Lycée Jean-Piaget

Série 1

Fonctions exponentielles et logarithmes

Corrigé des exercices

Exercice 1

a) $f(x)=e^{3x}$: $f'(x)=e^{3x}\cdot(3x)'=3e^{3x}$.

b) $f(x)=x^2\cdot e^{-x}=u\cdot v$ avec $u=x^2$ et $v=e^{-x}$: on a $u'=2x$ et $v'=-e^{-x}$
$\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$.

c) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}=u\cdot v$ avec $u=x$ et $v=e^{-x^2}$: on a $u'=1$ et $v'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$
$\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'=1\cdot e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=(1-2x^2)e^{-x^2}$.

d) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-1}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=e^x$ et $v=x^2-1$: on a $u'=e^x$ et $v'=2x$
$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{e^x\cdot(x^2-1)-e^x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{(x^2-2x-1)e^x}{(x^2-1)^2}$.

Exercice 2

a) $f(x)=\ln(x+2)$: on doit avoir $x+2>0\Rightarrow x>-2\Rightarrow D=\,]-2;+\infty[$;
$f'(x)=\dfrac{1}{x+2}\cdot(x+2)'=\dfrac{1}{x+2}$.

b) $f(x)=\ln(x^2-4)$: on doit avoir $x^2-4>0\Rightarrow x^2>4\Rightarrow x<-2$ ou $x>2$
$\Rightarrow D=\,]-\infty;-2[\,\cup\,]2;+\infty[\,=\mathbb{R}-[-2;2]$;
$f'(x)=\dfrac{1}{x^2-4}\cdot(x^2-4)'=\dfrac{2x}{x^2-4}$.

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$: on doit avoir $x-1\neq 0$ et $\dfrac{x^2}{x-1}>0$; comme $x^2\geqslant 0$, on doit avoir
$x-1>0\Rightarrow x>1\Rightarrow D=\,]1;+\infty[$;
$f'(x)=\dfrac{1}{\frac{x^2}{x-1}}\cdot\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)'=\dfrac{x-1}{x^2}\cdot\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-x^2}{x^2(x-1)}=$
$=\dfrac{x^2-2x}{x^2(x-1)}=\dfrac{x-2}{x(x-1)}$.

d) $f(x)=x\cdot\ln(x-1)$: on doit avoir $x-1>0\Rightarrow x>1\Rightarrow D=\,]1;+\infty[$;
$f'(x)=1\cdot\ln(x-1)+x\cdot\dfrac{1}{x-1}=\ln(x-1)+\dfrac{x}{x-1}$.

e) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$: on doit avoir $\dfrac{x-1}{x+1}>0$; soit $x-1>0$ et $x+1>0\Rightarrow x>1$ et $x>-1$
$\Rightarrow x>1$; soit $x-1<0$ et $x+1<0\Rightarrow x<1$ et $x<-1\Rightarrow x<-1$
$\Rightarrow D=\,]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[\,=\mathbb{R}\setminus[-1;1]$;

Comme $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+1)$, on a $f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=$
$= \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$.

f) $f(x)=\ln(\ln(x))$: on doit avoir $x>0$ et $\ln(x)>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow D=]1;+\infty[$;
$f'(x)=\frac{1}{\ln(x)}\cdot(\ln(x))'=\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln(x)}$.

Exercice 3

a) $f(x)=(3-e^x)^2$

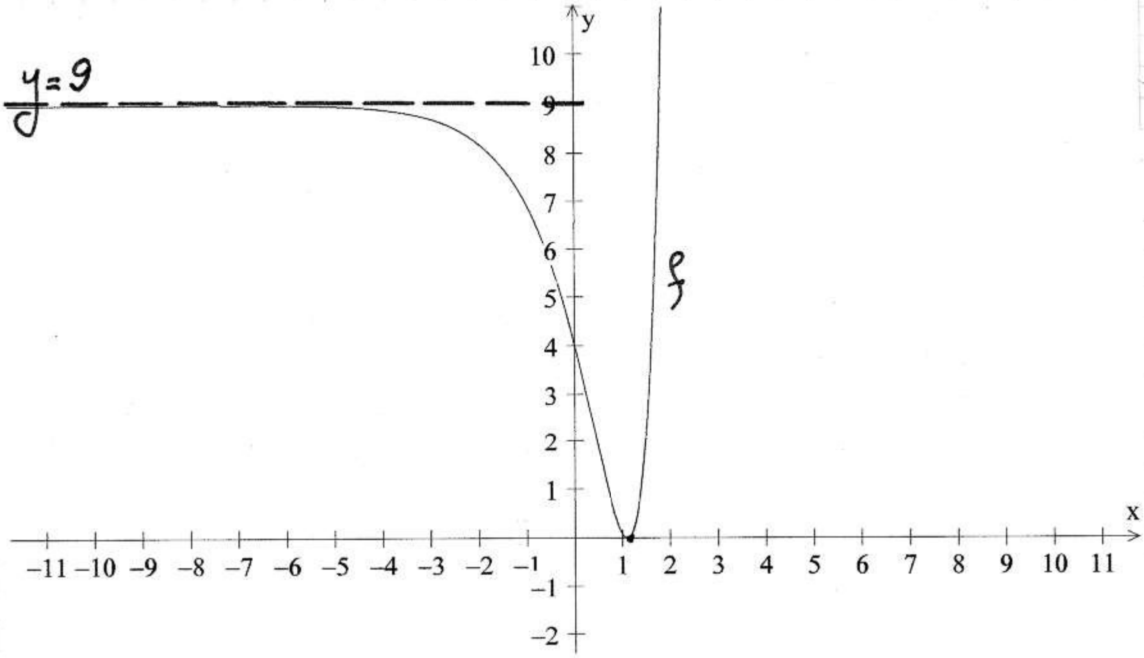
1) Domaine de définition: $D=\mathbb{R}$
2) Parité: $f(-x)=(3-e^{-x})^2 \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.
3) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), elle n'est pas périodique.
4) Intersections avec l'axe x: $f(x)=0 \Rightarrow (3-e^x)^2=0 \Rightarrow 3-e^x=0 \Rightarrow e^x=3 \Rightarrow x=\ln(3)$.
Intersections avec l'axe y: $x=0 \Rightarrow f(x)=(3-e^0)^2=(3-1)^2=4$.
5) Tableaux de signes:

