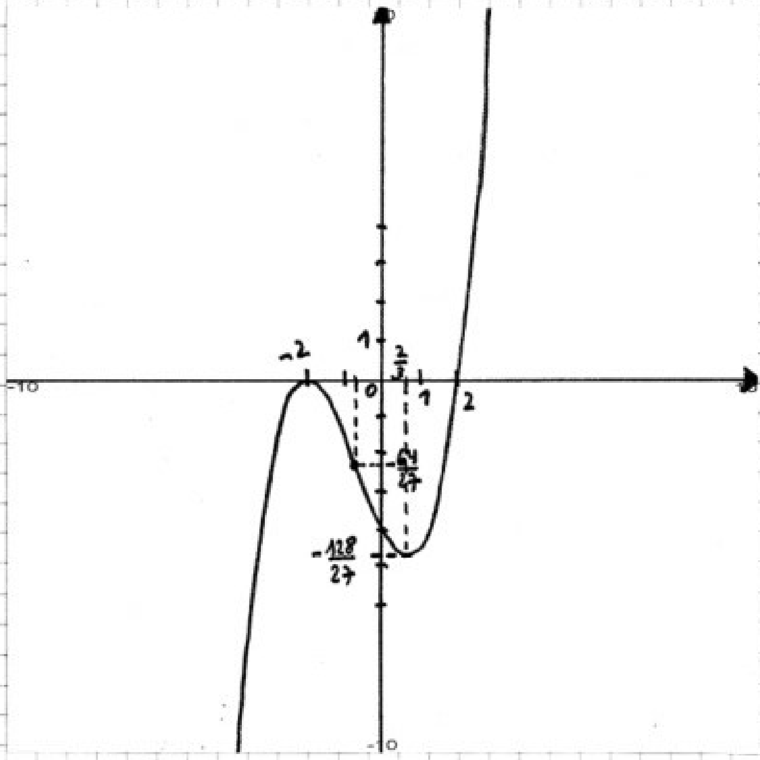
$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-4x-8 & x-2 \\ \cline{2-2}
-(x^3-2x^2) \qquad & x^2+4x+4 \\ \cline{1-1}
4x^2-4x-8 & \\
-(4x^2-8x) & \\ \cline{1-1}
4x-8 & \\
-(4x-8) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Reste à résoudre $x^2+4x+4=0$. Or $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

Ainsi $x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

Par conséquent, les zéros de f sont en $x=-2$ et $x=2$.

<u>Graphique:</u>



Exercice 6.57

On a $y = f(x) = ax^4 + bx^3$, $a, b \in \mathbb{R}$.

On sait que $P\left(\frac{9}{2}; \frac{81}{16}\right)$ est un point d'inflexion du graphe de f.

Il appartient donc au graphe de f: $a\left(\frac{9}{2}\right)^4 + b\left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{81}{16} \Rightarrow \frac{6561}{16}a + \frac{729}{8}b = \frac{81}{16}$

$\Rightarrow 6561a + 1458b = 81 \Rightarrow 729a + 162b = 9 \Rightarrow 81a + 18b = 1$ (1e équation).

En outre, comme $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$ et $f''(x) = 12ax^2 + 6bx$, on a $f''\left(\frac{9}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow 12a\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 6b \cdot \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow 12a \cdot \frac{81}{4} + 27b = 0 \Rightarrow 243a + 27b = 0$

$\Rightarrow 9a + b = 0 \Rightarrow b = -9a.$

Par substitution dans la 1e équation, on obtient $81a + 18(-9a) = 1$

$\Rightarrow 81a - 162a = 1 \Rightarrow -81a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{81}$.

Ainsi $b = -9a = -9 \cdot \left(-\frac{1}{81}\right) = \frac{1}{9}$.

La fonction est donc $y = f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{1}{9}x^3$.

Etudions cette fonction.

a) Domaine de définition: $\mathbb{R}$.

b) Parité: $f(-x) = -\frac{1}{81}(-x)^4 + \frac{1}{9}(-x)^3 = -\frac{1}{81}x^4 - \frac{1}{9}x^3 \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire

c) Périodicité: f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{81}x^4 + \frac{1}{9}x^3 = 0 \Rightarrow x^4 - 9x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x-9) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ et $x = 9$.

e) Intersection avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

f) Tableau de signes:

x		0		9	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: aucun, puisque $D_f = \mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: f admet une asymptote non verticale $y = mx + h$ si il existe $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.

On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{1}{81}x^3 + \frac{1}{9}x^2\right) = \pm\infty$. Ainsi m n'existe pas et f n'a pas d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: $f'(x) = -\frac{4}{81}x^3 + \frac{1}{3}x^2$. $D_{f'} = \mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{4}{81}x^3 + \frac{1}{3}x^2 = 0 \Rightarrow 4x^3 - 27x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2(4x-27)=0 \Rightarrow x=0$ et $x=\frac{27}{4}$.

Avec $x=0$, on a $f(x)=0$. Avec $x=\frac{27}{4}$, on a $f(x)=-\frac{1}{81}\left(\frac{27}{4}\right)^4+\frac{1}{9}\left(\frac{27}{4}\right)^3 \cong 8,54$.

Par conséquent, f a 2 points à tangente horizontale: $(0;0)$ et $\left(\frac{27}{4};8,54\right)$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': /

o) Tableau de variation:

x		0		$\frac{27}{4}$	
signes de $f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	P.I	$\nearrow$	max	$\searrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(0;0)$ est un point d'inflexion et $\left(\frac{27}{4};8,54\right)$ est un maximum.

q) Deuxième dérivée: $f''(x)=-\frac{4}{27}x^2+\frac{2}{3}x$. $D_{f''}=\mathbb{R}$.

r) Points d'inflexion: $f''(x)=0 \Rightarrow -\frac{4}{27}x^2+\frac{2}{3}x=0 \Rightarrow 4x^2-18x=0$

$\Rightarrow 2x(2x-9)=0 \Rightarrow x=0$ et $x=\frac{9}{2}$.

Avec $x=0$, on a $f(x)=0$ et $f'(x)=0$.

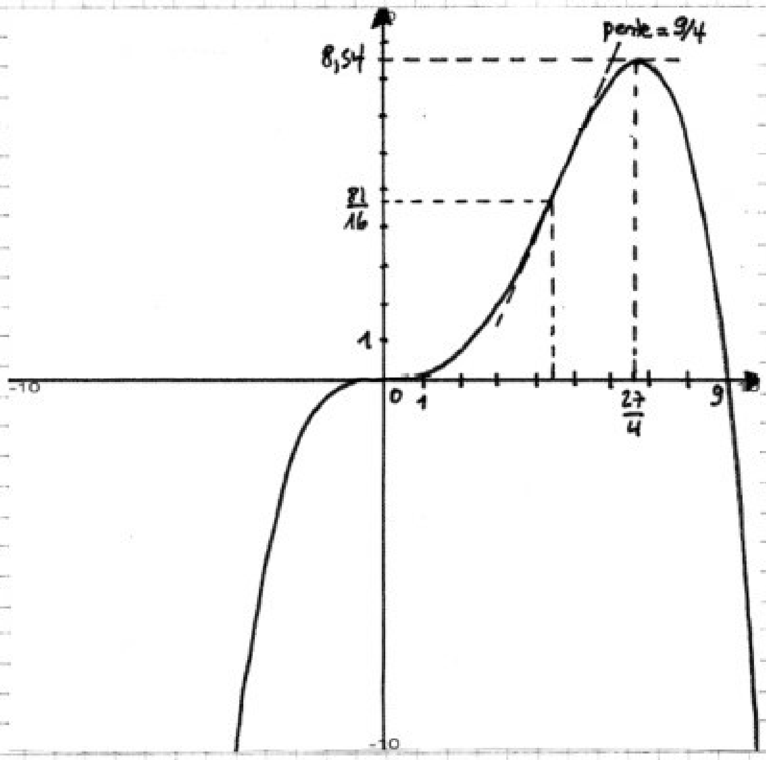
Avec $x=\frac{9}{2}$, on a $f(x)=-\frac{1}{81}\left(\frac{9}{2}\right)^4+\frac{1}{9}\left(\frac{9}{2}\right)^3=\frac{81}{16}$ et $f'(x)=-\frac{4}{81}\left(\frac{9}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^2=$

$=\frac{9}{4}$.

s) Tableau de convexité:

x		0		$\frac{9}{2}$	
signes de $f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
convexité ou concavité de $f(x)$	concave		convexe		concave

t) Graphique:



Exercice 6.58

a. On a $f(x) = \frac{x-3}{x+4} = \frac{u}{v}$ avec $u = x-3$ et $v = x+4$. Ainsi $u' = 1$ et $v' = 1$ et on a

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1\cdot(x+4) - (x-3)\cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{x+4-x+3}{(x+4)^2} = \frac{7}{(x+4)^2}.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{7}{(x+4)^2} = 0 \Rightarrow 7 = 0$, ce qui est impossible.

Par conséquent, f ne possède aucun point à tangente horizontale.

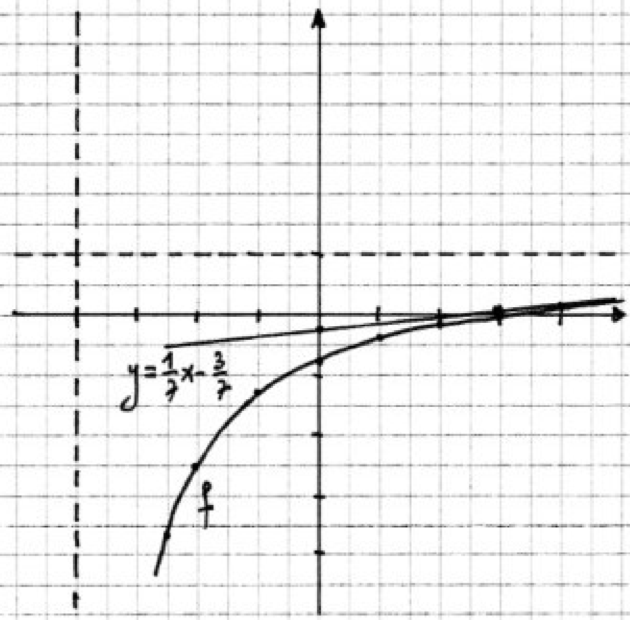
b. La tangente au graphe de f en $x = 3$ sera de la forme $y = mx + h$, où $m = f'(3)$ et h est ensuite calculé grâce au point de tangence $(3; f(3))$.

D'après a., on a $f'(x) = \frac{7}{(x+4)^2}$. Ainsi $f'(3) = \frac{7}{(3+4)^2} = \frac{7}{7^2} = \frac{1}{7}$. La tangente est ainsi $y = \frac{1}{7}x + h$.

On a $f(3) = \frac{3-3}{3+4} = 0$. Ainsi le point de tangence est $(3; 0)$; par substitution dans $y = \frac{1}{7}x + h$, on obtient $0 = \frac{1}{7}\cdot 3 + h \Rightarrow h = -\frac{3}{7}$.

L'équation de la tangente est donc $y = \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}$.

c.



Exercice 6.59.

a. On a $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Le point $T(1;1)$ doit être un point à tangente horizontale.

On doit donc avoir $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.

$f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$: $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 3 + 2a - a = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$

$\Rightarrow b = -a = 3$.

Ainsi, on a $a = -3$ et $b = 3$ et $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$

Tableau de variation au voisinage de $x = 1$:

x	1
signe de $f'(x)$	.... + 0 + ...
croissance ou décroissance de $f(x)$	... $\nearrow$ $\nearrow$ ....

Ainsi, le point $T(1;1)$ est un point d'inflexion (un palier).

b. On a $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 5$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$y = -2{,}5x + 4$ est une tangente à f en $x = -1$.

Avec $x = -1$, on a $y = -2{,}5 \cdot (-1) + 4 = 2{,}5 + 4 = 6{,}5$.

On doit donc avoir $f(-1) = 6{,}5$ et $f'(-1) = -2{,}5$ (pente de la tangente).

$f(-1) = 6{,}5 \Rightarrow 2(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 5 = 6{,}5 \Rightarrow -2 + a - b - 5 = 6{,}5 \Rightarrow a - b = 13{,}5$

$\Rightarrow a = 13{,}5 + b$.

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$: $f'(-1) = -2{,}5 \Rightarrow 6(-1)^2 + 2a(-1) + b = -2{,}5 \Rightarrow 6 - 2a + b = -2{,}5$

$\Rightarrow -2a + b = -8{,}5 \Rightarrow -2(13{,}5 + b) + b = -8{,}5 \Rightarrow -27 - 2b + b = -8{,}5 \Rightarrow -b = 18{,}5$

$\Rightarrow b = -18{,}5 \Rightarrow a = 13{,}5 + b = 13{,}5 - 18{,}5 = -5$.

Ainsi, on a $a = -5$ et $b = -18{,}5$.

Exercice 6.60.

a. On a $y = f(x) = 3(x-1)^2+5$.

Les tangentes à f passant par l'origine sont de la forme $y = mx$ où $m = f'(x_0)$, x_0 étant l'abscisse du point de contact $(x_0 ; y_0)$.

On doit avoir $\begin{cases} y_0 = 3(x_0-1)^2+5 \\ y_0 = mx_0 \\ f'(x_0) = m. \end{cases}$

On a $f'(x) = 6(x-1)$.

