616-434=0 \Rightarrow 21x=1050$

$\Rightarrow x=50$;

cela nous donne le point $(50;-8)$; mais il n'appartient pas au segment BC ; c'est donc la bissectrice extérieure au triangle.

Dans $11x-3y-54=0$: $11x-3\cdot(-8)-54=0 \Rightarrow 11x+24-54=0 \Rightarrow 11x-30=0$

$\Rightarrow 11x=30 \Rightarrow x=\dfrac{30}{11}$;

cela nous donne le point $\left(\dfrac{30}{11};-8\right)$; il appartient au segment BC.

Par conséquent, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est $\underline{\underline{b_A : 11x-3y-54=0}}$.

La bissectrice b_B de l'angle $\widehat{ABC}$ est l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que

$d(P; d_{AB}) = d(P; d_{BC})$.

Ainsi : $\dfrac{|3x-4y-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{|y+8|}{\sqrt{1^2}} \Rightarrow \dfrac{|3x-4y-2|}{5} = |y+8|$.

Donc soit $\dfrac{3x-4y-2}{5} = y+8$ ①,

soit $\dfrac{3x-4y-2}{5} = -(y+8)$ ②.

① $\Rightarrow 3x-4y-2 = 5y+40 \Rightarrow 3x-9y-42=0 \Rightarrow x-3y-14=0$.

② $\Rightarrow 3x-4y-2 = -5y-40 \Rightarrow 3x+y+38=0$.

Cherchons où ces bissectrices coupent la droite $d_{AC} : 12x+5y-92=0$

Avec $x-3y-14=0$:
$$\left.\begin{aligned} x-3y-14=0 &\xrightarrow{\cdot 5} 5x-15y-70=0 \\ 12x+5y-92=0 &\xrightarrow{\cdot 3} 36x+15y-276=0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} 41x-346=0$$

$\Rightarrow x=\dfrac{346}{41} \cong 8,44$;

avec $x=\dfrac{346}{41}$: $3y = x-14 = \dfrac{346}{41}-14 = -\dfrac{228}{41} \Rightarrow y=-\dfrac{76}{41} \cong -1,85$;

cela nous donne le point $\left(\dfrac{346}{41};-\dfrac{76}{41}\right) \cong (8,44;-1,85)$ qui appartient bien au segment AC.

Par conséquent la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ est $\underline{\underline{b_B : x-3y-14=0.}}$

La bissectrice b_C de l'angle $\widehat{ACB}$ est l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que
$d(P; d_{AC}) = d(P; d_{BC})$.

Ainsi : $\dfrac{|12x+5y-92|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \dfrac{|y+8|}{\sqrt{1^2}} \Rightarrow \dfrac{|12x+5y-92|}{13} = |y+8|$.

Donc, soit $\dfrac{12x+5y-92}{13} = y+8$ ①,

soit $\dfrac{12x+5y-92}{13} = -(y+8)$ ②.

① $\Rightarrow 12x+5y-92 = 13y+104 \Rightarrow 12x-8y-196=0 \Rightarrow 3x-2y-49=0$.

② $\Rightarrow 12x+5y-92 = -13y-104 \Rightarrow 12x+18y+12=0 \Rightarrow 2x+3y+2=0$.

Cherchons où ces bissectrices coupent la droite $d_{AB} : 3x-4y-2=0$.

Avec $3x-2y-49=0$: $\left.\begin{array}{l} 3x-2y-49=0 \\ 3x-4y-2=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 2y-47=0 \Rightarrow 2y=47 \Rightarrow y=\frac{47}{2}$;

avec $y=\frac{47}{2}$, $3x = 2y+49 = 2\,\frac{47}{2}+49 = 47+49 = 96$;

cela nous donne le point $(96; -\frac{47}{2})$; mais il n'appartient pas au segment AB ; c'est donc la bissectrice extérieure au triangle.