x		$\ln(3)$	
$f(x)$	$+$	0	$+$

6) Asymptotes verticales: aucune car pas d'exclu.
Asymptotes non verticales: comme f contient la fonction exponentielle, elle n'a pas d'asymptote oblique;
on a $\lim_{x\to-\infty}(3-e^x)^2=(3-0)^2=9$ et $\lim_{x\to+\infty}(3-e^x)^2=(3-\infty)^2=$
$=+\infty \Rightarrow y=9$ est asymptote horizontale lorsque $x\to-\infty$
7) Dérivée: $f'(x)=2(3-e^x)\cdot(3-e^x)'=2(3-e^x)(-e^x)=-2(3-e^x)e^x$.
8) Point à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow -2(3-e^x)e^x=0 \Rightarrow 3-e^x=0$ car $e^x>0$ pour tout $x \Rightarrow e^x=3 \Rightarrow x=\ln(3)$.
On a $f(\ln(3))=0$ (voir 4)).
9) Tableau de croissance:

x		$\ln(3)$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min en $(\ln(3);0)$	$\nearrow$

10) Graphe:



b) $f(x) = x^4 \cdot e^{-x}$

1) Domaine de définition: $D = \mathbb{R}$

2) Parité: $f(-x) = (-x)^4 \cdot e^{-(-x)} = x^4 \cdot e^x \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

3) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), elle n'est pas périodique.

4) Intersection avec l'axe x: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x^4 = 0$ car $e^{-x} > 0$ pour tout x

$\Rightarrow x = 0$

Intersection avec l'axe y: $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0^4 \cdot e^0 = 0$.

5) Tableau de signes:

x		0	
$f(x)$	$+$	0	$+$

6) Asymptotes verticales: aucune car pas d'exclu.

Asymptotes non verticales: comme f contient la fonction exponentielle, elle n'a pas d'asymptote oblique;

on a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 \cdot e^{-x} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \cdot e^{-x} =$ $= +\infty \cdot 0 = 0$ car l'exponentielle gagne; ainsi $y = 0$ est asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

7) Dérivée: $f'(x) = 4x^3 \cdot e^{-x} + x^4 \cdot (-e^{-x}) = x^3(4-x)e^{-x}$.

8) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow x^3(4-x)e^{-x} = 0$ avec $e^{-x} > 0$ pour tout x

$\Rightarrow x^3 = 0$ ou $4 - x = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = 4$;