On obtient donc le système $\begin{cases} y_0 = 3(x_0-1)^2+5 & (1) \\ y_0 = mx_0 & (2) \\ 6(x_0-1) = m & (3). \end{cases}$

Par substitution de (3) dans (2), on obtient $y_0 = 6(x_0-1)x_0$ (4).

En combinant (1) et (4), on obtient $6(x_0-1)x_0 = 3(x_0-1)^2+5$

$\Rightarrow 6x_0^2 - 6x_0 = 3x_0^2 - 6x_0 + 8 \Rightarrow 3x_0^2 = 8 \Rightarrow x_0^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$.

En reprenant (3), on obtient :

avec $x_0 = \sqrt{\frac{8}{3}}$: $m = 6\left(\sqrt{\frac{8}{3}} - 1\right) = 6\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 1\right) = 6\left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} - 1\right) = 6\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - 1\right) =$

$= 4\sqrt{6} - 6$;

avec $x_0 = -\sqrt{\frac{8}{3}}$: $m = 6\left(-\sqrt{\frac{8}{3}} - 1\right) = 6\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 1\right) = 6\left(-\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} - 1\right) = 6\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3} - 1\right) =$

$= -4\sqrt{6} - 6$.

Ainsi, les équations des 2 tangentes possibles sont : $y = (4\sqrt{6}-6)x$ et
$y = (-4\sqrt{6}-6)x$.

b. On a $f(x) = x^2 - 15x - 9$ et on cherche l'équation de la tangente passant par $(-4 ; 3)$.

L'équation de la tangente est de la forme $y = mx + h$, où, si $(x_0 ; y_0)$ est le point de tangence, $m = f'(x_0)$ et $h = y_0 - mx_0$.

On a $f'(x) = 2x - 15$.

On doit avoir $f(x_0) = y_0$, $m = 2x_0 - 15$ et $h = y_0 - mx_0$.

En outre, en substituant $(-4 ; 3)$ dans $y = mx + h$, on a $3 = -4m + h$.

On a donc le système : $\begin{cases} x_0^2 - 15x_0 - 9 = y_0 & (1) \\ m = 2x_0 - 15 & (2) \\ h = y_0 - mx_0 & (3) \\ 3 = -4m + h & (4) \end{cases}$

En substituant (3) dans (4), on obtient : $3 = -4m + y_0 - mx_0$ (5).

En substituant 2 dans 5, on obtient $3 = -4(2x_0 - 15) + y_0 - (2x_0 - 15)x_0$

$\Rightarrow 3 = -8x_0 + 60 + y_0 - 2x_0^2 + 15x_0 \Rightarrow y_0 = 2x_0^2 - 7x_0 - 57$ 6.

En combinant 1 et 6, on obtient $x_0^2 - 15x_0 - 9 = 2x_0^2 - 7x_0 - 57$

$\Rightarrow x_0^2 + 8x_0 - 48 = 0 \Rightarrow (x_0 + 12)(x_0 - 4) = 0 \Rightarrow x_0 = -12$ et $x_0 = 4$.

Avec $x_0 = -12$, on obtient $m = 2x_0 - 15 = 2\cdot(-12) - 15 = -24 - 15 = -39$ et

$h = 3 + 4m = 3 + 4\cdot(-39) = 3 - 156 = -153$.

Avec $x_0 = 4$, on obtient $m = 2x_0 - 15 = 2\cdot 4 - 15 = 8 - 15 = -7$ et

$h = 3 + 4m = 3 + 4\cdot(-7) = 3 - 28 = -25$.

Les équations des tangentes sont donc $y = -39x - 153$ et $y = -7x - 25$ (2 possibilités).

Exercice 6.61.

On a $y = f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

L'équation de la tangente à f en $x_0 = 1$ est $y = mx + h$, où $m = f'(x_0)$ et $h = f(x_0) - mx_0$.

On a $f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{u}{v}$ avec $u = 3x+2$ et $v = (x+1)^2$. On a $u' = 3$ et $v' = 2(x+1)$.

Ainsi $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3(x+1)^2 - (3x+2)2(x+1)}{((x+1)^2)^2} = \frac{(x+1)\left(3(x+1) - 2(3x+2)\right)}{(x+1)^4} =$

$= \frac{3x+3-6x-4}{(x+1)^3} = \frac{-3x-1}{(x+1)^3}$.

On a alors $m = f'(x_0) = f'(1) = \frac{-3-1}{(1+1)^3} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.

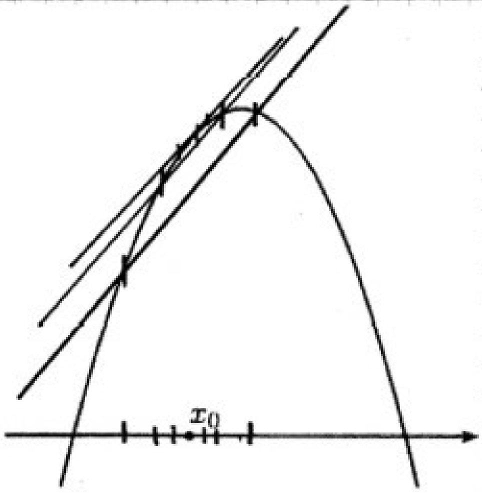
De plus, $f(x_0) = f(1) = \frac{3+2}{(1+1)^2} = \frac{5}{4}$.

Ainsi $h = f(x_0) - mx_0 = f(1) - m = \frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$.

L'équation de la tangente est donc $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$.

Exercice 6.62

a.



b. La pente de la tangente à $f(x)=ax^2+bx+c$ en $x=x_0$ est $m=f'(x_0)$.

On a $f'(x)=2ax+b$. Ainsi $m=2ax_0+b$.

La pente de la droite passant par les points $(x_0-h;f(x_0-h))$ et $(x_0+h;f(x_0+h))$

est $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{x_0+h-(x_0-h)}=\frac{a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c-(a(x_0-h)^2+b(x_0-h)+c)}{x_0+h-x_0+h}=$$

$$=\frac{\cancel{ax_0^2}+2ahx_0+\cancel{ah^2}+\cancel{bx_0}+bh+\cancel{c}-\cancel{ax_0^2}+2ahx_0-\cancel{ah^2}-\cancel{bx_0}+bh-\cancel{c}}{2h}=$$

$$=\frac{4ahx_0+2bh}{2h}=2ax_0+b=m.$$

Ainsi la pente de la tangente à f en $x=x_0$ est égale à la pente de la droite passant par $(x_0-h;f(x_0-h))$ et $(x_0+h;f(x_0+h))$.

c. La pente de la tangente à $f(x)=x^3$ en $x=x_0$ est $m=f'(x_0)$.

On a $f'(x)=3x^2$. Ainsi $m=3x_0^2$.

La pente de la droite passant par les points $(x_0-h;f(x_0-h))$ et $(x_0+h;f(x_0+h))$

est $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{x_0+h-(x_0-h)}=\frac{(x_0+h)^3-(x_0-h)^3}{x_0+h-x_0+h}=\frac{x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-(x_0^3-3x_0^2h+3x_0h^2-h^3)}{2h}=$$

$$=\frac{\cancel{x_0^3}+3x_0^2h+\cancel{3x_0h^2}+h^3-\cancel{x_0^3}+3x_0^2h-\cancel{3x_0h^2}+h^3}{2h}=\frac{6x_0^2h+2h^3}{2h}=3x_0^2+h^2.$$

Ainsi, pour que $m=3x_0^2$ soit égal à $3x_0^2+h^2$, il faudrait que $h=0$.

On en déduit que, si h est suffisamment petit, la pente de la tangente à f en $x=x_0$ est proche de la pente de la droite passant par $(x_0-h;f(x_0-h))$ et $(x_0+h;f(x_0+h))$.

Exercice 6.63.

On a $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & \text{si } x\leq 2 \\ \dfrac{-x^2+3x-2}{2x^2-4x} & \text{si } x>2 \end{cases}$

Le domaine de la fonction $\dfrac{-x^2+3x-2}{2x^2-4x}$ avec $x>2$ est $]2;+\infty[$ ($2x^2-4x=0$ $\Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x=2$).

Ainsi, pour que f soit continue partout, il faut que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=f(2)=a\cdot 2^2+b\cdot 2=4a+2b$.

De plus, si $x>2$, comme $-x^2+3x-2=-(x^2-3x+2)=-(x-1)(x-2)$, on a
$\dfrac{-x^2+3x-2}{2x^2-4x}=\dfrac{-(x-1)(x-2)}{2x(x-2)}=\dfrac{-(x-1)}{2x}=\dfrac{-x+1}{2x}$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{-x^2+3x-2}{2x^2-4x}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{-x+1}{2x}=\dfrac{-2+1}{2\cdot 2}=\dfrac{-1}{4}=-\dfrac{1}{4}$.

On doit donc avoir $4a+2b=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow 2a+b=-\dfrac{1}{8}$ (1).

Si $x\leq 2$, on a $f'(x)=2ax+b$; ainsi f est dérivable partout sur $]-\infty;2]$.
Si $x>2$, on a $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{2x^2-4x}=\dfrac{-x+1}{2x}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=-x+1$ et $v=2x$; ainsi $u'=-1$ et $v'=2$ et on a $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{-1\cdot 2x-(-x+1)\cdot 2}{(2x)^2}=\dfrac{-2x+2x-2}{4x^2}=\dfrac{-2}{4x^2}=\dfrac{-1}{2x^2}$;
ainsi f est dérivable partout sur $]2;+\infty[$.
Reste à assurer que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f'(x)$ pour que f soit dérivable partout.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f'(x)=2a\cdot 2+b=4a+b$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{-1}{2x^2}=\dfrac{-1}{2\cdot 2^2}=-\dfrac{1}{8}$.

On doit donc avoir $4a+b=-\dfrac{1}{8}$ (2).

On obtient le système de 2 équations à 2 inconnues : $\begin{cases} 2a+b=-\dfrac{1}{8} & (1) \\ 4a+b=-\dfrac{1}{8} & (2). \end{cases}$

En soustrayant (1) de (2), on obtient $2a=-\dfrac{1}{8}-(-\dfrac{1}{16})=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=0$ et, donc, $a=0$.
Avec $a=0$, on a, avec (1), $b=-\dfrac{1}{8}-a=-\dfrac{1}{8}-0=-\dfrac{1}{8}$.

On en conclut donc que $a=0$ et $b=-\dfrac{1}{8}$.

Exercice 6.64.

On a $f(x) = \frac{3x(x-a)}{x^2+9} = \frac{3x^2-3ax}{x^2+9}$, $a \in \mathbb{R}$.

Comme $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 3x^2-3ax$ et $v = x^2+9$, on a $u' = 6x-3a$ et $v' = 2x$ et

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(6x-3a)(x^2+9)-(3x^2-3ax)\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{6x^3+54x-3ax^2-27a-6x^3+6ax^2}{(x^2+9)^2} =$$
$$= \frac{3ax^2+54x-27a}{(x^2+9)^2}.$$

Les points à tangente horizontale sont les x tels que $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3ax^2+54x-27a}{(x^2+9)^2} = 0 \Rightarrow 3ax^2+54x-27a=0 \Rightarrow ax^2+18x-9a=0,$$

ce qui est une équation du 2e degré de la forme $Ax^2+Bx+C=0$, avec $A=a$, $B=18$ et $C=-9a$. On a $\Delta = B^2-4AC = 18^2-4\cdot a\cdot(-9a) = 324+36a^2$.

Comme $\Delta = 324+36a^2 > 0$ pour toute valeur de a, on en déduit que $f'(x)=0$ a toujours 2 solutions et, donc, que f a toujours 2 points à tangente horizontale.

Exercice 6.65

On a la parabole $y = ax^2 + bx + c$.

Elle passe par $(5;8) \Rightarrow 8 = a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c \Rightarrow 25a + 5b + c = 8$.

Elle passe par $(2;2) \Rightarrow 2 = a.2^2 + b.2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 2$.

La pente de la tangente à $f(x) = ax^2 + bx + c$ au point $(2;2)$ est $-4 \Rightarrow f'(2) = -4$.

On a $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow -4 = 2a.2 + b \Rightarrow 4a + b = -4$.

On obtient un système de 3 équations à 3 inconnues : $\begin{cases} 25a + 5b + c = 8 & (1) \\ 4a + 2b + c = 2 & (2) \\ 4a + b = -4 & (3). \end{cases}$

En soustrayant (2) de (1), on obtient $21a + 3b = 6 \Rightarrow 7a + b = 2$ (5).

En soustrayant (3) de (5), on obtient $3a = 6 \Rightarrow a = 2$.

Avec $a = 2$ dans (5), on trouve $4.2 + b = -4 \Rightarrow b = -4 - 8 = -12$.

Avec $a = 2$ et $b = -12$ dans (2), on trouve $4.2 + 2.(-12) + c = 2$
$\Rightarrow c = 2 - 8 + 24 = 18$.

On obtient ainsi $a = 2$, $b = -12$ et $c = 18$.

