Exercice 6.93

On sait que le domaine de définition de $\ln(x)$ est $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ et que sa dérivée est $\frac{1}{x}$.

a. $f(x) = \ln(x+3)$: $x+3>0 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow D =]-3;+\infty[$;
$f'(x) = \frac{1}{x+3}$.

b. $f(x) = \ln(2x)$: $2x>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow D =]0;+\infty[$;
$f'(x) = \frac{1}{2x}\cdot 2 = \frac{1}{x}$.

c. $f(x) = \ln(\frac{x}{2})$: $\frac{x}{2}>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow D =]0;+\infty[$;
$f'(x) = \frac{1}{x/2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{x}$.

d. $f(x) = \ln(ax)$, $a>0$: $ax>0 \Rightarrow x>0$ (puisque $a>0$) $\Rightarrow D =]0;+\infty[$;
$f'(x) = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x}$.

e. $f(x) = \ln(-x)$: $-x>0 \Rightarrow x<0 \Rightarrow D =]-\infty;0[$;
$f'(x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

f. $f(x) = \ln(|x|)$: $|x|>0 \Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}_* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
de plus $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$; ainsi $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x>0 \\ \ln(-x) & \text{si } x<0 \end{cases}$; on a donc

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ \frac{1}{-x}\cdot(-1) & \text{si } x<0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x<0 \end{cases} = \frac{1}{x}.$$

g. $f(x) = \ln(x^2)$: $x^2>0 \Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}_* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
$f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}$.

h. $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$: $\frac{1}{x}>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow D =]0;+\infty[$;
$f'(x) = \frac{1}{1/x}\left(\frac{1}{x}\right)' = x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$.

i. $f(x) = \ln(x^2-4)$: $x^2-4>0 \Rightarrow x^2>4 \Rightarrow x<-2$ ou $x>2 \Rightarrow D =]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[=$
$= \mathbb{R}\setminus[-2;2]$; $f'(x) = \frac{1}{x^2-4}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-4}$.

j. $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x})$: $\sqrt[3]{x}>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow D =]0;+\infty[$;
on a $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x}) = \ln(x^{1/3}) = \frac{1}{3}\ln(x)$ par une propriété des log ;
ainsi $f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3x}$.

k. $f(x) = x\cdot(\ln(x)-1)$: $x>0 \Rightarrow D =]0;+\infty[$; on a $f(x) = u\cdot v$ avec $u = x$ et $v = \ln(x)-1$;
ainsi $u' = 1$ et $v' = \frac{1}{x}$ et $f'(x) = u'v+uv' =$
$= 1\cdot(\ln(x)-1) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x)-1+1 = \ln(x)$.

l. $f(x) = \ln(ax+b)$, $a<0$: $ax+b>0 \Rightarrow ax>-b \Rightarrow x<-\frac{b}{a}$ (puisque $a<0$)
$\Rightarrow D =]-\infty;-\frac{b}{a}[$;
$f'(x) = \frac{1}{ax+b}\cdot a = \frac{a}{ax+b}$.

m. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$: $\frac{x^2}{x-1}>0 \Rightarrow x\neq 0$ et $x-1>0$ (puisque $x^2>0$) $\Rightarrow x>1$

$\Rightarrow \mathcal{D} =]1;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{x^2}{x-1}}\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)'$;

$\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = x^2$ et $v = x-1$; ainsi $u' = 2x$ et $v' = 1$ et

$\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$;

ainsi $f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}\cdot\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-2}{x(x-1)}$ (on peut aussi procéder comme en n.).

n. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$: $x+1>0$ et $x-1>0 \Rightarrow x>-1$ et $x>1 \Rightarrow x>1$
$\Rightarrow \mathcal{D} =]1;+\infty[$;
$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x-1-x-1}{x^2-1} = \dfrac{-2}{x^2-1}$.

o. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x - 1}$: $x>0$ et $\ln x - 1 \neq 0 \Rightarrow \ln x \neq 1 \Rightarrow x \neq e^1 = e \Rightarrow \mathcal{D} =]0;+\infty[\setminus\{e\}$;
$f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = x$ et $v = \ln x - 1 \Rightarrow u' = 1$ et $v' = \dfrac{1}{x}$
$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{1\cdot(\ln x-1) - x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^2} = \dfrac{\ln x-1-1}{(\ln x-1)^2} = \dfrac{\ln x-2}{(\ln x-1)^2}$.

p. $f(x) = \dfrac{\ln 2}{\ln x}$: $x>0$ et $\ln x \neq 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \Rightarrow \mathcal{D} =]0;+\infty[\setminus\{1\}$;
$f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = \ln 2$ et $v = \ln x \Rightarrow u' = 0$ et $v' = \dfrac{1}{x}$
$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{0\cdot\ln x - \ln 2\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{-\ln 2}{x(\ln x)^2}$.

q. $f(x) = \ln(\ln x)$: $x>0$ et $\ln x>0 \Rightarrow x>e^0 = 1 \Rightarrow \mathcal{D} =]1;+\infty[$;
$f'(x) = \dfrac{1}{\ln x}(\ln x)' = \dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln x}$.

r. $f(x) = \ln(|\ln x|)$: $x>0 \Rightarrow \mathcal{D} =]0;+\infty[$; on a $f(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) & \text{si } x>0 \\ \ln(-\ln x) & \text{si } x<0 \end{cases}$;
ainsi $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{1}{-\ln x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x<0 \end{cases} = \dfrac{1}{x\ln x}$.

s. $f(x) = x^2(2\ln x - 1)$: $x>0 \Rightarrow \mathcal{D} =]0;+\infty[$; on a $f(x) = u\cdot v$ avec $u = x^2$ et $v = 2\ln x - 1$
$\Rightarrow u' = 2x$ et $v' = \dfrac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = u'v+uv' = 2x(2\ln x-1) + x^2\cdot\dfrac{2}{x} =$
$= 4x\ln x - 2x + 2x = 4x\ln x$.

t. $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$: $x+\sqrt{1+x^2}>0$: $x+\sqrt{1+x^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = -x \Rightarrow 1+x^2 = x^2$
$\Rightarrow 1 = 0$ impossible $\Rightarrow$ il n'existe pas de x tel que $x+\sqrt{1+x^2} = 0$;
Comme, pour $x = 0$, on a $x+\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1} = 1 > 0$, on en déduit que
$x+\sqrt{1+x^2}>0$ pour toute valeur de $x \Rightarrow \mathcal{D} = \mathbb{R}$;
$f'(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right) =$
$= \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. $f(x) = \ln(|\cos x|)$: $|\cos x| > 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

$f'(x) = \frac{1}{|\cos x|} \cdot (|\cos x|)'$; on a $|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{si } \cos x \geq 0 \\ -\cos x & \text{si } \cos x < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z} \\ -\cos x & \text{si } x \in \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \right[, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$; ainsi

$|\cos x|' = \begin{cases} -\sin x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z} \\ \sin x & \text{si } x \in \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \right[, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ et

$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\sin x}{\cos x} & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin x}{-\cos x} & \text{si } x \in \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \right[, k \in \mathbb{Z} \end{cases} =$

$= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$

Exercice 6.94

a. L'équation de la tangente à la courbe $y=f(x)$ en $x=x_0$ est de la forme $y=mx+h$, où $m=f'(x_0)$ et h est calculé grâce au point $(x_0; f(x_0))$.