Avec $2x+3y+2=0$: $\left.\begin{array}{l} 2x+3y+2=0 \xrightarrow{\cdot 4} 8x+12y+8=0 \\ 3x-4y-2=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x-12y-6=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 17x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{17}$;

avec $x=-\frac{2}{17}$, $3y = -2x-2 = -2\left(-\frac{2}{17}\right)-2 = \frac{4}{17}-2 = -\frac{30}{17} \Rightarrow y = \frac{-10}{17}$;

cela nous donne le point $\left(-\frac{2}{17}; -\frac{10}{17}\right)$; il appartient au segment AB.

Par conséquent, la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ est $\underline{\underline{b_C : 2x+3y+2=0.}}$

Le centre du cercle inscrit est donné par l'intersection des 3 bissectrices.

Les bissectrices sont : $b_A : 11x-3y-54=0$,

$b_B : x-3y-14=0$,

$b_C : 2x+3y+2=0$.

Cherchons l'intersection de b_A et b_B et vérifions qu'elle appartient à b_C :

$\left.\begin{array}{l} b_A : 11x-3y-54=0 \\ b_B : x-3y-14=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 10x-40=0 \Rightarrow x=4$;

avec $x=4$, $3y = x-14 = 4-14 = -10 \Rightarrow y = -\frac{10}{3}$;

on obtient donc le point $(4; \frac{-10}{3})$;

en le substituant dans b_C, on a $2\cdot 4 + 3\cdot\left(\frac{-10}{3}\right) + 2 = 8-10+2 = 0$.

Ainsi le $\underline{\underline{\text{centre du cercle inscrit est } \left(4; -\frac{10}{3}\right).}}$

Le rayon r du cercle inscrit est donné par $r = d(K; d_{AB}) = d(K; d_{BC}) =$
$= d(K; d_{AC})$ où $K\left(4; -\frac{10}{3}\right)$ est le centre du cercle inscrit.

On a : $d(K; d_{AB}) = \dfrac{\left|3\cdot 4 - 4\cdot\left(-\frac{10}{3}\right) - 2\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{\left|12 + \frac{40}{3} - 2\right|}{5} = \frac{1}{5}\left(10 + \frac{40}{3}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{70}{3} = \frac{14}{3}$;

$d(K; d_{BC}) = \dfrac{\left|-\frac{10}{3} + 8\right|}{\sqrt{1^2}} = -\frac{10}{3} + 8 = \frac{14}{3}$;

$d(K; d_{AC}) = \dfrac{\left|12\cdot 4 + 5\left(-\frac{10}{3}\right) - 92\right|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \dfrac{\left|48 - \frac{50}{3} - 92\right|}{13} = \frac{1}{13}\left|-44 - \frac{50}{3}\right| = \frac{1}{13}\left|-\frac{182}{3}\right| =$

$= \frac{1}{13}\cdot\frac{182}{3} = \frac{14}{3}$.

Le rayon du cercle inscrit est donc $\frac{14}{3}$.

Exercice 43

L'équation d'un cercle donné par $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ est un cercle de centre $(x_0;y_0)$ et de rayon r.

a) C_1 : $x^2+y^2-14x-2y-1246=0$;

on a : $x^2-14x+49=(x-7)^2 \Rightarrow x^2-14x=(x-7)^2-49$;

$y^2-2y+1=(y-1)^2 \Rightarrow y^2-2y=(y-1)^2-1$;

ainsi, on trouve : $(x-7)^2-49+(y-1)^2-1-1246=0$

$\Rightarrow (x-7)^2+(y-1)^2-1296=0$

$\Rightarrow (x-7)^2+(y-1)^2=36^2$;

donc le centre est $(7;1)$ et le rayon est 36.

b) C_2 : $x^2+y^2+10x+14y+25=0$;

on a : $x^2+10x+25=(x+5)^2 \Rightarrow x^2+10x=(x+5)^2-25$;