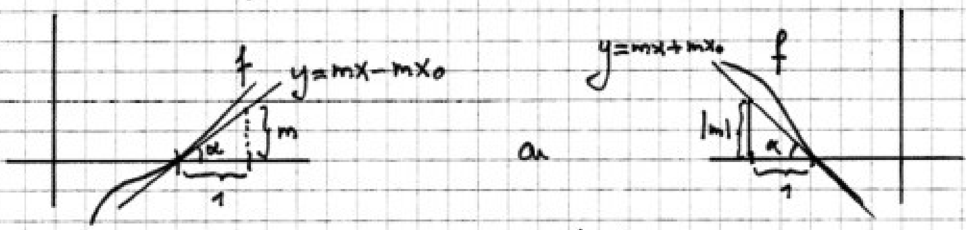
Exercice 6.66

Soit une fonction $y = f(x)$. On cherche l'angle de la courbe f avec l'axe O_x au point d'intersection $x = x_0$.

On commence par chercher l'équation de la tangente en f en $x = x_0$. Elle est de la forme $y = mx + h$ avec $m = f'(x_0)$. En outre, le point de tangence correspond au point d'intersection de f avec l'axe Ox. Il est donc $(x_0; 0)$. Par substitution dans $y = mx + h$, on obtient $0 = mx_0 + h \Rightarrow h = -mx_0$.

L'équation de la tangente est donc $y = mx - mx_0$ où $m = f'(x_0)$.

On a alors la situation suivante:



Par la trigonométrie, on trouve que $\tan(\alpha) = \frac{|m|}{1} = |m|$.

Ainsi, l'angle α entre la tangente à f en x_0, et donc entre f, et l'axe Ox est

$$\alpha = \tan^{-1}|m| = \arctan|m| = \arctan|f'(x_0)|.$$

a. $y = f(x) = x^2 - 1$: intersection avec Ox : $y = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$;

$f'(x) = 2x$;

en $x_0 = -1$, $f'(x_0) = -2 \Rightarrow \alpha = \arctan|-2| = \arctan 2 \cong 63{,}43°$;

en $x_0 = 1$, $f'(x_0) = 2 \Rightarrow \alpha = \arctan 2 \cong 63{,}43°$.

b. $y = f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$: intersection avec Ox: $y = 0 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; on pose $u = x^2$ et on obtient l'équation $u^2 - 5u + 4 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-4) = 0$

$\Rightarrow u = 1$ et $u = 4 \Rightarrow x = \pm 1$ et $x = \pm 2$;

on a $f'(x) = 4x^3 - 10x$;

en $x_0 = -1$, $f'(x_0) = 4(-1)^3 - 10\cdot(-1) = -4 + 10 = 6$

$\Rightarrow \alpha = \arctan 6 \cong 80{,}54°$;

en $x_0 = 1$, $f'(x_0) = 4\cdot 1^3 - 10\cdot 1 = 4 - 10 = -6$

$\Rightarrow \alpha = \arctan|-6| = \arctan 6 \cong 80{,}54°$;

en $x_0 = -2$, $f'(x_0) = 4\cdot(-2)^3 - 10\cdot(-2) = -32 + 20 = -12$

$\Rightarrow \alpha = \arctan|-12| = \arctan 12 \cong 85{,}24°$;

en $x_0 = 2$, $f'(x_0) = 4\cdot 2^3 - 10\cdot 2 = 32 - 20 = 12$

$\Rightarrow \alpha = \arctan 12 \cong 85{,}24°$.

c. $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$: intersection avec Ox : $y=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0 \Rightarrow x=0$;

on a $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x}{(x^2-1)^{1/3}} = x(x^2-1)^{-1/3} = u.v$ avec $u=x$ et

$v=(x^2-1)^{-1/3}$; ainsi $u'=1$ et $v' = -\frac{1}{3}(x^2-1)^{-4/3}\cdot 2x = -\frac{2x}{3}(x^2-1)^{-4/3}$

et $f'(x) = u'v+uv' = 1\cdot(x^2-1)^{-1/3} + x\cdot\left(-\frac{2x}{3}\right)(x^2-1)^{-4/3} =$

$= (x^2-1)^{-1/3}\left(1-\frac{2x^2}{3}(x^2-1)^{-1}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\left(1-\frac{2x^2}{3(x^2-1)}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\cdot\frac{3(x^2-1)-2x^2}{3(x^2-1)} = \frac{3x^2-3-2x^2}{3\sqrt[3]{x^2-1}\,(x^2-1)} = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{x^2-1}\,(x^2-1)}$;

en $x_0=0$, on a $f'(x_0) = \frac{0^2-3}{3\sqrt[3]{0^2+1}\,(0^2-1)} = \frac{-3}{3\cdot 1\cdot(-1)} = \frac{-3}{-3} = 1$

$\Rightarrow \alpha = \arctan 1 = 45°$.

d. $y = \frac{x^2-4}{x^2+1}$: intersection avec Ox : $y=0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$;

on a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u=x^2-4$ et $v=x^2+1$; ainsi $u'=2x$ et $v'=2x$ et

$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+8x}{(x^2+1)^2} = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$;

en $x_0=-2$, on a $f'(x_0) = \frac{10\cdot(-2)}{((-2)^2+1)^2} = \frac{-20}{5^2} = -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \alpha = \arctan\left|-\frac{4}{5}\right| = \arctan\frac{4}{5} \cong 38{,}66°$;

en $x_0=2$, on a $f'(x_0) = \frac{10\cdot 2}{(2^2+1)^2} = \frac{20}{5^2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \alpha = \arctan\frac{4}{5} \cong 38{,}66°$.

Exercice 6.67

Soient 2 fonctions f et g et $(x_0; y_0)$ un de leurs points d'intersection.
L'angle entre f et g en $(x_0;y_0)$ sera l'angle entre les tangentes à f et g en $(x_0;y_0)$.
La pente de la tangente à f en $(x_0;y_0)$ est $m_f = f'(x_0)$.
La pente de la tangente à g en $(x_0;y_0)$ est $m_g = g'(x_0)$.
L'angle aigu α entre les 2 tangentes est alors donné par $\tan(\alpha) = \left|\dfrac{m_g - m_f}{1+m_f m_g}\right|$
(voir Formulaires et Tables p. 51).
Ainsi on a $\tan(\alpha) = \left|\dfrac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1+f'(x_0)g'(x_0)}\right|$

$y=f(x)=x^2$ et $y=g(x)=\frac{x^2}{4}+3$: $f(x)=g(x) \Rightarrow x^2=\frac{x^2}{4}+3 \Rightarrow \frac{3x^2}{4}=3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$;

$f'(x)=2x$; $g'(x)=\frac{x}{2}$;

$x_0=-2$: $f'(x_0)=-4$, $g'(x_0)=-1$

$\Rightarrow \tan(\alpha) = \left|\dfrac{-1-(-4)}{1+(-4)(-1)}\right| = \left|\dfrac{-1+4}{1+4}\right| = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \cong 30{,}97°$;

$x_0=2$: $f'(x_0)=4$; $g'(x_0)=1$

$\Rightarrow \tan(\alpha) = \left|\dfrac{1-4}{1+4\cdot 1}\right| = \left|\dfrac{-3}{5}\right| = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \cong 30{,}97°$.

$y=f(x)=\sin x$ et $y=g(x)=\cos x$: $f(x)=g(x) \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=1 \Rightarrow \tan x = 1$

$\Rightarrow x=45°$ ou $x=180°+45°=225°$;

$f'(x)=\cos x$; $g'(x)=-\sin x$;

$x_0=45°$: $f'(x_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $g'(x_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \tan(\alpha) = \left|\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})}\right| = \left|\dfrac{-\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{1/2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \alpha \cong 70{,}53°$;

$x_0=225°$; $f'(x_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $g'(x_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \tan(\alpha) = \left|\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}{1+(-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{2}}{1-1/2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{1/2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \alpha \cong 70{,}53°$.

$y=f(x)=x^3-4x$ et $y=g(x)=x^3-2x^2$: $f(x)=g(x) \Rightarrow x^3-4x=x^3-2x^2 \Rightarrow -4x=-2x^2 \Rightarrow 2x=x^2$

$\Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ et $x=2$;

$f'(x)=3x^2-4$; $g'(x)=3x^2-4x$;

$x_0=0$: $f'(x_0)=-4$, $g'(x_0)=0$

$\Rightarrow \tan(\alpha) = \left|\dfrac{0-(-4)}{1+(-4)\cdot 0}\right| = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow \alpha \cong 75{,}96°$;

$x_0=2$: $f'(x_0)=3\cdot 2^2-4=8$; $g'(x_0)=3\cdot 2^2-4\cdot 2=4$

$\Rightarrow \tan(\alpha) = \left|\dfrac{4-8}{1+8\cdot(4)}\right| = \left|\dfrac{-4}{-31}\right| = \frac{4}{31} \Rightarrow \alpha \cong 7{,}35°$.

Exercice 6.68

Soient 2 fonctions f et g et $(x_0;y_0)$ un de leurs points d'intersection.
L'angle entre f et g en $(x_0;y_0)$ sera l'angle entre les tangentes à f et g en $(x_0;y_0)$.
La pente de la tangente à f en $(x_0;y_0)$ est $m_f = f'(x_0)$.
La pente de la tangente à g en $(x_0;y_0)$ est $m_g = g'(x_0)$.
Pour que les 2 tangentes se coupent à angle droit, on doit avoir $m_g = -\frac{1}{m_f}$.
Ainsi pour que f et g se coupent à angle droit en un de leurs points d'intersection $(x_0;y_0)$, on doit avoir $g'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

a. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{2} - ax^2$: $f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow x_0^2 = \frac{1}{2} - ax_0^2 \Rightarrow x_0^2 + ax_0^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_0^2(1+a) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0^2 = \frac{1}{2(1+a)} \quad (a \neq -1)$

$f'(x) = 2x$; $g'(x) = -2ax$;

$g'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow -2ax_0 = -\frac{1}{2x_0} \Rightarrow 4ax_0^2 = 1$

$\Rightarrow x_0^2 = \frac{1}{4a}$

$\Rightarrow \frac{1}{4a} = \frac{1}{2(1+a)} \Rightarrow 4a = 2(1+a) \Rightarrow 4a = 2 + 2a$

$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1.$

b. $f(x) = ax^2$ et $g(x) = \frac{1-x^2}{a}$: $f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow ax_0^2 = \frac{1-x_0^2}{a} \Rightarrow a^2x_0^2 = 1 - x_0^2$

$\Rightarrow a^2x_0^2 + x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0^2(a^2+1) = 1 \Rightarrow x_0^2 = \frac{1}{a^2+1}$;

$f'(x) = 2ax$; $g'(x) = \frac{-2x}{a}$;

$g'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow -\frac{2x_0}{a} = -\frac{1}{2ax_0} \Rightarrow 4x_0^2 = 1$

$\Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{a^2+1} = 1 \Rightarrow 4 = a^2+1 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}.$

c. $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = \frac{x^2}{a}$: $f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow 2x_0^2 = \frac{x_0^2}{a} \Rightarrow 2ax_0^2 = x_0^2$

$\Rightarrow 2ax_0^2 - x_0^2 = 0 \Rightarrow x_0^2(2a-1) = 0 \Rightarrow$ soit $x_0 = 0$,

soit $2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$;

$f'(x) = 4x$; $g'(x) = \frac{2x}{a}$;

$g'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow \frac{2x_0}{a} = -\frac{1}{4x_0} \Rightarrow 8x_0^2 = -a$;

si $x_0 = 0$, alors $a = 0$, ce qui est exclu, car, si $a = 0$, g n'est pas défini ;

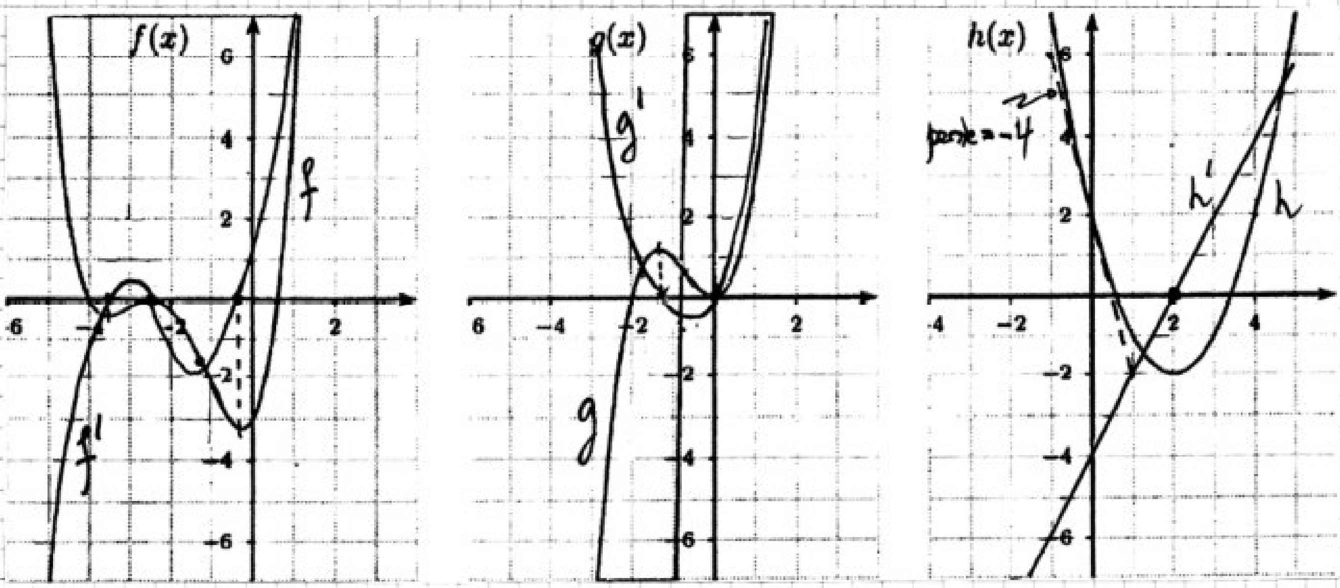
si $a = \frac{1}{2}$, on a alors $8x_0^2 = -\frac{1}{2}$, ce qui est exclu, car $8x_0^2 \geq 0$ pour toute valeur de x (si $a = \frac{1}{2}$, on a $f(x) = g(x)$) ;