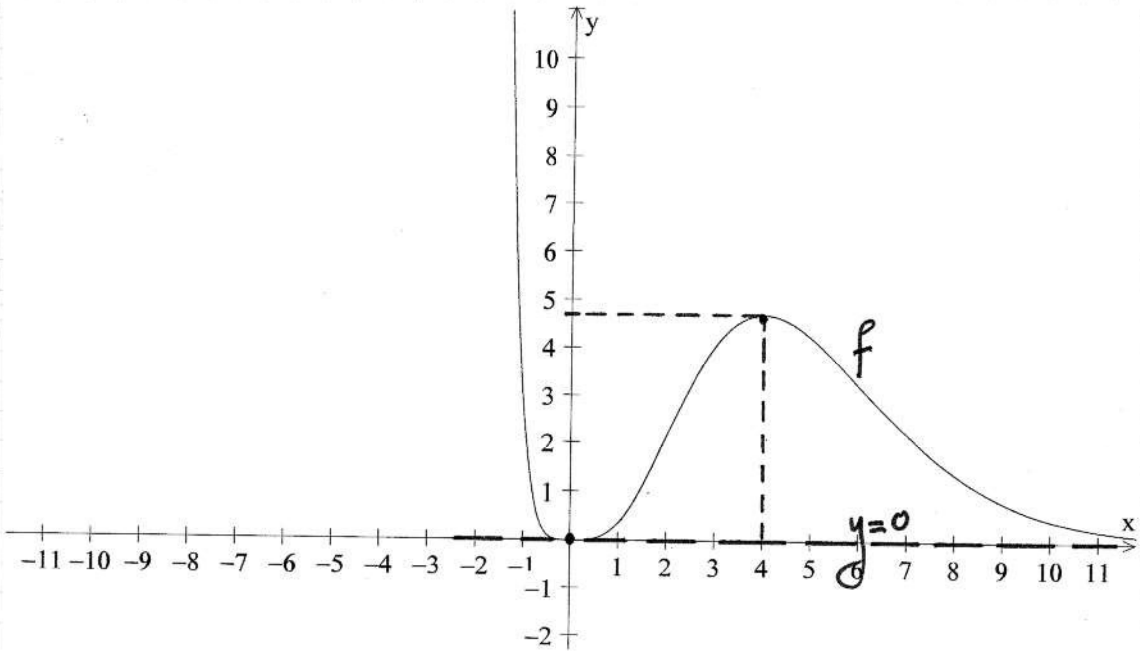
avec $x = 0$, on a $f(x) = 0$;

avec $x = 4$, on a $f(x) = 4^4 \cdot e^{-4} \cong 4{,}69$

9) Tableau de croissance:

x		0		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min en $(0;0)$	$\nearrow$	max en $(4;4{,}69)$	$\searrow$

10) Graphe:



c) $f(x)=(x^2+3x)e^{-x}$

1) Domaine de définition: $D=\mathbb{R}$.

2) Parité: $f(-x)=((-x)^2+3(-x))e^{-(-x)}=(x^2-3x)e^{x}\neq\pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

3) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), elle n'est pas périodique.

4) Intersections avec l'axe x: $f(x)=0 \Rightarrow (x^2+3x)e^{-x}=0 \Rightarrow x^2+3x=0$ car $e^{-x}>0$ pour tout $x \Rightarrow x(x+3)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=-3$

Intersection avec l'axe y: $x=0 \Rightarrow f(x)=0$.

5) Tableau de signes:

x		-3		0	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

6) Asymptotes verticales: aucun car pas d'excl.

Asymptotes non verticales: Comme f contient la fonction exponentielle, elle n'a pas d'asymptote oblique;

on a $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)e^{-x}=+\infty\cdot+\infty=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x^2+3x)e^{-x}=$
$=+\infty\cdot 0=0$ car l'exponentielle gagne; ainsi $y=0$ est asymptote horizontale lorsque $x\to+\infty$.

7) Dérivée: $f'(x) = (2x+3)e^{-x} + (x^2+3x)(-e^{-x}) = (2x+3-x^2-3x)e^{-x} =$
$= (-x^2-x+3)e^{-x}.$