$y^2+14y+49=(y+7)^2 \Rightarrow y^2+14y=(y+7)^2-49$;

ainsi, on trouve : $(x+5)^2-25+(y+7)^2-49+25=0$

$\Rightarrow (x+5)^2+(y+7)^2-49=0$

$\Rightarrow (x+5)^2+(y+7)^2=7^2$;

donc le centre est $(-5;-7)$ et le rayon est 7.

c) C_3 : $x^2+y^2+5x-3y+8=0$;

on a : $x^2+5x+\frac{25}{4}=(x+\frac{5}{2})^2 \Rightarrow x^2+5x=(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$;

$y^2-3y+\frac{9}{4}=(y-\frac{3}{2})^2 \Rightarrow y^2-3y=(y-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$;

ainsi, on trouve : $(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+(y-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+8=0$

$\Rightarrow (x+\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

donc le centre est $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ et le rayon est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) C_4 : $3x^2+3y^2+7x-10 \Rightarrow x^2+y^2+\frac{7}{3}x-\frac{10}{3}=0$;

on a : $x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}=(x+\frac{7}{6})^2 \Rightarrow x^2+\frac{7}{3}x=(x+\frac{7}{6})^2-\frac{49}{36}$;

ainsi, on trouve : $(x+\frac{7}{6})^2-\frac{49}{36}+y^2-\frac{10}{3}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{7}{6})^2+y^2-\frac{169}{36}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{7}{6})^2+y^2=\left(\frac{13}{6}\right)^2$;

donc le centre est $\left(-\frac{7}{6};0\right)$ et le rayon est $\frac{13}{6}$.

Exercice 44

L'équation réduite d'un cercle est de la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, où $(x_0;y_0)$ est le centre du cercle et r son rayon.

C_1 : on a $x_0=3$ et $y_0=-4$;
si C_1 est tangent à l'axe des ordonnées, c'est ce que son rayon est la distance du centre à l'axe y : on a donc $r=3$;
donc $\underline{(x-3)^2+(y+4)^2=9.}$

C_2 : on a $x_0=0$ et $y_0=0$;
si C_2 passe par $A(12;6)$, on a $r=\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{144+36}=\sqrt{180}$;
donc $\underline{x^2+y^2=180.}$

C_3 : on a $x_0=2$ et $y_0=3$;
si C_3 est tangent à la droite $d: 2x-y+4=0$, on a $r=\text{dist}(M;d)=$
$$=\frac{|2\cdot 2-3+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5};$$
donc $\underline{(x-2)^2+(y-3)^2=5.}$

C_4 : si C_4 est situé dans le deuxième quadrant, on a $x_0<0$ et $y_0>0$;
on a $r=5$;
si C_4 est tangent aux axes de référence, on a alors $x_0=-5$ et $y_0=5$;
donc $\underline{(x+5)^2+(y-5)^2=25.}$

C_5 et C_6 : leurs centres sont sur $c: x+y-63=0$; on a donc $x_0+y_0-63=0$;
si C_5 et C_6 sont tangents à a et b, on a $\text{dist}(K;a)=\text{dist}(K;b)$, où $K(x_0;y_0)$:
$$\frac{|4x_0+3y_0|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|12x_0-5y_0|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} \Longrightarrow \frac{|4x_0+3y_0|}{5}=\frac{|12x_0-5y_0|}{13};$$
ainsi, soit $\dfrac{4x_0+3y_0}{5}=\dfrac{12x_0-5y_0}{13}$ ①,

soit $\dfrac{4x_0+3y_0}{5}=-\dfrac{12x_0-5y_0}{13}$ ② ;

① $\Rightarrow 52x_0+39y_0=60x_0-25y_0 \Rightarrow -8x_0=-64y_0 \Rightarrow x_0=8y_0$;
avec $x_0+y_0-63=0$, on trouve : $8y_0+y_0-63=0 \Rightarrow 9y_0=63 \Rightarrow y_0=7$;
avec $x_0=8y_0$, on obtient : $x_0=8\cdot 7=56$;
② $\Rightarrow 52x_0+39y_0=-60x_0+25y_0 \Rightarrow 112x_0=-14y_0 \Rightarrow -8x_0=y_0$;
avec $x_0+y_0-63=0$, on trouve : $x_0-8y_0-63=0 \Rightarrow -7y_0=63 \Rightarrow y_0=-9$;
avec $y_0=-8x_0$, on obtient $x_0=-8\cdot(-9)=72$;

On a ainsi 2 centres : $(56;7)$ et $(72;-9)$.