c'est donc impossible

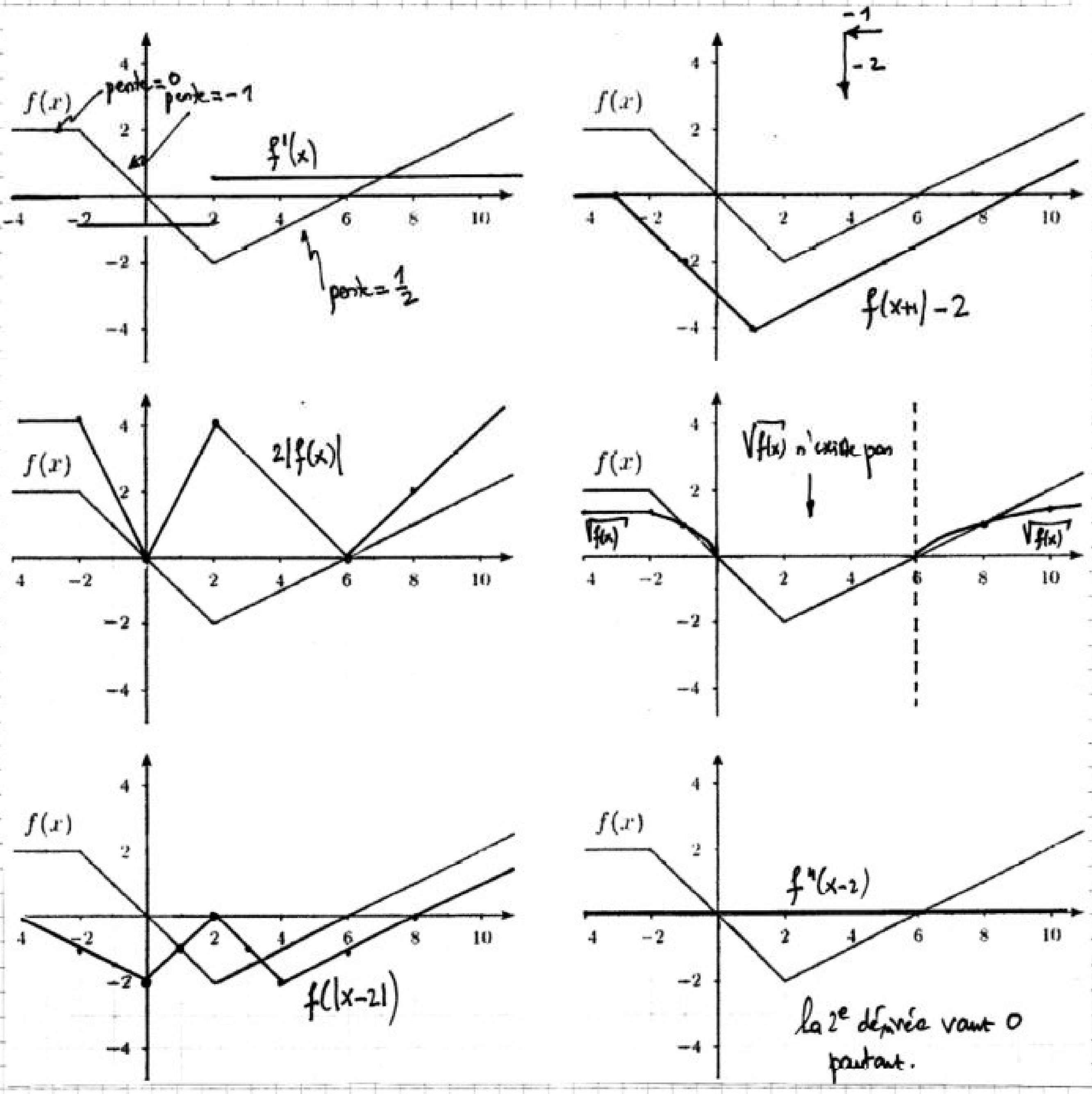
Exercice 6.69.

En $x \cong -0,8$, on a un point à tangente horizontale (sommet de la parabole). La dérivée est donc nulle en ce point-là.
Sur $]-\infty;-0,8[$, la fonction est décroissante. La dérivée est donc négative.
Sur $]-0,8;+\infty[$, la fonction est croissante. La dérivée est donc positive.
La seule illustration qui correspond à cela est la première.

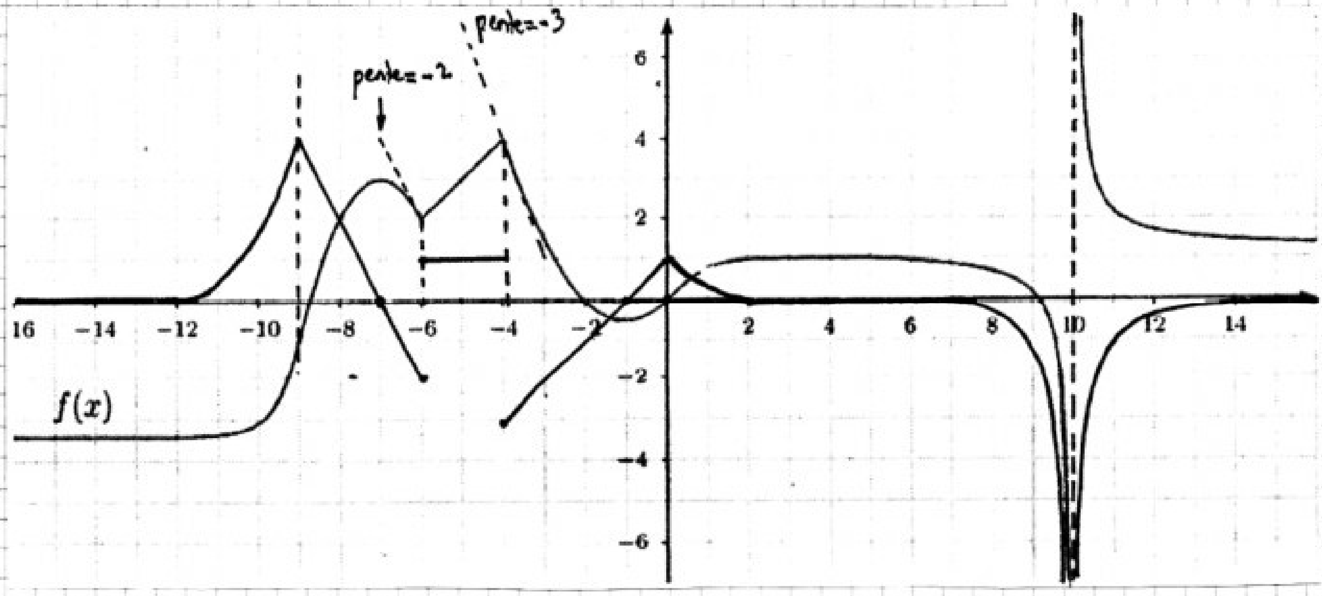
Exercice 6.70.



Exercice 6.71



Exercice 6.72



Exercice 6.73.

La somme de x et y vaut 10 $\Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x$.

On doit trouver le maximum de $f(x)=x^3y^2=x^3(10-x)^2$.

On va chercher la ou les solutions de $f'(x)=0$.

On a $f(x)=u.v$ avec $u=x^3$ et $v=(10-x)^2$.

On a $u'=3x^2$ et $v'=2(10-x).(-1)=-2(10-x)$.

Ainsi $f'(x)=u'v+uv'=3x^2(10-x)^2+x^3(-2(10-x))=3x^2(10-x)^2-2x^3(10-x)=$

$=x^2(10-x)\left(3(10-x)-2x\right)=x^2(10-x)(30-3x-2x)=x^2(10-x)(30-5x)$.

Par conséquent, $f'(x)=0 \Rightarrow x^2(10-x)(30-5x)=0$

$\Rightarrow$ soit $x^2=0 \Rightarrow x=0$, soit $10-x=0 \Rightarrow x=10$, soit $30-5x=0 \Rightarrow x=6$.

On construit maintenant le tableau de variation de f:

x		0		6		10	
Signes de $f'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
croissance ou décroissance de $f(x)$	↗		↗	max	↘		↗

La valeur maximale de f est en $x=6$.

Avec $x=6$, on a $y=10-x=4$.

Donc, le produit x^3y^2 est maximal lorsque $x=6$ et $y=4$ $(x+y=10)$.

Exercice 6.74.

Si la boîte cylindrique a une contenance de $500 ml = 0,5 l$, cela signifie que son volume est de $0,5\ dm^3 = 500\ cm^3$.

Si r est le rayon de sa base et h sa hauteur, on a $\pi r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$ $(r \neq 0)$.

L'aire totale du cylindre est donnée par $f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{500}{\pi r^2} =$
$= 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$.

On va chercher les r tels que $f'(r) = 0$.

On a $f'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$.

Ainsi $f'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 1000 = 0 \Rightarrow \pi r^3 = 250$
$\Rightarrow r^3 = \frac{250}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \cong 4,3$ cm.

Avec $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \cong 4,3$ cm, on a $h = \frac{500}{\pi r^2} \cong 8,6$ cm.

On vérifie que $r \cong 4,3$ est un maximum pour f.

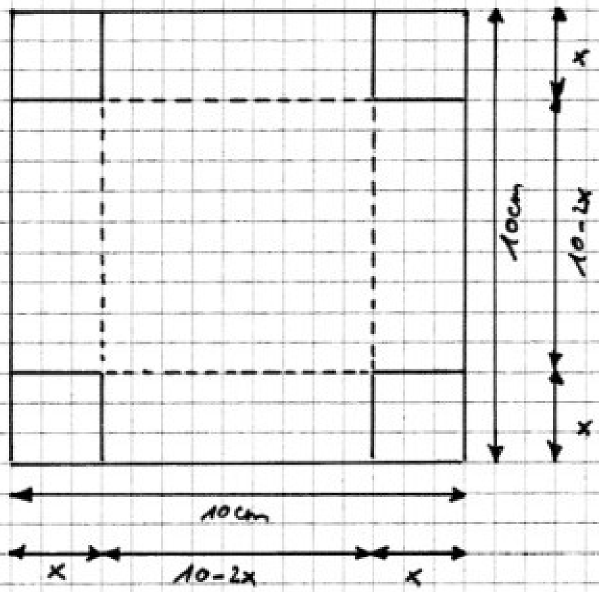
Tableau de croissance:

x		4,3	
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Ainsi avec $r \cong 4,3$ et $h \cong 8,6$ cm, la surface totale est minimale.

Exercice 6.75.

On a la situation suivante:



Le volume de la boîte est $(10-2x)^2\cdot x$.

On doit donc trouver x tel que la fonction $f(x)=(10-2x)^2\cdot x$ soit maximale.

Cherchons le ou les x tels que $f'(x)=0$.

On a $f(x)=(100-40x+4x^2)\cdot x=100x-40x^2+4x^3 \Rightarrow f'(x)=100-80x+12x^2$

$f'(x)=0 \Rightarrow 100-80x+12x^2=0 \Rightarrow 3x^2-20x+25=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=3$, $b=-20$ et $c=25$. On a $\Delta=b^2-4ac=$ $=(-20)^2-4\cdot 3\cdot 25=400-300=100$ et $\sqrt{\Delta}=10$. Les solutions sont $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{20+10}{2\cdot 3}=\frac{30}{6}=$ $=5$ et $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{20-10}{2\cdot 3}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

Tableau de variation:

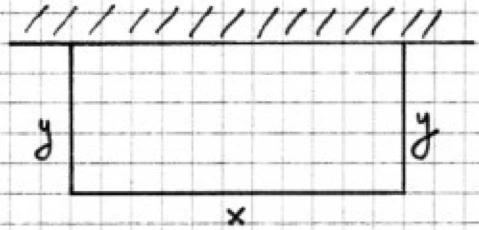
x		$\frac{5}{3}$		5	
Signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Ainsi le volume sera maximal si $x=\frac{5}{3}$.

Le volume vaudra alors $\left(10-2\cdot\frac{5}{3}\right)^2\cdot\frac{5}{3}=\left(10-\frac{10}{3}\right)^2\cdot\frac{5}{3}=\left(\frac{20}{3}\right)^2\cdot\frac{5}{3}=\frac{400}{9}\cdot\frac{5}{3}=\frac{2000}{27}\cong 74{,}07\ cm^3$.

Exercice 6.76.

On a la situation suivante :



a. On doit avoir $x + 2y = 200$ et on cherche le maximum de l'aire $= xy$.

On a $x = 200 - 2y$ et il faut chercher le maximum de $f(y) = (200 - 2y)y = -2y^2 + 200y$.

On cherche le ou les y tels que $f'(y) = 0$.

On a $f'(y) = -4y + 200$. $f'(y) = 0 \Rightarrow -4y + 200 = 0 \Rightarrow 4y = 200 \Rightarrow y = 50$.