$y=\ln(-x)$ en $x_0=-\frac{1}{3}$: $f'(x)=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$; $f'(x_0)=f'(-\frac{1}{3})=\frac{1}{-1/3}=-3 \Rightarrow m=-3$;
$f(x_0)=f(-\frac{1}{3})=\ln(\frac{1}{3}) \Rightarrow$ le point de tangence est $(-\frac{1}{3};\ln(\frac{1}{3}))$;
comme l'équation de la tangente est $y=-3x+h$, par substitution, on obtient $\ln(\frac{1}{3})=-3\cdot(-\frac{1}{3})+h \Rightarrow \ln(\frac{1}{3})=1+h$
$\Rightarrow h=\ln(\frac{1}{3})-1=\underbrace{\ln(1)}_{=0}-\ln(3)-1=-\ln(3)-1$; ainsi l'équation de la tangente est $y=-3x-\ln(3)-1$.

$y=\ln 2x$ en $x_0=\frac{1}{2}$: $f'(x)=\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{1}{x}$; $f'(x_0)=f'(\frac{1}{2})=\frac{1}{1/2}=2 \Rightarrow m=2$;
$f(x_0)=f(\frac{1}{2})=\ln(2\cdot\frac{1}{2})=\ln 1=0 \Rightarrow$ le point de tangence est $(\frac{1}{2};0)$; comme l'équation de la tangente est $y=2x+h$, par substitution, on obtient $0=2\cdot\frac{1}{2}+h \Rightarrow h=-1$; ainsi l'équation de la tangente est $y=2x-1$.

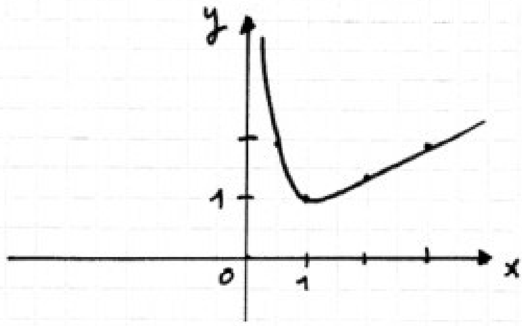
b. Les points à tangente horizontale sont les $(x;y)$ tels que $f'(x)=0$ et $y=f(x)$.

$y=x-\ln x$: $f'(x)=1-\frac{1}{x}$; $f'(x)=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow 1=\frac{1}{x} \Rightarrow x=1$;
avec $x=1$, on a $f(1)=1-\ln 1=1-0=1$; ainsi on a un point à tangente horizontale en $(1;1)$; on fait un tableau de variation :

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

$\Rightarrow$ ainsi $(1;1)$ est un minimum de la fonction $y=x-\ln x$.

graphe:

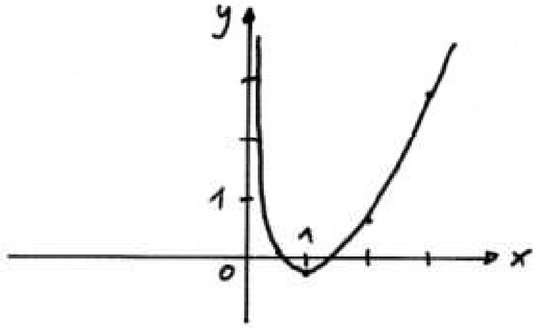


$y=\frac{1}{2}x^2-\ln 2x$: $f'(x)=x-\frac{1}{2x}\cdot 2=x-\frac{1}{x}$; la dérivée est la même que ci-dessus $\Rightarrow x=1$ est un point à tangente horizontale ; $f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^2-\ln 2\cdot 1=\frac{1}{2}-\ln 2$; ainsi on a un point à tangente horizontale en $(1;\frac{1}{2}-\ln 2)$; on fait un tableau de variation:

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow$ ainsi $(1; \frac{1}{2} - \ln 2)$ est un minimum de la fonction $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln 2x$.