Les rayons sont alors :

$(56;7) \Rightarrow r = \text{dist}((56;7);a) = \text{dist}((56;7);b)$;

$$\text{dist}((56;7);a) = \frac{|4\cdot 56 + 3\cdot 7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{224+21}{5} = \frac{245}{5} = 49;$$

$$\text{dist}((56;7);b) = \frac{|12\cdot 56 - 5\cdot 7|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = \frac{672-35}{13} = \frac{637}{13} = 49.$$

Ainsi, on a : $c_5 : (x-56)^2 + (y-7)^2 = 2401$

et $c_6 : (x-72)^2 + (y+9)^2 = 2401.$

c_7 : le centre est sur l'axe des ordonnées $\Rightarrow$ on a $x_0 = 0$;

le cercle passe par les points $A(4;2)$ et $B(-6;-2)$ $\Rightarrow$ le centre est sur la médiatrice m du segment AB ;

m est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et passe par le milieu du segment AB : $M = \left(\frac{4+(-6)}{2};\frac{2+(-2)}{2}\right) = (-1;0)$;

l'équation cartésienne de m est : $5x + 2y + c = 0$;

avec $M(-1;0)$, on trouve $5\cdot(-1) + c = 0 \Rightarrow c = 5$;

ainsi $m : 5x + 2y + 5 = 0$;

avec $x_0 = 0$, on trouve $5\cdot 0 + 2y_0 + 5 = 0 \Rightarrow 2y_0 = -5 \Rightarrow y_0 = -\frac{5}{2}$;

par conséquent, le centre est $K\left(0;-\frac{5}{2}\right)$;

le rayon est alors donné par $r = \|\overrightarrow{AK}\| = \|\overrightarrow{BK}\|$;

on a : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\-5/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-9/2\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AK}\| = \sqrt{(-4)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{145}{4}}$;

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}0\\-5/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-1/2\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{BK}\| = \sqrt{6^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{145}{4}}$;

ainsi le rayon est $r = \sqrt{\frac{145}{4}}$;

on a donc $c_7 : x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{145}{4}$.

c_8 et c_9 : ces cercles passent par $A(2;0)$ et $B(8;0)$ $\Rightarrow$ leurs centres sont sur la médiatrice m du segment AB ;

m est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et passe par le milieu du segment AB : $M = \left(\frac{2+8}{2};\frac{0+0}{2}\right) = (5;0)$;

l'équation cartésienne de m est : $x + c = 0$;

avec $M(5;0)$, on trouve $5 + c = 0 \Rightarrow c = -5$;

ainsi $m : x - 5 = 0$;

Les centres de $\mathcal{C}_8$ et $\mathcal{C}_9$ sont par conséquent de la forme $K(5;y_0)$;
comme ils doivent être tangents des ordonnées, on doit avoir $r = 5$ (première coordonnée de K);
ainsi les équations de $\mathcal{C}_8$ et $\mathcal{C}_9$ s'écrivent $(x-5)^2+(y-y_0)^2 = 5^2$;
avec $A(2;0)$, on trouve $(2-5)^2+(0-y_0)^2 = 25 \Rightarrow 9+y_0^2 = 25 \Rightarrow y_0^2 = 16$
$\Rightarrow y_0 = \pm 4$;

ainsi, on a : $\mathcal{C}_8 : \quad (x-5)^2+(y-4)^2 = 25$

et $\mathcal{C}_9 : \quad (x-5)^2+(y+4)^2 = 25.$

Exercice 45

Une tangente à un cercle au point P est perpendiculaire à $\overrightarrow{KP}$ où K est le centre du cercle.