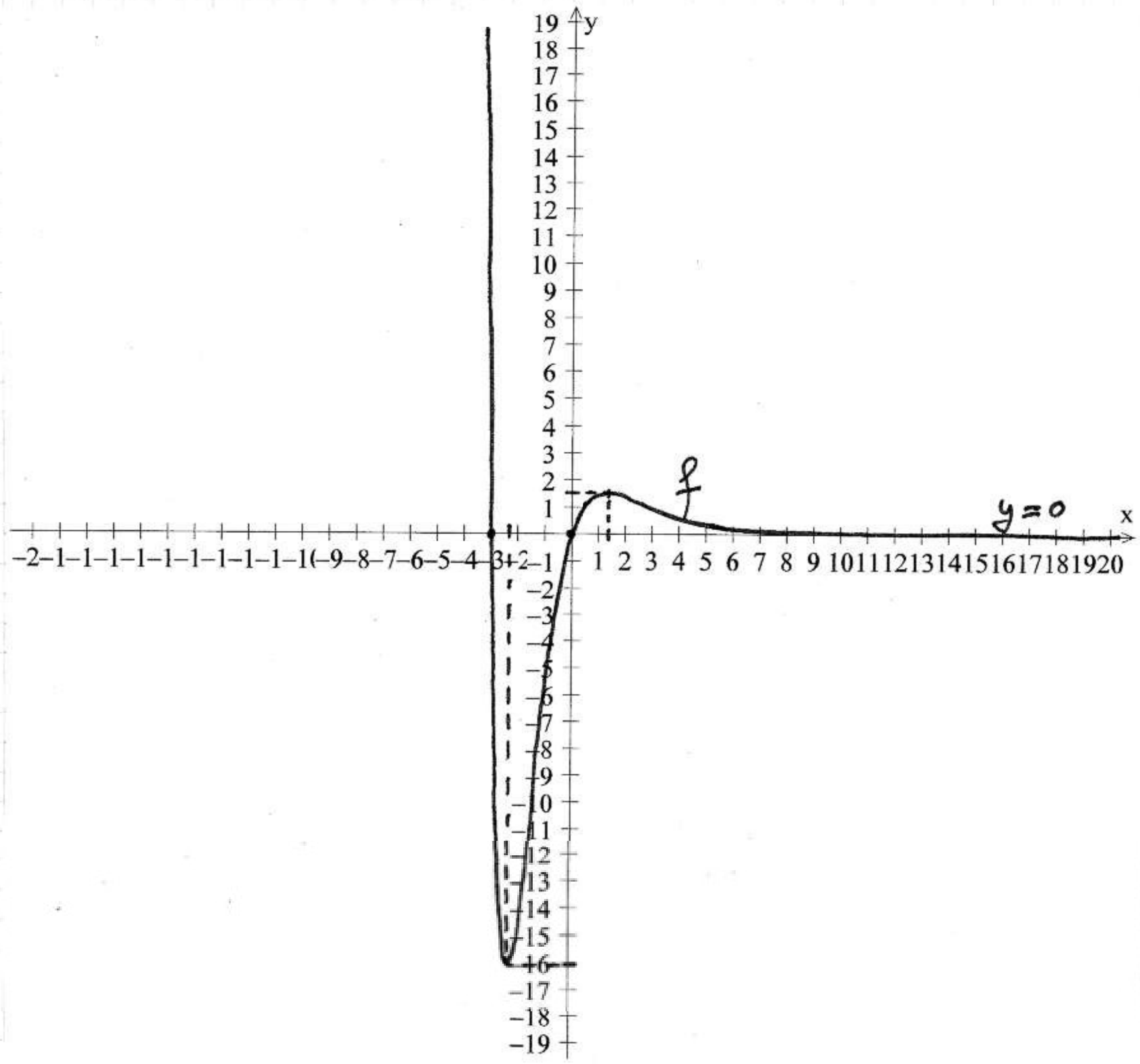
8) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow (-x^2-x+3)e^{-x}=0 \Rightarrow -x^2-x+3=0$ car
$e^{-x}>0$ pour tout $x \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+12}}{-2} = -\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \cong \begin{cases} -2,3 \\ 1,3 \end{cases}$;

avec $x \cong -2,3$, on a $f(x) \cong -16,06$;
avec $x \cong 1,3$, on a $f(x) \cong 1,52$.

9) Tableau de croissance:

x		$-2,3$		$1,3$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min en $(-2,3; -16,06)$	$\nearrow$	max en $(1,3; 1,52)$	$\searrow$

10) Graphique:



d) $f(x) = \ln^2(x)$

1) <u>Domaine de définition:</u> on doit avoir $x > 0 \Rightarrow D =]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

2) <u>Parité:</u> comme $D = \mathbb{R}_+^*$, f n'est ni paire, ni impaire.

3) <u>Périodicité:</u> comme $D = \mathbb{R}_+^*$, f n'est pas périodique.

4) <u>Intersections avec l'axe x:</u> $f(x) = 0 \Rightarrow \ln^2(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

<u>Intersection avec l'axe y:</u> aucune, puisque $x > 0$.

5) <u>Asymptotes verticales:</u> on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln^2(x) = (-\infty)^2 = +\infty$

$\Rightarrow x = 0$ est une asymptote verticale lorsque $x \to 0^+$

<u>Asymptotes non verticales:</u> comme f contient la fonction ln, elle n'a pas d'asymptote oblique; comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln^2(x) = (+\infty)^2 = +\infty$, elle n'a pas non plus d'asymptote horizontale.

6) <u>Tableau de signes:</u>

x		0		1	
$f(x)$	////	//	$+$	0	$+$

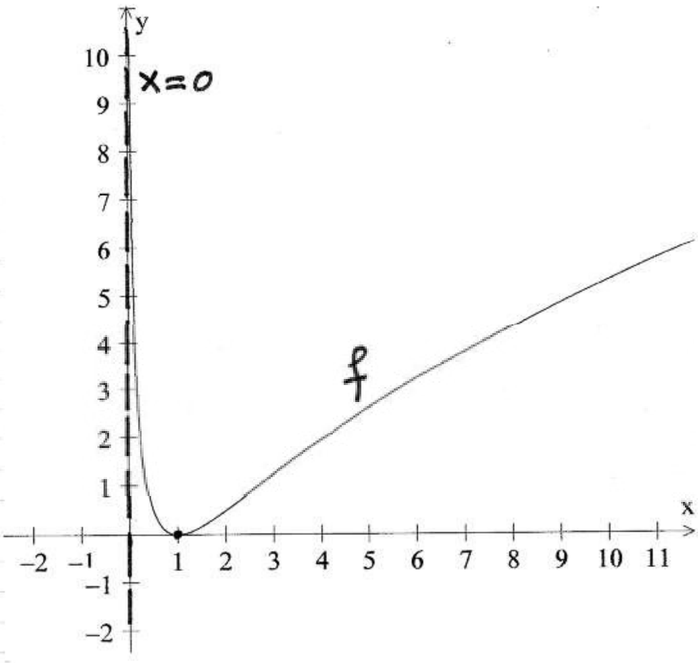
7) <u>Dérivée:</u> $f'(x) = 2\ln(x) \cdot (\ln(x))' = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)}{x}$, $x > 0$.

8) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ et on a $f(1) = 0$ (voir 4)).

9) <u>Tableau de croissance:</u>

x		0		1	
$f'(x)$	////	//	$-$	0	$+$
$f(x)$	////	//	$\searrow$	min en $(1;0)$	$\nearrow$

10) <u>Graphique:</u>



e) $f(x) = \ln(x^2+4)$.

1) <u>Domaine de définition:</u> Comme $x^2+4 \geqslant 4$, on a $D = \mathbb{R}$

2) <u>Parité:</u> $f(-x) = \ln((-x)^2+4) = \ln(x^2+4) = f(x) \Rightarrow f$ est paire (son graphe est symétrique par rapport à l'axe y).

3) <u>Périodicité:</u> comme f ne contient pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), elle n'est pas périodique.

4) <u>Intersections avec l'axe x:</u> aucune, car $f(x)=0 \Rightarrow \ln(x^2+4)=0 \Rightarrow x^2+4=1$
$\Rightarrow x^2=-3$, ce qui est exclu.

<u>Intersection avec l'axe y:</u> $x=0 \Rightarrow f(x) = \ln(4)$.

5) <u>Tableau de signes:</u>

x	
$f(x)$	$+$

6) <u>Asymptotes verticales:</u> aucune car pas d'exclu.

<u>Asymptotes nonverticales:</u> Comme f contient la fonction ln, elle n'a pas d'asymptote oblique ; comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln(x^2+4) = +\infty$, elle n'a pas d'asymptote horizontale non plus.

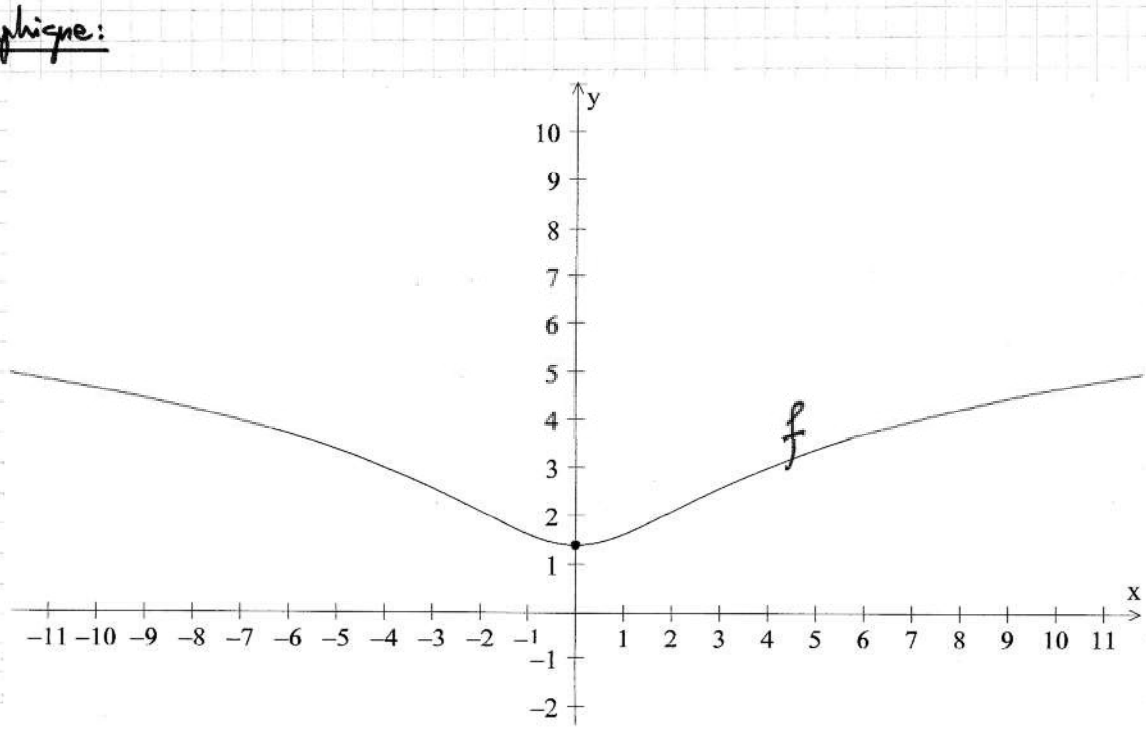
7) <u>Dérivée:</u> $f'(x) = \frac{1}{x^2+4} \cdot (x^2+4)' = \frac{2x}{x^2+4}$.

8) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+4} = 0 \Rightarrow x=0$; avec $x=0$, on a $f(x) = \ln(4)$.

9) <u>Tableau de croissance:</u>

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min en $(0; \ln(4))$	↗

10) <u>Graphique:</u>



f) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x) - 1}$

1) Domaine de définition: on doit avoir $\ln(x) - 1 \neq 0$ et $x > 0 \Rightarrow \ln(x) \neq 1$ et $x > 0$
$\Rightarrow x \neq e$ et $x > 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$ $(e \cong 2,718)$

2) Parité: Comme $D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$, f n'est ni paire, ni impaire.

3) Périodicité: Comme $D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$, f n'est pas périodique.

4) Intersections avec l'axe x: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{\ln(x) - 1} = 0 \Rightarrow x = 0$, mais $0 \notin D$
$\Rightarrow$ pas d'intersection avec l'axe x.

Intersection avec l'axe y: aucune car $x = 0 \notin D$.

5) Tableau de signes:

x		0		e	
$f(x)$	////		$-$	////	$+$

6) Asymptotes verticales: On a: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln(x) - 1} = \dfrac{0^+}{-\infty} = 0^-$;

$\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e^-} \dfrac{x}{\ln(x) - 1} = \dfrac{e}{1^- - 1} = \dfrac{e}{0^-} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e^+} \dfrac{x}{\ln(x) - 1} = \dfrac{e}{1^+ - 1} = \dfrac{e}{0^+} = +\infty$;

ainsi $x = e$ est asymptote verticale.

Asymptotes non verticales: Comme f contient la fonction ln, elle n'a pas d'asymptote oblique; comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln(x) - 1} = \dfrac{+\infty}{+\infty} =$
$= +\infty$ puisque ln perd, f n'a pas non plus d'asymptote horizontale.

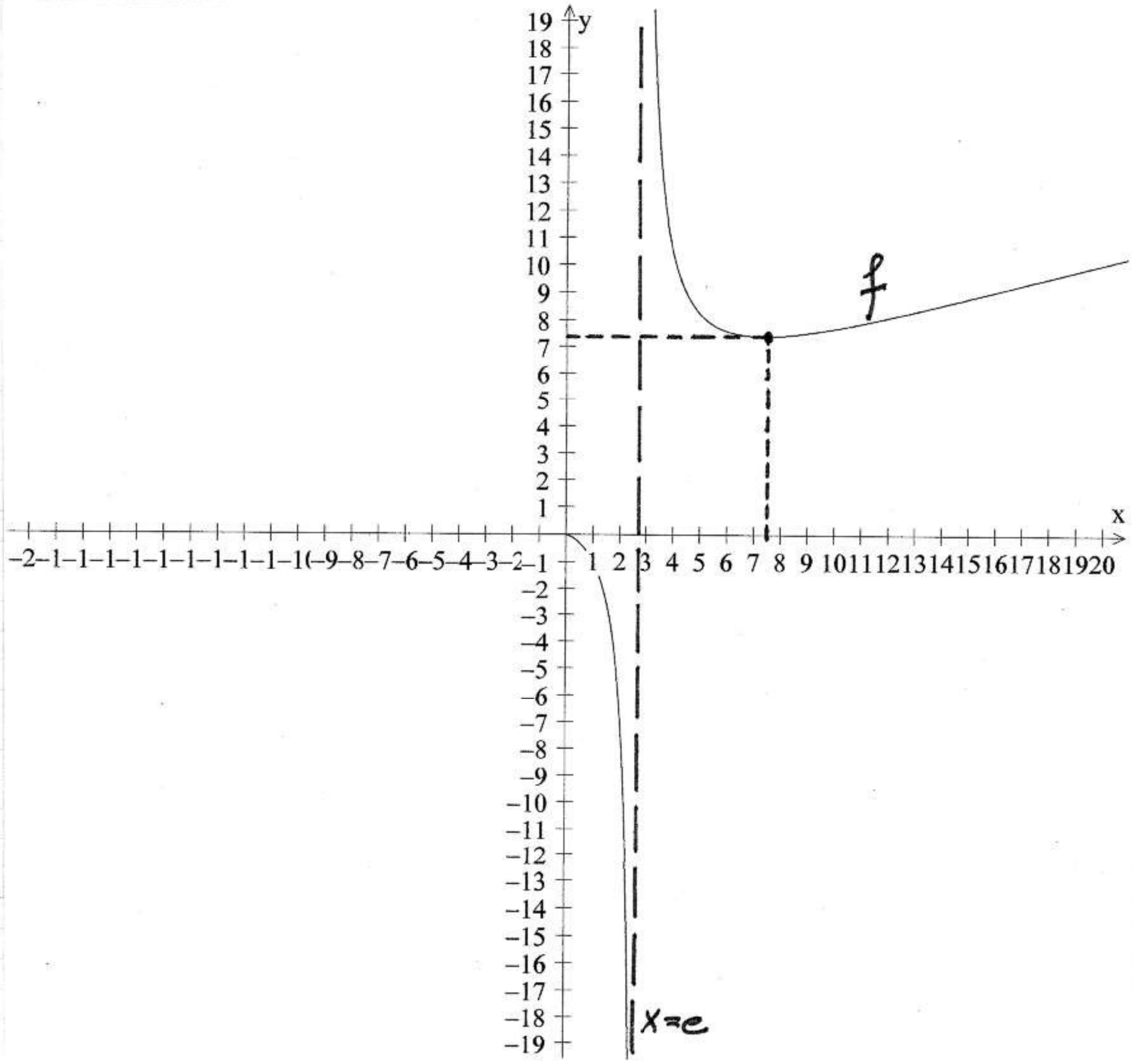
7) Dérivée: $f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = x$ et $v = \ln(x) - 1$, on a $u' = 1$ et $v' = \dfrac{1}{x}$;
ainsi $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{1 \cdot (\ln(x) - 1) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x) - 1)^2} = \dfrac{\ln(x) - 1 - 1}{(\ln(x) - 1)^2} =$
$= \dfrac{\ln(x) - 2}{(\ln(x) - 1)^2}$, $D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$.

8) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{\ln(x) - 2}{(\ln(x) - 1)^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) - 2 = 0$
$\Rightarrow \ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2 \cong 7,39$;
avec $x = e^2$, on a $f(x) = \dfrac{e^2}{\ln(e^2) - 1} = \dfrac{e^2}{2 - 1} = e^2 \cong 7,39$

9) Tableau de croissance:

x		0		e		e^2	
$f'(x)$	////		$-$	////	$-$	0	$+$
$f(x)$	////		$\searrow$	////	$\searrow$	min en $(e^2; e^2)$	$\nearrow$

10) Graphique:


y
x
f
x=e

Exercice 4

L'angle entre les courbes de 2 fonctions f et g en un point d'abscisse $x = x_0$ est l'angle entre les tangentes à f et à g en x_0. Si m_1 est la pente de la tangente à f en x_0 et si m_2 est la pente de la tangente à g en x_0, l'angle aigu φ entre les 2 tangentes est donné par $\tan(\varphi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$ (voir Formulaires et Tables p. 51).

On a en outre $m_1 = f'(x_0)$ et $m_2 = g'(x_0)$.

a) $f(x) = e^{x+2}$ et $g(x) = e^{-x}$: intersection : $f(x) = g(x) \Rightarrow e^{x+2} = e^{-x} \Rightarrow e^{x+2} \cdot e^{x} = 1$

$$\Rightarrow e^{2x+2} = 1 \Rightarrow 2x+2 = \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow x_0 = -1;$$

$$f'(x) = e^{x+2} \Rightarrow m_1 = f'(x_0) = e^{-1+2} = e;$$

$$g'(x) = -e^{-x} \Rightarrow m_2 = g'(x_0) = -e^{1} = -e;$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-e-e}{1+e(-e)} \right| = \left| \frac{-2e}{1-e^2} \right| = \frac{2e}{e^2-1} =$$

$$\cong 0{,}851 \Rightarrow \varphi \cong 40{,}4^\circ$$

$\Rightarrow$ l'angle entre f et g en $x_0 = -1$ est $\sim 40{,}4^\circ$.

b) $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = 2e^{3x}$: intersection : $f(x) = g(x) \Rightarrow e^{2x} = 2e^{3x} \Rightarrow 1 = 2e^{x}$

$$\Rightarrow e^{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) =$$

$$= 0 - \ln(2) = -\ln(2) \cong -0{,}693;$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow m_1 = 2e^{-2\ln(2)} = 2e^{\ln(2^{-2})} = 2 \cdot 2^{-2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$g'(x) = 6e^{3x} \Rightarrow m_2 = 6e^{-3\ln(2)} = 6e^{\ln(2^{-3})} = 6 \cdot 2^{-3} =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4};$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{8}} \right| = \frac{2}{11}$$

$$\Rightarrow \varphi \cong 10{,}3^\circ$$

$\Rightarrow$ l'angle entre f et g en $x_0 = -\ln(2)$ est $\sim 10{,}3^\circ$.

Exercice 5

a) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+2)}{x}$: on doit avoir $x^2+2>0$ (toujours vrai) et $x\neq 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$;

on a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(x^2+2)}{x}=\dfrac{\ln(2)}{0^-}=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x^2+2)}{x}=\dfrac{\ln(2)}{0^+}=+\infty$;

ainsi $x=0$ est une asymptote verticale avec $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$;

On a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(x^2+2)}{x}=\dfrac{+\infty}{-\infty}=0^-$, car ln perd, et

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x^2+2)}{x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=0^+$, car ln perd;

ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale avec $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0^+$.

b) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-3x+1}$: $x^2-3x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+\sqrt5}{2}\cong 2,618\\[4pt] \dfrac{3-\sqrt5}{2}\cong 0,382\end{cases}$;

on a $\lim\limits_{x\to 2,618^-}\dfrac{e^x}{x^2-3x+1}=\dfrac{e^{2,618}}{0^-}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 2,618^+}\dfrac{e^x}{x^2-3x+1}=\dfrac{e^{2,618}}{0^+}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0,382^-}\dfrac{e^x}{x^2-3x+1}=\dfrac{e^{0,382}}{0^+}=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to 0,382^+}\dfrac{e^x}{x^2-3x+1}=\dfrac{e^{0,382}}{0^-}=-\infty$;

ainsi $x=\dfrac{3-\sqrt5}{2}$ est une asymptote verticale avec $\lim\limits_{x\to 0,382^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0,382^+} f(x)=-\infty$, et $x=\dfrac{3+\sqrt5}{2}$ est une asymptote verticale avec $\lim\limits_{x\to 2,618^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2,618^+} f(x)=-\infty$;

on a $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{x^2-3x+1}=\dfrac{0^+}{+\infty}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2-3x+1}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=+\infty$ car e^x gagne;

ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale lorsque $x\to-\infty$ et on a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0^+$;

il n'y a pas d'asymptote non verticale lorsque $x\to+\infty$ car $\dfrac{e^x}{x^2-3x+1}$ va aller vers $+\infty$ lorsque $x\to+\infty$ plus vite que x.

c) $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x+2}$: Comme $e^x+2>2$ pour tout x, on a $D=\mathbb{R}$;

il n'y a donc pas d'asymptote verticale;

on a $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x+2}=\dfrac{2e^x+4-5}{e^x+2}=2+\dfrac{-5}{e^x+2}$;

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{-5}{e^x+2} = \frac{-5}{+\infty} = 0^-$, $y=2$ est une asymptote horizontale avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2^-$;

Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{-5}{e^x+2}\right) = 2 + \frac{-5}{2^+} = -\frac{1}{2}^+$, $y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale avec $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}^+$.

d) $f(x) = \frac{e^x}{2\ln(x-1)}$: on doit avoir $x-1>0$ et $\ln(x-1) \neq 0 \Rightarrow x>1$ et $x-1 \neq 1$
$\Rightarrow x>1$ et $x \neq 2 \Rightarrow \mathcal{D} =]1;2[\cup]2;+\infty[$;

on a $\lim_{x \to 1^+} \frac{e^x}{2\ln(x-1)} = \frac{e}{-\infty} = 0_-$; il n'y a donc pas d'asymptote verticale en $x=0$;

on a $\lim_{x \to 2^-} \frac{e^x}{2\ln(x-1)} = \frac{e^{-2}}{2\ln(1^-)} = \frac{e^{-2}}{0^-} = -\infty$ et

$\lim_{x \to 2^+} \frac{e^x}{2\ln(x-1)} = \frac{e^{-2}}{2\ln(1^+)} = \frac{e^{-2}}{0^+} = +\infty$;

ainsi $x=2$ est une asymptote verticale avec $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$;

Comme $\mathcal{D} =]1;2[\cup]2;+\infty[$, on ne s'occupe que de $x \to +\infty$ pour les asymptotes non verticales ;

on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2\ln(x-1)} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$ car e^x gagne ; en outre $\frac{e^x}{2\ln(x-1)} \to +\infty$ plus vite que x ;

ainsi, il n'y a pas d'asymptote non verticale.

e) $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$: on doit avoir $x>0$ et $\ln(x) \neq 0 \Rightarrow x>0$ et $x \neq 1$
$\Rightarrow \mathcal{D} =]0;1[\cup]1;+\infty[= \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$;

Si $x \neq 1$, on a $f(x) = \frac{2\ln(x)}{\ln^2(x)} = \frac{2}{\ln(x)}$;

on a $\lim_{x \to 0} \frac{2}{\ln(x)} = \frac{2}{-\infty} = 0^-$; il n'y a donc pas d'asymptote verticale en $x=0$;

on a $\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{\ln(x)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\ln(x)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$;

ainsi $x=1$ est une asymptote verticale avec $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$;

comme $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on ne s'occupe que de $x \to +\infty$ pour les asymptotes non verticales;

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\ln(x)} = \dfrac{2}{+\infty} = 0^+$;

ainsi $y=0$ est asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$ et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$.

f) $f(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: comme $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ pour tout x, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$;

il n'y a donc pas d'asymptote verticale;

on a $f(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x + e^{-x} - 3e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 + \dfrac{-3e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

de plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{-3e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = 1 + \dfrac{-3.0^+}{+\infty + 0^+} = 1^-$;

ainsi $y=1$ est asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$ et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1^-$;

on a $f(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{3e^x - 2e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{3e^x}{e^x + e^{-x}} - 2$;

de plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3e^x}{e^x + e^{-x}} - 2\right) = \dfrac{3.0^+}{0^+ + \infty} - 2 = -2^+$;

ainsi $y=-2$ est asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$ et on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2^+$.