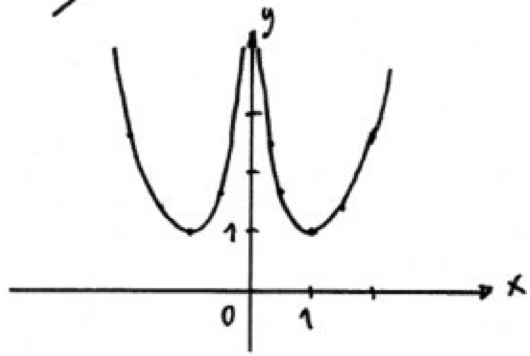
graphe:



$y = x^2 - \ln(x^2)$: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 2x - \frac{2}{x} = 2(x - \frac{1}{x})$; comme ci-dessus, on a $f'(x) = 0$ $\Rightarrow x = 1$; $f(1) = 1^2 - \ln(1^2) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$; ainsi on a un point à tangente horizontale en $(1;1)$; on fait un tableau de variation :

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

graphe:



En fait $f(x) = x^2 - \ln(x^2)$ est paire et on doit aussi avoir un point à tangence horizontale en $x = -1$;
Si $x > 0$, on a $f'(x) = 2(x - \frac{1}{x})$ comme ci-dessus ;
Si $x < 0$, on a $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \cdot |2x| = 2x - \frac{1}{x^2}(-2x) = 2x + \frac{2}{x} = 2(x + \frac{1}{x})$
et $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = -1$.

c. L'équation de la normale à la courbe $y = f(x)$ en $x = x_0$ est de la forme $y = mx + h$, où $m = -\frac{1}{f'(x_0)}$ et h est calculé grâce au point $(x_0; f(x_0))$.

On a $y = \ln(2x - 3)$ et $x_0 = 2$: $f'(x) = \frac{1}{2x-3} \cdot 2 = \frac{2}{2x-3}$; $f'(x_0) = f'(2) = \frac{2}{2 \cdot 2 - 3} = \frac{2}{1} = 2$
$\Rightarrow m = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{2}$; l'équation de la normale s'écrit donc $y = -\frac{1}{2}x + h$.
De plus $f(x_0) = f(2) = \ln(2 \cdot 2 - 3) = \ln(1) = 0$. Le point commun entre la normale et f est donc

$(2;0)$. Par substitution dans $y=-\frac{1}{2}x+h$, on obtient $0=-\frac{1}{2}.2+h \Rightarrow 0=-1+h$
$\Rightarrow h=1$.

L'équation de la normale est donc $y=-\frac{1}{2}x+1$.

Exercice 6.95

On sait que la dérivée de e^x est e^x.

a. $f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$.

$g(x) = e^{-x} \Rightarrow g'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$.

$h(x) = e^{3-2x} \Rightarrow h'(x) = e^{3-2x} \cdot (-2) = -2e^{3-2x}$.

$i(x) = e^{\sin(2x+3)} \Rightarrow i'(x) = e^{\sin(2x+3)} \cdot \cos(2x+3) \cdot 2 = 2\cos(2x+3)e^{\sin(2x+3)}$.

b. L'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = x_0$ est donnée par $y = mx+h$, où $m = f'(x_0)$ et h est calculé grâce au point $(x_0; f(x_0))$.

$y = x - e^{-2x}$ en $x_0 = 0$: $f'(x) = 1 + 2e^{-2x}$; $f'(x_0) = f'(0) = 1 + 2e^{-0} = 1+2 = 3 \Rightarrow m = 3$;
l'équation de la tangente s'écrit donc $y = 3x+h$;
$f(x_0) = f(0) = 0 - e^{-2\cdot 0} = -1$; le point de tangence est donc $(0;-1)$;
par substitution dans $y = 3x+h$, on obtient $-1 = 3\cdot 0 + h \Rightarrow h = -1$;
l'équation de la tangente est donc $y = 3x-1$.