Tableau de variations :

y		50	
Signes de $f'(y)$	+	0	−
croissance ou décroissance de $f(y)$	↗	max	↘

Avec $y = 50$, on a $x = 200 - 2y = 200 - 100 = 100$ m.

Ainsi l'aire sera maximale si $x = 100$ m et $y = 50$ m et vaudra $5000\ m^2$.

b. On doit avoir $xy = 300$ et on cherche le minimum de $x + 2y$.

On a $y = \frac{300}{x}$ et il faut chercher le minimum de $f(x) = x + 2 \cdot \frac{300}{x} = x + \frac{600}{x}$.

On cherche le ou les x tels que $f'(x) = 0$.

On a $f'(x) = 1 - \frac{600}{x^2}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{600}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{600}{x^2} \Rightarrow x^2 = 600 \Rightarrow x = \pm\sqrt{600}$.

Comme x est une longueur, on doit avoir $x \geqslant 0$ et la solution est $x = \sqrt{600} = 2\sqrt{150}$.

Tableau de variation :

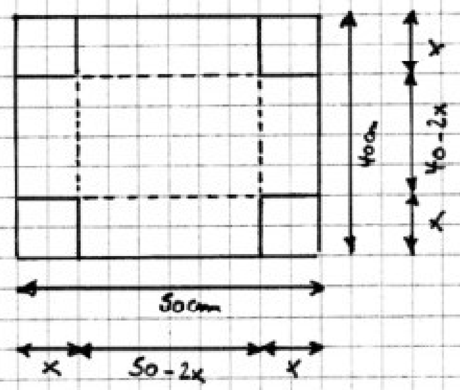
x		$2\sqrt{150}$	
Signes de $f'(x)$	−	0	+
croissance ou décroissance de $f(x)$	↘	min	↗

Avec $x = 2\sqrt{150}$, on a $y = \frac{300}{x} = \frac{300}{2\sqrt{150}} = \frac{150}{\sqrt{150}} = \sqrt{150}$.

Ainsi la longueur de la clôture sera minimale si $x = 2\sqrt{150}$ et $y = \sqrt{150}$ m et vaudra $x + 2y = 2\sqrt{150} + 2\sqrt{150} = 4\sqrt{150}$ m.

Exercice 6.77

On a la situation suivante:



a. Les valeurs possibles de x sont: $x > 0$, $40-2x > 0$ et $50-2x > 0$

$\Rightarrow x > 0$, $x < 20$ et $x < 25$.

Ainsi, on doit avoir $0 < x < 20$.

b. La capacité du plateau, donc son volume, vaut $(50-2x)(40-2x).x$.

Il faut chercher le ou les x tels que $f(x) = (50-2x)(40-2x).x$ soit maximum, autrement dit tels que $f'(x) = 0$.

On a $f(x) = (2000-180x+4x^2)x = 4x^3 - 180x^2 + 2000x$.

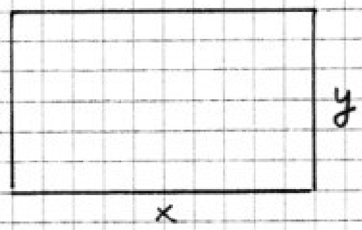
Ainsi $f'(x) = 12x^2 - 360x + 2000$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 360x + 2000 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 90x + 500 = 0$, équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=3$, $b=-90$ et $c=500$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-90)^2 - 4.3.500 =$
$= 8100 - 6000 = 2100$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21}$; les solutions sont
$x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{90+10\sqrt{21}}{6} \cong 22,64$ et $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{90-10\sqrt{21}}{6} \cong 7,36$.

Comme $x \cong 22,64$ n'entre pas dans les valeurs possibles de x (voir a.), on en déduit que le volume sera maximal si $x \cong 7,36$ (on peut vérifier que c'est bien un maximum par un tableau de croissance).

Exercice 6.78

On a la situation suivante :



On doit avoir $2x+2y=1 \Rightarrow x+y=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}-x$.

On doit trouver l'aire maximum du rectangle, autrement dit le maximum de la fonction $f(x)=xy=x(\frac{1}{2}-x)=\frac{1}{2}x-x^2$.

On cherche le ou les x tels que $f'(x)=0$.

On a $f'(x)=\frac{1}{2}-2x$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}-2x=0 \Rightarrow 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$.

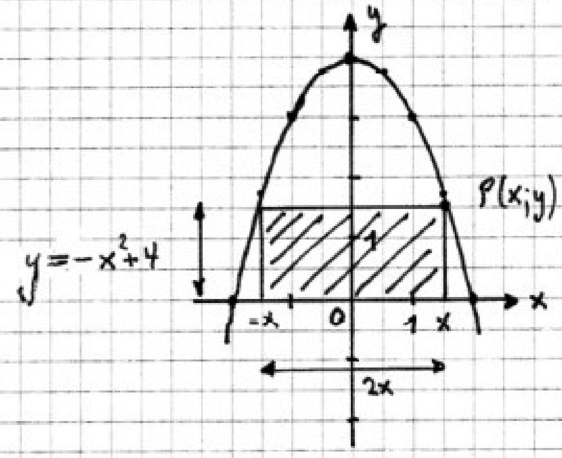
Tableau de variations :

x		$\frac{1}{4}$	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Ainsi l'aire du rectangle est maximale si $x=\frac{1}{4}=0{,}25$ m.

Exercice 6.79

On a la situation suivante:



a. L'aire du rectangle est $2x \cdot y = 2x(-x^2+4) = -2x^3+8x$.

On doit chercher le maximum de $f(x) = -2x^3+8x$, autrement dit le ou les x tels que $f'(x)=0$. On a $f'(x) = -6x^2+8$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -6x^2+8=0 \Rightarrow 6x^2=8 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Tableau de variation:

x		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	
Signes de $f'(x)$	+	0	−
croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	max	↘

Ainsi l'aire est maximale si $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et elle vaut $-2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 + 8 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} =$

$= -2\,\frac{8 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{27} + \frac{16\sqrt{3}}{3} = -\frac{16\sqrt{3}}{9} + \frac{16\sqrt{3}}{3} = \frac{-16\sqrt{3}+48\sqrt{3}}{9} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$.

b. En tournant le rectangle autour de l'axe Oy, on obtient un cylindre de rayon x et de hauteur $y = -x^2+4$. Son volume est $\pi x^2(-x^2+4) = -\pi x^4 + 4\pi x^2$.

On doit chercher le maximum de $f(x) = -\pi x^4 + 4\pi x^2$, autrement dit le ou les x tels que $f'(x)=0$. On a $f'(x) = -4\pi x^3 + 8\pi x$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -4\pi x^3 + 8\pi x = 0 \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2-2)=0$

$\Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x^2-2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Comme on doit avoir $x>0$, on exclut les solutions $x=0$ et $x=-\sqrt{2}$, et il nous reste $x=\sqrt{2}$.

Tableau de variation:

x		$\sqrt{2}$	
Signes de $f'(x)$	+	0	−
croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	max	↘

Ainsi le volume est maximale si $x=\sqrt{2}$ et il vaut $-\pi(\sqrt{2})^4 + 4\pi(\sqrt{2})^2 = -4\pi + 8\pi = 4\pi$.

c. En tournant le rectangle autour de Ox, on obtient un cylindre de rayon $y=-x^2+4$ et de hauteur $2x$. Son volume est $\pi(-x^2+4)^2\cdot 2x = 2\pi(x^4-8x^2+16)x =$
$= 2\pi(x^5-8x^3+16x)$.

On doit chercher le maximum de $f(x)=2\pi(x^5-8x^3+16x)$, autrement dit le ou les x tels que $f'(x)=0$. On a $f'(x)=2\pi(5x^4-24x^2+16)$.

$f'(x)=0 \Rightarrow 2\pi(5x^4-24x^2+16)=0 \Rightarrow 5x^4-24x^2+16=0$.

Posons $u=x^2$. On obtient l'équation $5u^2-24u+16=0$, équation du 2e degré de la forme $au^2+bu+c=0$ avec $a=5$, $b=-24$ et $c=16$. On a $\Delta=b^2-4ac=(-24)^2-4\cdot 5\cdot 16=$
$=576-320=256$ et $\sqrt{\Delta}=16$; les solutions sont $u=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{24+16}{2\cdot 5}=\dfrac{40}{10}=4$ et
$u=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{24-16}{2\cdot 5}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$.

Avec $u=4$ et $u=x^2$, on a $x=\pm 2$.

Avec $u=\dfrac{4}{5}$ et $u=x^2$, on a $x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Or, dans le problème, on doit avoir $0<x<2$ (si $x=0$ ou $x=2$, le volume vaut 0, ce qui n'est pas un maximum).

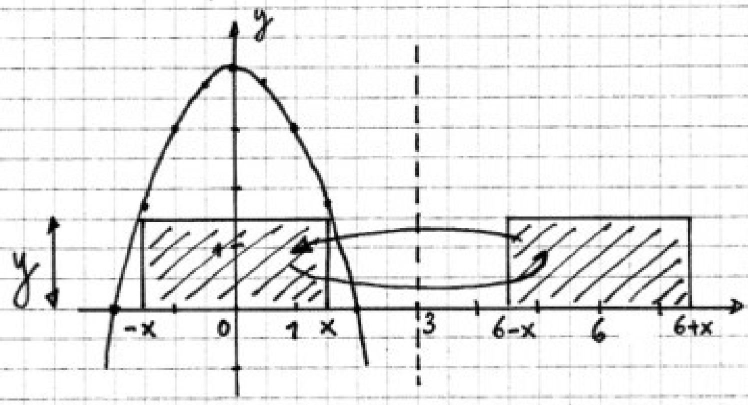
La seule solution qui convient est donc $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tableau de variation:

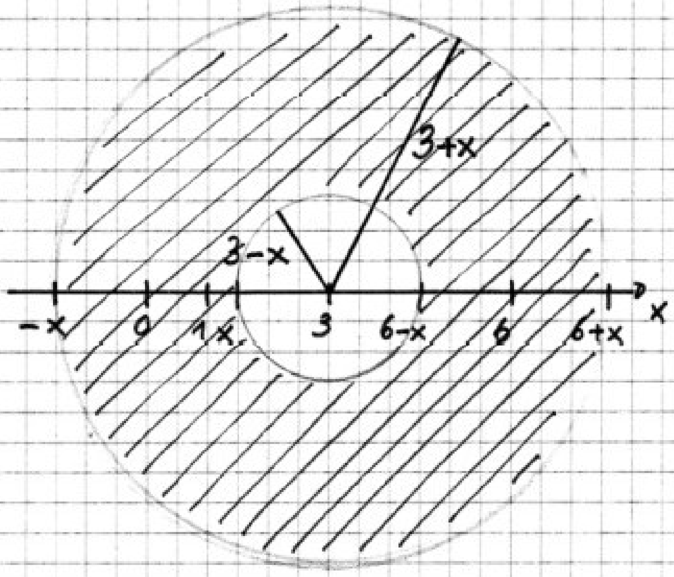
x		$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	
Signes de $f'(x)$	+	0	−
Croissance ou décroissance de $f(x)$	↗	max	↘

Ainsi le volume est maximum si $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ et il vaut $2\pi\left(\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^5-8\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^3+16\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=$
$=2\pi\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^4-8\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+16\right)=\dfrac{4\pi\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^4-8\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+16\right)=$
$=\dfrac{4\pi\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{16}{25}-8\cdot\dfrac{4}{5}+16\right)=\dfrac{4\pi\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{16}{25}-\dfrac{32}{5}+16\right)=\dfrac{4\pi\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{256}{25}=\dfrac{1024\pi\sqrt{5}}{125}$

d. On a la situation suivante:



Vu de dessus:



Le volume du solide obtenu est le volume du cylindre de rayon $3+x$ et de hauteur $y=-x^2+4$ moins le volume du cylindre de rayon $3-x$ et de hauteur $y=-x^2+4$. Il vaut donc $\pi(3+x)^2(-x^2+4)-\pi(3-x)^2(-x^2+4)=$

$=\pi(-x^2+4)\left((3+x)^2-(3-x)^2\right)=\pi(-x^2+4)\left(9+6x+x^2-(9-6x+x^2)\right)=$

$=\pi(-x^2+4)(9+6x+x^2-9+6x-x^2)=\pi(-x^2+4)12x=12\pi(-x^2+4)x=$

$=12\pi(-x^3+4x)$.

On doit donc chercher le maximum de $f(x)=12\pi(-x^3+4x)$, autrement dit le ou les x tels que $f'(x)=0$. On a $f'(x)=12\pi(-3x^2+4)$.