On a : $(x+5)^2+(y-2)^2-25=0$.

Le point P est donné par $(-2;y)$.

Par substitution, on trouve $(-2+5)^2+(y-2)^2=25 \Rightarrow 9+(y-2)^2=25$

$\Rightarrow (y-2)^2=16 \Rightarrow y-2=\pm 4 \Rightarrow$ soit $y=6$, soit $y=-2$.

Les points P concernés sont donc $P_1(-2;6)$ et $P_2(-2;-2)$.

Le rayon du cercle est $\sqrt{25}=5$ et son centre est $K(-5;2)$.

En $P_1(-2;6)$: $\overrightarrow{KP_1}=\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$;

la tangente t_1 au cercle en P_1 est ainsi donnée par :

$t_1: 3x+4y+c=0$;

avec $P_1(-2;6)$, on a $3\cdot(-2)+4\cdot 6+c=0$

$\Rightarrow -6+24+c=0 \Rightarrow 18+c=0 \Rightarrow c=-18$;

on a ainsi $\underline{t_1: 3x+4y-18=0.}$

En $P_2(-2;-2)$: $\overrightarrow{KP_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$;

la tangente t_2 au cercle en P_2 est ainsi donnée par :

$t_2: 3x-4y+c=0$;

avec $P_2(-2;-2)$, on a $3\cdot(-2)-4\cdot(-2)+c=0$

$\Rightarrow -6+8+c=0 \Rightarrow 2+c=0 \Rightarrow c=-2$;

on a ainsi $\underline{t_2: 3x-4y-2=0.}$

Exercice 46

a) Le centre du cercle $c: (x-9)^2+(y+3)^2-18=0$ est $(9;-3)$.

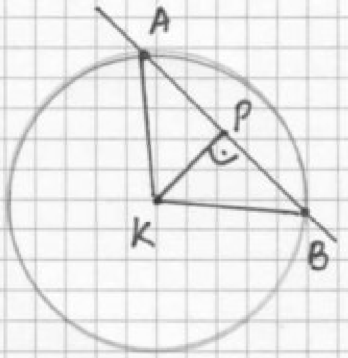
La distance du centre du cercle à la droite $d: x+y-4=0$ est donnée par:

$$\frac{|9+(-3)-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}.$$

Le rayon du cercle est $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Comme $\sqrt{2} < 3\sqrt{2}$, on conclut que <u>la droite coupe le cercle en deux points.</u>

b)



On a $KP = \sqrt{2}$ et $KB =$ rayon du cercle $= 3\sqrt{2}$.

Ainsi $BP = \sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{18-2} = \sqrt{16} = 4$.

Donc $AB = 2 \cdot BP = 2 \cdot 4 = \underline{\underline{8.}}$

Exercice 47

Les tangentes cherchées sont parallèles à $d: x-4y+10=0$.
Elles sont donc de la forme $t: x-4y+c=0$.
La distance du centre du cercle aux tangentes doit être égale au rayon.
On doit donc avoir: centre du cercle $(2;-5)$; rayon du cercle $=\sqrt{17}$;

$$\frac{|2-4.(-5)+c|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\sqrt{17} \Rightarrow \frac{|22+c|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17} \Rightarrow |22+c|=17\ ;$$

d'où: soit $22+c=17 \Rightarrow c=-5$,
soit $22+c=-17 \Rightarrow c=-39$.

Les deux tangentes sont donc: $t_1: x-4y-5=0$
$t_2: x-4y-39=0$.