$y = e^{6-2x}$ en $x_0 = 3$: $f'(x) = -2e^{6-2x}$; $f'(x_0) = f'(3) = -2e^{6-2\cdot 3} = -2e^0 = -2 \Rightarrow m = -2$;
l'équation de la tangente s'écrit donc $y = -2x+h$;
$f(x_0) = f(3) = e^{6-2\cdot 3} = e^0 = 1$; le point de tangence est donc $(3;1)$;
par substitution dans $y = -2x+h$, on obtient $1 = -2\cdot 3 + h \Rightarrow h = 7$;
l'équation de la tangente est donc $y = -2x+7$.

c. Les points à tangente horizontale sont les $(x;y)$ tels que $f'(x) = 0$.

Ici $f(x) = 7x^2 - e^{x^2}$ (e^{x^2} signifie $e^{(x^2)}$ et non $(e^x)^2$, car on l'aurait alors écrit e^{2x})

$\Rightarrow f'(x) = 14x - 2xe^{x^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 14x - 2xe^{x^2} = 0 \Rightarrow 2x(7 - e^{x^2}) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $7 - e^{x^2} = 0 \Rightarrow e^{x^2} = 7 \Rightarrow x^2 = \ln 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\ln 7} \cong \pm 1{,}395$.

Avec $x = 0$, on a $f(x) = 7\cdot 0^2 - e^{0^2} = 0 - 1 = -1$.

Avec $x = \pm\sqrt{\ln 7}$, on a $f(x) = 7(\pm\sqrt{\ln 7})^2 - e^{(\pm\sqrt{\ln 7})^2} = 7\ln 7 - e^{\ln 7} = 7\ln 7 - 7 = 7(\ln 7 - 1) \cong 6{,}62$.

Les points à tangente horizontale sont $(0;-1)$, $(-\sqrt{\ln 7}; 7(\ln 7-1))$ et $(\sqrt{\ln 7}; 7(\ln 7-1))$.

Pour déterminer leur type, on fait un tableau de variation:

x		$-\sqrt{\ln 7}$		0		$\sqrt{\ln 7}$	
Signe de $f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$	maximum	$\searrow$

Ainsi $(\pm\sqrt{\ln 7}; 7(\ln 7-1))$ sont des maximums et $(0;-1)$ est un minimum.

Exercice 6.96.

L'angle entre 2 droites d'équation $y = m_1 x + h_1$ et $y = m_2 x + h_2$ est donné par
$\tan(\alpha) = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$ (Formulaires et tables, p. 61).

L'angle entre 2 courbes f et g en leur point d'intersection $(x_0 ; y_0)$ est donné par l'angle entre les tangentes à f et g en ce point. Autrement dit il est donné par $\tan(\alpha) = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$ où $m_1 = f'(x_0)$ et $m_2 = g'(x_0)$.

a. $f(x) = e^{x+2}$ et $g(x) = e^{-x}$: intersection : $e^{x+2} = e^{-x} \Rightarrow x + 2 = -x \Rightarrow 2x + 2 = 0$
$\Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$; on a donc $x_0 = -1$;
$f'(x) = e^{x+2} \Rightarrow m_1 = f'(x_0) = f'(-1) = e^{-1+2} = e^1 = e$;
$g'(x) = -e^{-x} \Rightarrow m_2 = g'(x_0) = g'(-1) = -e^1 = -e$;
on a ainsi $\tan(\alpha) = \left|\dfrac{-e-e}{1+e(-e)}\right| = \left|\dfrac{-2e}{1-e^2}\right| = \dfrac{2e}{e^2-1}$;
l'angle entre f et g est donc $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{2e}{e^2-1}\right) = \arctan\left(\dfrac{2e}{e^2-1}\right)$
$\cong \arctan(0{,}851) \cong 40{,}4°$.