$f'(x)=0 \Rightarrow 12\pi(-3x^2+4)=0 \Rightarrow -3x^2+4=0 \Rightarrow 3x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Comme $x>0$, la solution est $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

<u>Tableau de variation:</u>

x		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

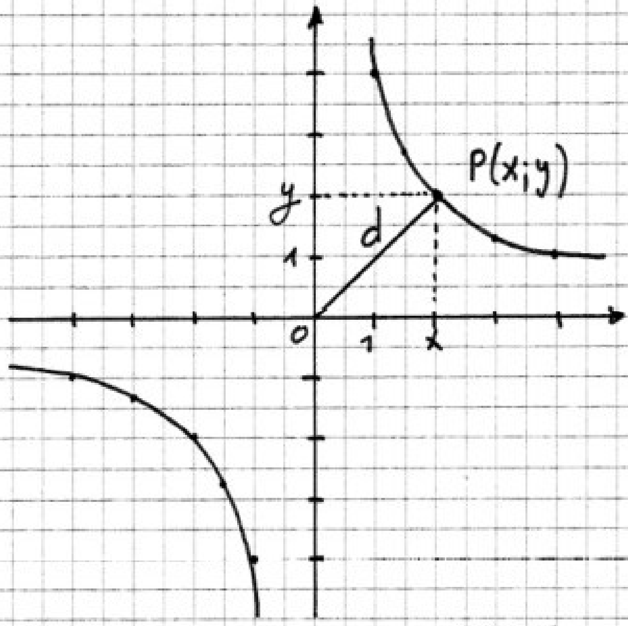
Ainsi le volume est maximum si $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et il vaut $12\pi\left(-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3+4\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)=$

$=12\pi\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+4\right)=8\pi\sqrt{3}\left(-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+4\right)=8\pi\sqrt{3}\left(-\frac{4}{3}+4\right)=$

$=8\pi\sqrt{3}\cdot\frac{8}{3}=\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 6.80

On a $f(x)=\frac{4}{x}$:



La distance entre un point $P(x;y)$ et l'origine est $d=\sqrt{x^2+y^2}$.

On a en outre $y=\frac{4}{x}$.

On peut donc écrire $d=\sqrt{x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}$.

On doit chercher le minimum de la fonction $f(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}$ (avec $x>0$: une fois trouvé le point $P(x;y)$ avec $x>0$, on aura, par symétrie, le point $P(-x;-y)$ qui répondra aussi à la question).

On doit donc chercher le ou les $x>0$ tels que $f'(x)=0$.

$$\text{On a } f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}}\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4+16}{x^2}}}\left(2x+16\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{x^3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\,\frac{\sqrt{x^4+16}}{x}}\left(2x-\frac{32}{x^3}\right)=\frac{x}{2\sqrt{x^4+16}}\left(2x-\frac{32}{x^3}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^4+16}}\left(x^2-\frac{16}{x^2}\right).$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^4+16}}\left(x^2-\frac{16}{x^2}\right)=0 \Rightarrow x^2-\frac{16}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=\frac{16}{x^2} \Rightarrow x^4=16$$

$$\Rightarrow x=2 \quad (x>0).$$

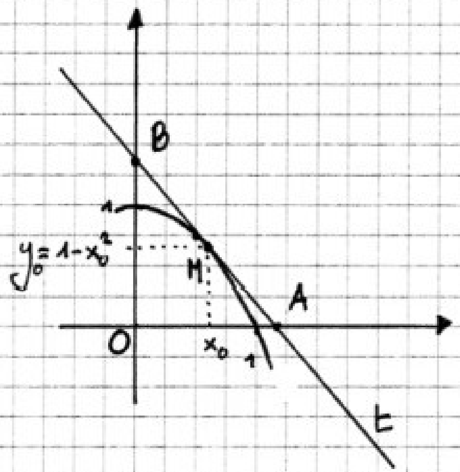
Avec $x=2$, on a $y=\frac{4}{x}=\frac{4}{2}=2$.

On peut vérifier par un tableau de variation que $x=2$ est bien un minimum de f.

Par conséquent, les points $(2;2)$ et $(-2;-2)$ sont à distance minimum de f.

Exercice 6.81

On a la situation suivante :



Les coordonnées du point M sont $(x_0; y_0)$ avec $y_0 = 1-x_0^2$.
L'équation de la tangente t à $f(x)=1-x^2$ en M est $y=mx+h$ avec $m=f'(x_0)$ et h est calculé grâce aux coordonnées de m.
On a $f'(x)=-2x$. Ainsi $m=f'(x_0)=-2x_0$.
L'équation de t s'écrit donc $y=-2x_0x+h$.
Avec le point $M(x_0;y_0)=M(x_0;1-x_0^2)$, on a $1-x_0^2=-2x_0x_0+h$
$\Rightarrow 1-x_0^2=-2x_0^2+h \Rightarrow h=1+x_0^2$.
L'équation de la tangente t est donc $y=-2x_0x+1+x_0^2$.
Avec $x=0$, on a $y=1+x_0^2$. Les coordonnées de B sont donc $(0;1+x_0^2)$.
Avec $y=0$, on a $0=-2x_0x+1+x_0^2 \Rightarrow 2x_0x=1+x_0^2 \Rightarrow x=\frac{1}{2x_0}+\frac{x_0}{2}$. Les coordonnées de A sont donc $\left(\frac{1}{2x_0}+\frac{x_0}{2}; 0\right)$.
L'aire du triangle OAB est $\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x_0}+\frac{x_0}{2}\right)\cdot\left(1+x_0^2\right)=$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0}+x_0\right)\left(1+x_0^2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_0}+x_0+x_0+x_0^3\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_0}+2x_0+x_0^3\right)$.
On doit chercher le minimum de la fonction $f(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+2x+x^3\right)$, autrement dit chercher les $x_0 \geqslant 0$ tels que $f'(x_0)=0$.
On a $f'(x)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}+2+3x^2\right)$.
$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}+2+3x^2\right)=0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2}+2+3x^2=0 \Rightarrow -1+2x^2+3x^4=0$
$\Rightarrow 3x^4+2x^2-1=0$.
On pose $u=x^2$. On obtient l'équation $3u^2+2u-1=0$, équation du 2e degré de la forme $au^2+bu+c=0$ avec $a=3$, $b=2$ et $c=-1$. On a $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\cdot3\cdot(-1)=$
$=4+12=16$ et $\sqrt{\Delta}=4$. Les solutions sont $u=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+4}{2\cdot3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et
$u=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-4}{2\cdot3}=\frac{-6}{6}=-1$.
Avec $u=\frac{1}{3}$ et $u=x^2$, on obtient $x=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(x>0)$.

Le cas $u = -\frac{1}{3}$ et $u = x^2$ est impossible.

On obtient donc $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

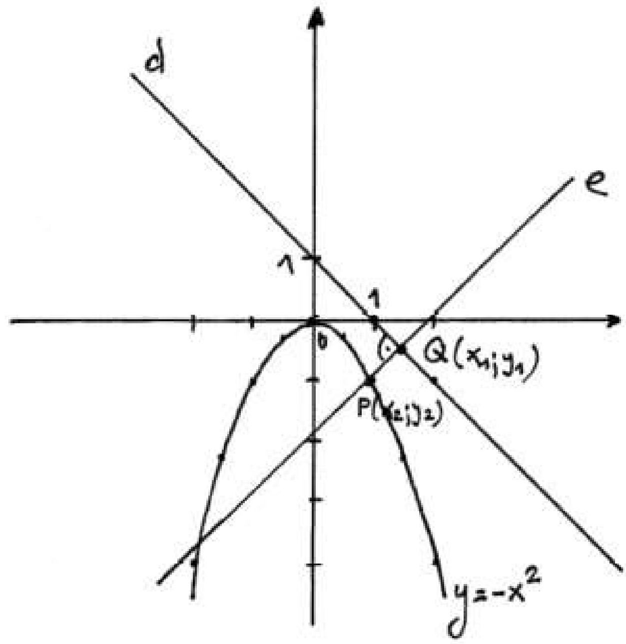
On peut vérifier avec un tableau de variation que $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ est un minimum de f.

Avec $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, on a $y_0 = 1 - x_0^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Les coordonnées de M pour que l'aire ABC soit minimale sont $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 6.82

On a la situation suivante:



En éliminant le paramètre λ, la droite d peut s'écrire $y=-\lambda=-(x-1)=-x+1$.
Sa pente est $m_1=-1$. Toute droite perpendiculaire à d aura une pente $m_2=-\frac{1}{m_1}=$
$=-\frac{1}{-1}=1$. La droite e perpendiculaire à d s'écrira donc $y=x+h$.
Soit $Q(x_1;y_1)$ un point de d. On a $y_1=-x_1+1$.
La droite perpendiculaire à d passant par Q a pour équation $y=x+h$ où h est calculé grâce au point $Q(x_1;-x_1+1)$: $-x_1+1=x_1+h \Rightarrow h=-2x_1+1$.
Ainsi l'équation de e passant par Q est $y=x-2x_1+1$.
Soit $P(x_2;y_2)$ l'intersection de e et $y=-x^2$.
On doit avoir $y_2=x_2-2x_1+1$ et $y_2=-x_2^2 \Rightarrow -x_2^2=x_2-2x_1+1$
$\Rightarrow 2x_1=x_2^2+x_2+1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}(x_2^2+x_2+1)$.
La distance entre $y=-x^2$ et d, et, donc, la distance entre P et Q, est $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

On a $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_2-2x_1+1\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=$
$=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_2\\x_2-2x_1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$. Ainsi $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_2)^2}=$
$=(x_1-x_2)\sqrt{2}$ (on suppose $x_1>x_2$, comme sur le dessin).

Avec $x_1=\frac{1}{2}(x_2^2+x_2+1)$, on obtient $\|\overrightarrow{PQ}\|=\left(\frac{1}{2}(x_2^2+x_2+1)-x_2\right)\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_2^2+x_2+1-2x_2)=$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_2^2-x_2+1)$.

On doit donc trouver le minimum de la fonction $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-x+1)$, autrement dit trouver $x\ (=x_2)$ tel que $f'(x)=0$.

On a $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2x-1)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(2x-1) = 0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

On peut vérifier avec un tableau de variation que $x = \frac{1}{2}$ est un minimum de f.

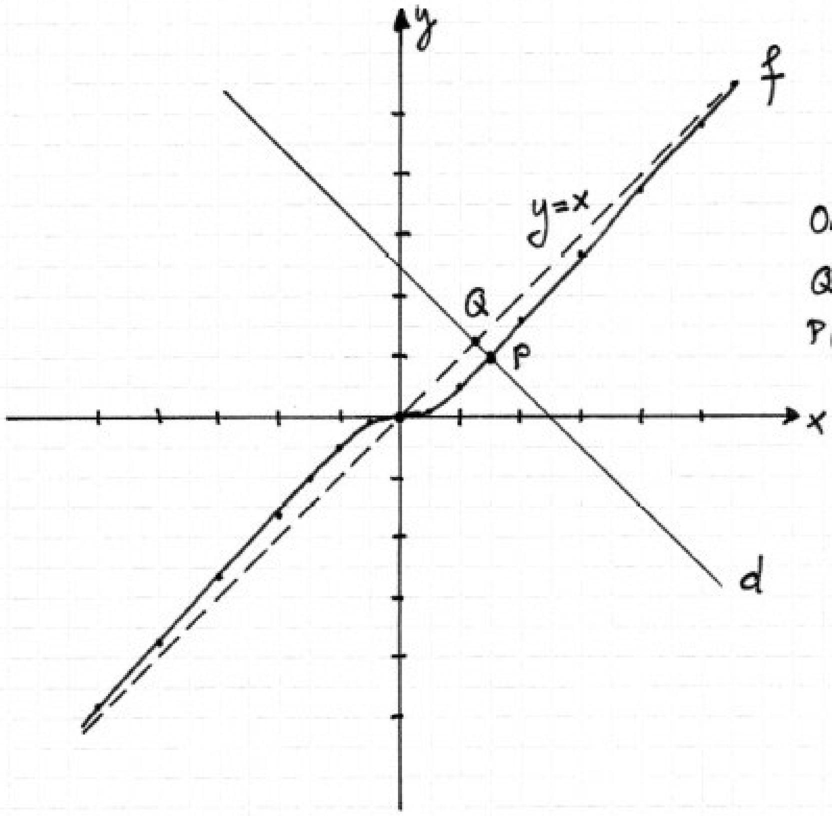
On a ainsi $x_2 = \frac{1}{2}$ et, alors, $y_2 = -{x_2}^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$.

Le point de $y = -x^2$ le plus proche de d est donc $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Exercice 6.83.

On a $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

a.



On pose:
$Q(x_1;y_1)$
$P(x_2;y_2)$

b. Commençons par chercher l'asymptote oblique de f.

On effectue la division euclidienne de x^3 par x^2+1:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline -(x^3+x) & x \\ -x & \end{array}$$

Ainsi $y=x$ est l'asymptote oblique de f.

Sa pente vaut 1. Toute droite perpendiculaire à cette asymptote aura une pente de $-\frac{1}{1}=-1$ et s'écrira donc e: $y=-x+h$.

Soit $Q(x_1;y_1)$ un point de l'asymptote oblique. On a $y_1=x_1$.

La droite perpendiculaire à cette asymptote passant par Q a pour équation $y=-x+h$ où h est calculé grâce au point $Q(x_1;x_1)$: $x_1=-x_1+h \Rightarrow h=2x_1$.

Ainsi l'équation de d passant par Q est $y=-x+2x_1$.

Soit $P(x_2;y_2)$ l'intersection de d avec f.