Cherchons l'équation de la droite perpendiculaire à t_1 et t_2 et passant par le centre du cercle.
Un vecteur orthogonal à t_1 et t_2 est $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$. Un vecteur parallèle à t_1 et t_2 est donc $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

L'équation de la droite perpendiculaire à t_1 et t_2 est donc: $4x+y+c=0$.
Avec le centre du cercle, $(2;-5)$, on a: $4.2+(-5)+c=0 \Rightarrow 3+c=0 \Rightarrow c=-3$.
L'équation de la perpendiculaire est donc $4x+y-3=0$.

Les points de contact seront les intersections de cette perpendiculaire et de t_1 et t_2.

Avec t_1:
$$\left.\begin{array}{l} x-4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 1} x-4y-5=0 \\ 4x+y-3=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+4y-12=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 17x-17=0 \Rightarrow x=1\ ;$$
avec $x=1$, $y=-4x+3=-4+3=-1$;
donc le point de contact est $(1;-1)$.

Avec t_2:
$$\left.\begin{array}{l} x-4y-39=0 \xrightarrow{\cdot 1} x-4y-39=0 \\ 4x+y-3=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+4y-12=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 17x-51=0 \Rightarrow x=3\ ;$$
avec $x=3$, $y=-4x+3=-12+3=-9$;
donc le point de contact est $(3;-9)$.

Exercice 48

Cherchons les points d'intersection de $c: (x-4)^2+(y-3)^2-20=0$ et $d: x-3y+15=0$.

$x-3y+15=0 \Rightarrow x=3y-15$.

$\Rightarrow (3y-15-4)^2+(y-3)^2-20=0 \Rightarrow (3y-19)^2+(y-3)^2-20=0$

$\Rightarrow 9y^2-114y+361+y^2-6y+9-20=0 \Rightarrow 10y^2-120y+350=0$

$\Rightarrow y^2-12y+35=0$: $a=1$, $b=-12$, $c=35$; $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot1\cdot35=144-140=4$,

$\sqrt{\Delta}=2$; $y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{12+2}{2\cdot1}=\frac{14}{2}=7$; $y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{12-2}{2\cdot1}=\frac{10}{2}=5$.

Avec $y_1=7$, $x_1=3y_1-15=3\cdot7-15=6$.

Avec $y_2=5$, $x_2=3y_2-15=3\cdot5-15=0$.

Les points d'intersection de c et d sont donc $A(7;6)$ et $B(5;0)$.

Une tangente à un cercle est perpendiculaire au vecteur reliant le centre du cercle et le point de contact.

t_1 sera perpendiculaire à $\overrightarrow{KA}$ où $K(4;3)$ est le centre du cercle.

On a : $\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi on a : $t_1: x+y+c=0$.

Avec $A(7;6)$, on a $7+6+c=0 \Rightarrow c=-13$.

Donc $\underline{t_1: x+y-13=0.}$

t_2 sera perpendiculaire à $\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

Ainsi on a : $t_2: x-3y+c=0$.

Avec $B(5;0)$, on a $5-3\cdot0+c=0 \Rightarrow c=-5$.

Donc $\underline{t_2: x-3y-5=0.}$

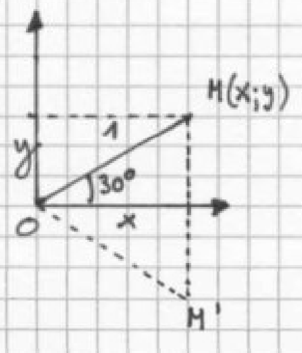
Exercice 49

a) Le centre est $(0;0)$ et le rayon est 1 $\Longrightarrow$ $\underline{x^2+y^2=1.}$

b) On doit avoir $x=y$: $x^2+x^2=1 \Longrightarrow 2x^2=1 \Longrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Longrightarrow$ ce sont les points $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Les coordonnées de M sont $(x;y)$:



Le triangle OMM' est équilatéral $\Longrightarrow MM'=1 \Longrightarrow y=\frac{1}{2}$.

Avec le théorème de Pythagore, on a $x^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Longrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi les coordonnées du point M sont $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.