On doit avoir $y_2=-x_2+2x_1$ et $y_2=\frac{x_2^3}{x_2^2+1} \Rightarrow -x_2+2x_1=\frac{x_2^3}{x_2^2+1}$

$$\Rightarrow 2x_1=\frac{x_2^3}{x_2^2+1}+x_2=\frac{x_2^3+x_2(x_2^2+1)}{x_2^2+1}=\frac{x_2^3+x_2^3+x_2}{x_2^2+1}=\frac{2x_2^3+x_2}{x_2^2+1} \Rightarrow x_1=\frac{2x_2^3+x_2}{2x_2^2+2}.$$

La distance entre d et f, et, donc, la distance entre P et Q, est $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

On a $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\\frac{x_2^3}{x_2^2+1}\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=$

$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{x_2^3}{x_2^2+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ \frac{x_2^3}{x_2^2+1} - x_1 \end{pmatrix}.$$

Avec $x_1 = \frac{2x_2^3+x_2}{2x_2^2+2}$, on a $x_2 - x_1 = x_2 - \frac{2x_2^3+x_2}{2x_2^2+2} = \frac{x_2(2x_2^2+2) - 2x_2^3 - x_2}{2x_2^2+2} =$

$= \frac{2x_2^3 + 2x_2 - 2x_2^3 - x_2}{2x_2^2+2} = \frac{x_2}{2x_2^2+2}$ et $\frac{x_2^3}{x_2^2+1} - x_1 = \frac{x_2^3}{x_2^2+1} - \frac{2x_2^3+x_2}{2x_2^2+2} =$

$= \frac{2x_2^3 - 2x_2^3 - x_2}{2x_2^2+2} = \frac{-x_2}{2x_2^2+2}$.

On obtient ainsi : $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2x_2^2+2} \\ \frac{-x_2}{2x_2^2+2} \end{pmatrix} = \frac{x_2}{2x_2^2+2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\|\overrightarrow{PQ}\| = \left| \frac{x_2}{2x_2^2+2} \right| \sqrt{1^2+(-1)^2} = \left| \frac{\sqrt{2}\, x_2}{2x_2^2+2} \right|$.

Comme on doit avoir $x_2 \geqslant 0$ (voir énoncé), on obtient $\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{\sqrt{2}\, x_2}{2x_2^2+2}$.

On doit donc trouver le maximum de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{2}\, x}{2x^2+2}$, autrement dit trouver x $(= x_2)$ tel que $f'(x) = 0$.

On a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = \sqrt{2}x$ et $v = 2x^2+2$.

Ainsi $u' = \sqrt{2}$ et $v = 4x$ et $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\sqrt{2}(2x^2+2) - \sqrt{2}x \cdot 4x}{(2x^2+2)^2} =$

$= \frac{2\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}x^2}{(2x^2+2)^2} = \frac{-2\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}}{(2x^2+2)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}}{(2x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow -2\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Comme $x_2 \geqslant 0$, on en conclut que $x_2 = 1$.

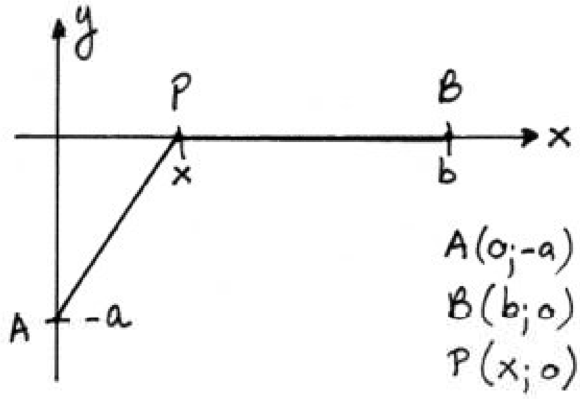
Avec $x_2 = 1$, on a $y_2 = \frac{x_2^3}{x_2^2+1} = \frac{1^3}{1^2+1} = \frac{1}{2}$.

Ainsi le point de f d'abscisse positive à distance maximale de l'asymptote oblique est $(1; \frac{1}{2})$.

La distance est alors $\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{\sqrt{2}\, x_2}{2x_2^2+2} \overset{x_2=1}{=} \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 6.84

On a la situation suivante :



La distance entre A et P est donnée par $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \right\| =$
$= \sqrt{x^2+a^2}$.

La distance entre P et B est $b - x$ $(b \geqslant x)$.

La distance entre A et P se fait en canot à 4 km/h.

Ainsi le temps de parcours entre A et P est de $\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{4}$ heures.

La distance entre P et B se fait à pied à 5 km/h.

Ainsi le temps de parcours entre P et B est de $\frac{b-x}{5}$ heures.

Par conséquent, le temps total pour aller de A à B en passant par P est
$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{4} + \frac{b-x}{5}$.

Il faut trouver x pour que ce temps de parcours soit minimal, autrement dit trouver x tel que $f'(x) = 0$ avec $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{4} + \frac{b-x}{5}$.

On a $f'(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}} \cdot 2x - \frac{1}{5} = \frac{x}{a\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{5}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{a\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{x}{a\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x = a\sqrt{x^2+a^2}$

$\Rightarrow (5x)^2 = a^2(x^2+a^2) \Rightarrow 25x^2 = a^2x^2 + a^4 \Rightarrow 25x^2 - a^2x^2 = a^4$

$\Rightarrow (25-a^2)x^2 = a^4$ (on remarque qu'on doit avoir $25 - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 25$
$\Rightarrow a < 5$ $(a > 0)$ pour que l'équation ait une solution)

$\Rightarrow x^2 = \frac{a^4}{25-a^2} \Rightarrow x = \frac{a^2}{\sqrt{25-a^2}}$ $(x > 0)$.

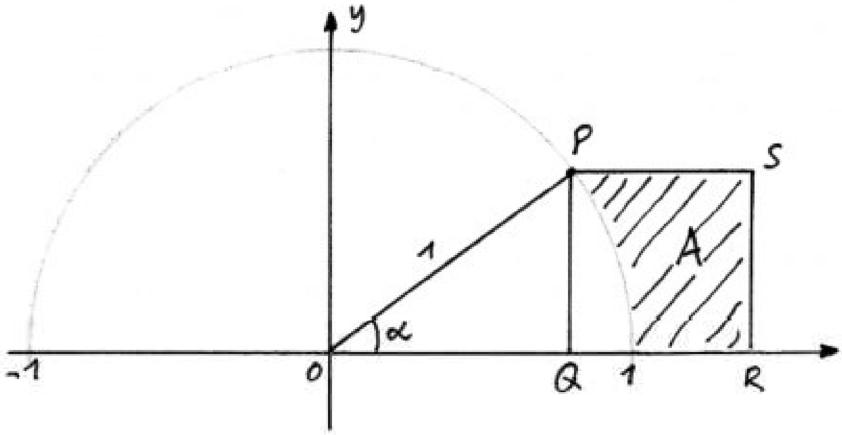
On peut vérifier avec un tableau de variation que ce x donne un maximum de f.

Ainsi, il doit accoster au point $P\left(\frac{a^2}{\sqrt{25-a^2}} ; 0\right)$ et on doit avoir
$\frac{a^2}{\sqrt{25-a^2}} \leqslant b$ et $a < 5$.

Exercice 6.85

On a la situation suivante :

on a $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$



Par la trigonométrie, on a $OQ = \cos\alpha$ et $PQ = \sin\alpha$.

L'aire du triangle OPQ est $\frac{OQ \cdot PQ}{2} = \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha$.

L'aire du carré PQRS est $PQ^2 = \sin^2\alpha$.

L'aire du secteur circulaire d'angle α (en radian) est $\frac{\pi r^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 1^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$.

L'aire de A est donné par aire OPQ + aire PQRS − aire secteur circulaire =

$$= \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha - \frac{\alpha}{2}.$$

On doit donc trouver le maximum de la fonction $f(\alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha - \frac{\alpha}{2}$, autrement dit le ou les x tels que $f'(\alpha) = 0$.

On a $f'(\alpha) = \frac{1}{2}\left(-\sin\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\cos\alpha\right) + 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}.$$

Comme $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, on a $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

Ainsi $f'(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2} = -\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha\left(-\sin\alpha + 2\cos\alpha\right)$.

$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \sin\alpha\left(-\sin\alpha + 2\cos\alpha\right) = 0 \Rightarrow$ soit $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, soit $-\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \sin\alpha = 2\cos\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2 \Rightarrow \tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha \cong 1,107 \text{ rad} \cong 63,435°$.

Tableau de variation:

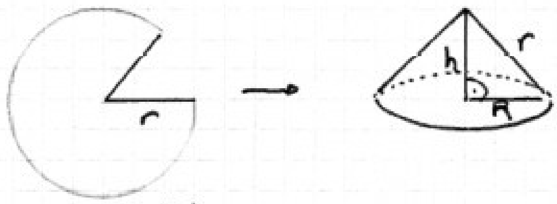
α	0		1,107		$\frac{\pi}{2}$
signes de $f'(\alpha)$	0	+	0	−	
croissance ou décroissance de $f(\alpha)$		↗	max	↘	

Ainsi l'aire de A est maximale si $\alpha \cong 1,107$ rad $\cong 63,435°$.

Dans ce cas, le côté du carré PQRS $= PQ = \sin\alpha \cong 0,894$.

Exercice 6.86

On a la situation suivante:



Le volume du cône est donné par $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$.

En outre, par le théorème de Pythagore, on a $r^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - h^2$.

Ainsi le volume du cône est $V = \frac{\pi(r^2-h^2)h}{3} = \frac{\pi}{3}(r^2h - h^3)$.

Pour r donné, on doit donc trouver le maximum de la fonction $V(h) = \frac{\pi}{3}(r^2h-h^3)$, autrement dit le ou les h tels que $V'(h) = 0$.

On a $V'(h) = \frac{\pi}{3}(r^2 - 3h^2)$.

$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}(r^2-3h^2) = 0 \Rightarrow r^2 - 3h^2 = 0 \Rightarrow 3h^2 = r^2 \Rightarrow h^2 = \frac{r^2}{3} \Rightarrow h = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

On peut vérifier que $h = \frac{r}{\sqrt{3}}$ est un maximum de $V(h)$ par un tableau de variation.

Ainsi si $h = \frac{r}{\sqrt{3}}$, le volume du cône est maximum et il vaut alors

$$V = \frac{\pi}{3}(r^2h - h^3) = \frac{\pi}{3}\left(r^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{3}} - \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{r^3}{\sqrt{3}} - \frac{r^3}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{3r^3 - r^3}{3\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2r^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi r^3}{9\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}\, r^3}{27}.$$

Exercice 6.87

On a l'ellipse d'équation $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$.

a. Avec $x=a\cos\alpha$ et $y=b\sin\alpha$, on a $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=$
$$=b^2(a\cos\alpha)^2+a^2(b\sin\alpha)^2-a^2b^2=a^2b^2\cos^2\alpha+a^2b^2\sin^2\alpha-a^2b^2=$$
$$=a^2b^2(\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{=1})-a^2b^2=a^2b^2-a^2b^2=0.$$

Ainsi le point $P(a\cos\alpha;b\sin\alpha)$ est bien un point de l'ellipse.

b. Avec $P(a\cos\alpha;b\sin\alpha)$, le côté horizontal du rectangle vaut $2a\cos\alpha$ et le côté vertical du rectangle vaut $2b\sin\alpha$.

L'aire du rectangle est alors $2a\cos\alpha\cdot 2b\sin\alpha=4ab\cos\alpha\sin\alpha$.

Pour a et b donné, on doit trouver le ou les α tels que $f(\alpha)=4ab\cos\alpha\sin\alpha$ est maximum, autrement le ou les α tels que $f'(\alpha)=0$.

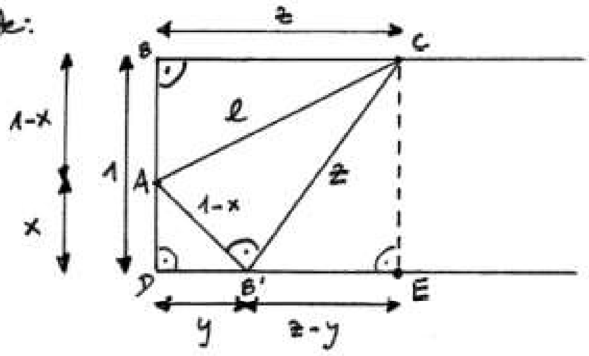
On a $f'(\alpha)=4a(-\sin\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\cos\alpha)=4a(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$.

$$f'(\alpha)=0\Rightarrow 4a(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0\Rightarrow\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0\Rightarrow\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$$
$$\Rightarrow\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1\Rightarrow\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=1\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1\quad(\alpha\in[0;\tfrac{\pi}{2}])$$
$$\Rightarrow\tan\alpha=1\Rightarrow\alpha=45^\circ.$$

Ainsi si $\alpha=45^\circ$, l'aire du rectangle est maximale.

Exercice 6.88

On a la situation suivante:



a.

Dans le triangle $AB'D$, on a $(1-x)^2 = x^2+y^2 \Rightarrow 1-2x+x^2 = x^2+y^2 \Rightarrow y^2 = 1-2x$

$\Rightarrow y = \sqrt{1-2x}$.

Dans le triangle $B'CE$, on a $z^2 = (z-y)^2 + 1^2 \Rightarrow z^2 = \left(z - \sqrt{1-2x}\right)^2 + 1$

$\Rightarrow z^2 = z^2 - 2z\sqrt{1-2x} + 1-2x \quad +1 \Rightarrow -2z\sqrt{1-2x} + 2-2x = 0$

$\Rightarrow 2z\sqrt{1-2x} = 2-2x \Rightarrow z\sqrt{1-2x} = 1-x \Rightarrow z = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-2x}}$.

Dans le triangle ABC, on a $l^2 = (1-x)^2 + z^2 = (1-x)^2 + \dfrac{(1-x)^2}{1-2x} = (1-x)^2\left(1+\dfrac{1}{1-2x}\right) =$

$= (1-x)^2 \dfrac{1-2x+1}{1-2x} = (1-x)^2 \dfrac{2-2x}{1-2x} = \dfrac{(1-x)^2 \cdot 2(1-x)}{1-2x} = \dfrac{2(1-x)^3}{1-2x}$.

On en conclut donc que $l = \sqrt{\dfrac{2(1-x)^3}{1-2x}}$.

b. Il faut chercher le ou les x pour lesquels l est minimum, autrement dit tels que $l' = 0$.

On a $l' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2(1-x)^3}{1-2x}}} \left(\dfrac{2(1-x)^3}{1-2x}\right)' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-2x}{2(1-x)^3}} \cdot \dfrac{-6(1-x)^2(1-2x) - 2(1-x)^3\cdot(-2)}{(1-2x)^2} =$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-2x}{2(1-x)^3}} \cdot \dfrac{(1-x)^2\left(-6(1-2x)+4(1-x)\right)}{(1-2x)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-2x}{2(1-x)^3}} \cdot \dfrac{(1-x)^2(-6+12x+4-4x)}{(1-2x)^2} =$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-2x}{2(1-x)^3}} \cdot \dfrac{(1-x)^2(-2+8x)}{(1-2x)^2} = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{(1-2x)^{1/2}}{2^{1/2}(1-x)^{3/2}}\, \dfrac{(1-x)^2 \cdot 2(4x-1)}{(1-2x)^2} =$

$= \dfrac{(1-x)^{1/2}(4x-1)}{2^{1/2}\,(1-2x)^{3/2}}$.

Ainsi $l' = 0 \Rightarrow \dfrac{(1-x)^{1/2}(4x-1)}{2^{1/2}(1-2x)^{3/2}} = 0 \Rightarrow (1-x)^{1/2}(4x-1) = 0 \Rightarrow$ soit $(1-x)^{1/2} = 0$

$\Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$, soit $4x-1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

Le cas $x=1$ est à écarter car on va avoir $0<x<1$ pour l minimum.

On peut montrer par un tableau de variation que $x = \dfrac{1}{4}$ est bien un minimum de l.

Ainsi l est bien minimum en $x = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 6.89

Par définition, $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$.

a. Soit $x = \log_a 1$. On a alors $a^x = 1$ et, donc, $x = 0$. Ainsi $\log_a 1 = 0$.

b. Soit $z = \log_a(x \cdot y)$. On a alors $a^z = x \cdot y$.
Soient $z_1 = \log_a(x)$ et $z_2 = \log_a(y)$. On a alors $a^{z_1} = x$ et $a^{z_2} = y$. Ainsi
$x \cdot y = a^{z_1} \cdot a^{z_2} = a^{z_1 + z_2}$.
On doit donc avoir $a^z = a^{z_1+z_2}$ et, donc, $z = z_1 + z_2$, d'où $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

c. Soit $z = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$. On a alors $a^z = \frac{x}{y}$.
Soient $z_1 = \log_a(x)$ et $z_2 = \log_a(y)$. On a alors $a^{z_1} = x$ et $a^{z_2} = y$. Ainsi
$\frac{x}{y} = \frac{a^{z_1}}{a^{z_2}} = a^{z_1 - z_2}$.
On doit donc avoir $a^z = a^{z_1 - z_2}$ et, donc $z = z_1 - z_2$, d'où $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

d. D'après c., on a $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
Posons $x = 1$. On obtient $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = \log_a(1) - \log_a(y)$.
D'après a., $\log_a 1 = 0$. Par conséquent $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$.

e. Soient $z_1 = \log_a(x^p)$ et $z_2 = \log_a(x)$.
On a alors $a^{z_1} = x^p$ et $a^{z_2} = x$. Ainsi $a^{z_1} = x^p = (a^{z_2})^p = a^{p z_2}$ et, donc,
$z_1 = p z_2$, d'où $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$.

f. Soit $y = \log_a(x)$. On a alors $a^y = x$.
On peut alors écrire $\frac{b^y}{b^y} a^y = x \Rightarrow b^y \cdot \frac{a^y}{b^y} = x \Rightarrow b^y \left(\frac{a}{b}\right)^y = x$

$\Rightarrow \log_b\left(b^y \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^y\right) = \log_b(x) \overset{b.}{=} \log_b(b^y) + \log_b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^y\right)$.

En posant $z = \log_b(b^y)$, on a $b^z = b^y$ et, donc $z = y$ et $\log_b(b^y) = y$.

Ainsi $\log_b\left(b^y \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^y\right) = y + \log_b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^y\right) \overset{e}{=} y + y \log_b\left(\frac{a}{b}\right) =$

$= y\left(1 + \log_b\left(\frac{a}{b}\right)\right) \overset{c.}{=} y\left(1 + \log_b(a) - \log_b(b)\right)$.

En posant $w = \log_b(b)$, on a $b^w = b$ et, donc $w = 1$ et $\log_b(b) = 1$.

Ainsi $\log_b\left(b^y \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^y\right) = y(1 + \log_b(a) - 1) = y \log_b(a)$.

Comme $b^y \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^y = x$ et $y = \log_a(x)$, on obtient $\log_b(x) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$ et,

donc $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Exercice 6.90

On utilise les propriétés des logarithmes:

a. $\log_a(1)=0$

b. $\log_a(a)=1$

c. $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$

d. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

e. $\log_a\left(\frac{1}{y}\right)=-\log_a(y)$

f. $\log_a(x^p)=p\log_a(x)$

g. $\log_a(x)=\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Elles sont valables pour toutes valeurs de $a>0$. En particulier, si $a=10$, on note $\log_{10}=\log$, et si $a=e$ (constante d'Euler), on note $\log_e=\ln$.

a. $\ln\left(\left(a^5\sqrt[3]{b}\right)/c\right)\overset{d.}{=}\ln\left(a^5\sqrt[3]{b}\right)-\ln(c)\overset{c.}{=}\ln(a^5)+\ln(\sqrt[3]{b})-\ln(c)=$
$=\ln(a^5)+\ln(b^{\frac{1}{3}})-\ln(c)\overset{f.}{=}5\ln(a)+\frac{1}{3}\ln(b)-\ln(c).$

b. $\ln(x+1)-\ln(x-1)\overset{d.}{=}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$

c. $2\ln(a)-\frac{1}{2}\ln(b)+3\ln(c)\overset{f}{=}\ln(a^2)-\ln(b^{1/2})+\ln(c^3)=\ln(a^2)-\ln(\sqrt{b})+\ln(c^3)\overset{c.\text{ et }d.}{=}$
$=\ln\left(\frac{a^2c^3}{\sqrt{b}}\right).$

d. $\ln\left(\sqrt{a.\sqrt[3]{b}}\right)=\ln\left(\left(a.\sqrt[3]{b}\right)^{1/2}\right)\overset{f}{=}\frac{1}{2}\ln(a\cdot\sqrt[3]{b})\overset{c}{=}\frac{1}{2}\left(\ln(a)+\ln(\sqrt[3]{b})\right)=$
$=\frac{1}{2}\left(\ln(a)+\ln(b^{1/3})\right)\overset{f}{=}\frac{1}{2}\left(\ln(a)+\frac{1}{3}\ln(b)\right)=\frac{1}{2}\ln(a)+\frac{1}{6}\ln(b).$

e. $\log(2{,}23\cdot10^{23})\overset{c}{=}\log(2{,}23)+\log(10^{23})\overset{f}{=}\log(2{,}23)+23\log(10)\overset{b}{=}$
$=\log(2{,}23)+23\cdot1=\log(2{,}23)+23.$

f. $\log_2(3)\cdot\log_3(4)\cdot\log_4(5)\overset{g}{=}\log_2(3)\cdot\frac{\log_2(4)}{\log_2(3)}\cdot\frac{\log_2(5)}{\log_2(4)}=\log_2(5).$

Exercice 6.91.

a. $\log x = \frac{1}{3}$ | $10^{\cdots}$

$x = 10^{1/3}$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{10}$

b. $\log x = \frac{4}{3}$ | $10^{\cdots}$

$x = 10^{4/3} = (10^4)^{1/3}$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{10'000}$

$= 10\sqrt[3]{10}$

c. $\log x = \frac{-3}{4}$ | $10^{\cdots}$

$x = 10^{-3/4} = \frac{1}{10^{3/4}}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{1000}}$

d. $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96)$ | Propriété des log

$\ln((x+1)(x+5)) = \ln(96)$ | $e^{\cdots}$

$(x+1)(x+5) = 96$ | distributivité

$x^2+6x+5 = 96$ | -96

$x^2+6x-91 = 0$ | factorisation

$(x+13)(x-7) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = -13$, soit $x = 7$

mais, si $x = -13$, on ne peut pas calculer $\ln(x+1) = \ln(-13+1) = \ln(-12)$

$\Rightarrow$ la solution est $x = 7$.

e. $\ln|x+1| + \ln|x+5| = \ln(96)$ | propriété des log

$\ln(|x+1| \cdot |x+5|) = \ln(96)$ | $e^{\cdots}$

$|x+1| \cdot |x+5| = 96$

$|(x+1)(x+5)| = 96$

$\Rightarrow$ soit $(x+1)(x+5) = 96$ et on trouve $x = -13$ et $x = 7$ (voir d.),

soit $(x+1)(x+5) = -96 \Rightarrow x^2+6x+5 = -96 \Rightarrow x^2+6x+101 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=6$ et $c=101$; on a $\Delta = b^2-4ac = 6^2-4\cdot1\cdot101 = 36-404 < 0 \Rightarrow$ aucune solution.

$\Rightarrow$ les solutions de $\ln|x+1| + \ln|x+5| = \ln(96)$ sont $x = -13$ et $x = 7$.

f. $\log(12x+40) - \log(x-4) = 2$	propriété des log
$\log\left(\frac{12x+40}{x-4}\right) = 2$	$10^{\cdots}$
$\frac{12x+40}{x-4} = 10^2 = 100$	$\cdot(x-4)$
$12x+40 = 100(x-4)$	distributivité
$12x+40 = 100x-400$	$-12x$
$40 = 88x-400$	$+400$
$88x = 440$	$:88$
$\Rightarrow x = 5$	

g. $\log(99+\log(8+\log(x-1))) = 2$	$10^{\cdots}$
$99+\log(8+\log(x-1)) = 10^2 = 100$	-99
$\log(8+\log(x-1)) = 1$	$10^{\cdots}$
$8+\log(x-1) = 10^1 = 10$	-8
$\log(x-1) = 2$	$10^{\cdots}$
$x-1 = 10^2 = 100$	$+1$
$\Rightarrow x = 101$	

Exercice 6.92

a. On a $1000^{1000} = (10^3)^{1000} = 10^{3000}$ = 1 suivi de 3000 zéros

$\Rightarrow$ le nombre a 3001 chiffres et ses 4 premiers chiffres sont 1000.

b. On a : $a^b = y \iff b = \log_a(y) \iff b = \frac{\log(y)}{\log(a)} \Rightarrow b\log(a) = \log(y)$
$\Rightarrow 10^{b\log(a)} = 10^{\log(y)} = y$;
ainsi $a^b = 10^{b\log(a)}$.

Ici $a = 1001$ et $b = 999$.

On a $b\log(a) = 999 \cdot \log(1001) = 2997{,}433643$.

Ainsi $1001^{999} = 10^{2997{,}433643} = 10^{2997+0{,}433643} = 10^{2997} \cdot 10^{0{,}433643} =$
$= 2{,}71421 \cdot 10^{2997}$.

$\Rightarrow$ le nombre a 2998 chiffres et ses 4 premiers chiffres sont 2714.

c. Comme en b., on a $a^b = 10^{b\log(a)}$.

Ici $a = 999$ et $b = 1001$.

On a $b\log(a) = 1001 \cdot \log(999) = 3002{,}565054$.

Ainsi $999^{1001} = 10^{3002{,}565054} = 10^{3002+0{,}565054} = 10^{3002} \cdot 10^{0{,}565054} =$
$= 3{,}673277 \cdot 10^{3002}$.

$\Rightarrow$ le nombre a 3003 chiffres et ses 4 premiers chiffres sont 3673.

d. Comme en b., on a $a^b = 10^{b\log(a)}$.

Commençons par nous occuper de 9^9 : $a = 9$ et $b = 9$.

On a $b\log(a) = 9\log(9) = 8{,}58818$

Ainsi $9^9 = 10^{8{,}58818} = 10^{8+0{,}58818} = 10^8 \cdot 10^{0{,}58818} = 3{,}8742 \cdot 10^8$.

On a donc $9^{(9^9)} = 9^{3{,}8742 \cdot 10^8}$: on prend maintenant $a = 9$ et $b = 3{,}8742 \cdot 10^8$.

On a $b\log(a) = 3{,}8742 \cdot 10^8 \cdot \log(9) = 3{,}69693 \cdot 10^8$.

Ainsi $9^{(9^9)} = 10^{3{,}69693 \cdot 10^8} = 10^{369'693'099{,}6} = 10^{369'693'099+0{,}629} =$
$= 10^{369'693'099} \cdot 10^{0{,}629} = 4{,}255984 \cdot 10^{369'693'099}$.

$\Rightarrow$ le nombre a 369'693'100 chiffres et ses 4 premiers chiffres sont 4255.