b. $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = 2e^{3x}$: intersection : $e^{2x} = 2e^{3x} \Rightarrow e^{2x} - 2e^{3x} = 0$
$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x e^{2x} = 0 \Rightarrow e^{2x}(1 - 2e^x) = 0$
$\Rightarrow$ soit $e^{2x} = 0$ ce qui est impossible ($e^x > 0$ pour n'importe quelle valeur de x), soit $1 - 2e^x = 0$
$\Rightarrow 2e^x = 1 \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{2}$;
on a donc $x_0 = \ln\frac{1}{2}$.
$f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow m_1 = f'(x_0) = f'(\ln\frac{1}{2}) = 2e^{2\ln\frac{1}{2}} = 2(e^{\ln\frac{1}{2}})^2 =$
$= 2(\frac{1}{2})^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$;
$g'(x) = 6e^{3x} \Rightarrow m_2 = g'(x_0) = g'(\frac{1}{2}) = 6e^{3\ln\frac{1}{2}} = 6(e^{\ln\frac{1}{2}})^3 =$
$= 6(\frac{1}{2})^3 = 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$;
on a ainsi $\tan(\alpha) = \left|\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}\right| = \dfrac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{1}{4} : \frac{11}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{11} = \frac{2}{11}$;
l'angle entre f et g est donc $\alpha = \tan^{-1}(\frac{2}{11}) = \arctan(\frac{2}{11}) =$
$\cong 10{,}3°$.

Exercice 6.97

a) $f(x) = 3^x \cdot x^3$: si on a $y = a^x$, alors $\log_a(y) = x \Rightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$
$\Rightarrow \ln(y) = x\ln(a) \Rightarrow y = e^{x\ln(a)}$;
ainsi on a $a^x = e^{x\ln(a)}$;
on peut donc écrire $f(x) = e^{x\ln(3)} \cdot x^3$;
Comme $f(x) = u \cdot v$ avec $u = e^{x\ln(3)}$ et $v = x^3$, on a
$u' = \ln(3)e^{x\ln(3)}$ et $v' = 3x^2$ et $f'(x) = u'v + uv' =$
$= \ln(3)e^{x\ln(3)} \cdot x^3 + e^{x\ln(3)} \cdot 3x^2 =$
$= x^2 e^{x\ln(3)}\left(x\ln(3) + 3\right) = x^2 \cdot 3^x\left(x\ln(3) + 3\right)$.

b) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$: Comme $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = e^x - 1$ et $v = e^x + 1$, on a $u' = e^x$ et
$v' = e^x$ et $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x+1)^2} =$
$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

c) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$: selon a), on a $2^{\sqrt{x^2+1}} = e^{\sqrt{x^2+1}\ln(2)}$;
ainsi $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}\ln(2)}$ et $f'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}\ln(2)}\left(\sqrt{x^2+1}\ln(2)\right)' =$
$= e^{\sqrt{x^2+1}\ln(2)} \cdot \ln(2)\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x\ln(2)e^{\sqrt{x^2+1}\ln(2)}}{\sqrt{x^2+1}} =$
$= \frac{x\ln(2)2^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$.

d) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: Comme $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = e^x - e^{-x}$ et $v = e^x + e^{-x}$, on a
$u' = e^x + e^{-x}$ et $v' = e^x - e^{-x}$ et $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} =$
$= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$
$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$
$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

Exercice 6.98

a. $3\cdot 2^x > 5^x \Rightarrow \frac{3.2^x}{5^x} > 1$ ($5^x > 0$ pour toute valeur de x) $\Rightarrow 3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$
$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)$ (car la fonction $\log_a$ est strictement croissante : si $x < y$, alors $\log_a(x) < \log_a(y)$) $\Rightarrow x > \frac{\log(1/3)}{\log(2/5)} \cong 1,2$.
Ainsi les solutions sont $x \in \left]\frac{\log(1/3)}{\log(2/5)}; +\infty\right[\cong \left]1,2; +\infty\right[$.

b. $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 2 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 4 \Rightarrow (e^x)^2 + 1 = 4e^x$ (on multiplie par e^x des 2 côtés)
$\Rightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0$; on pose $u = e^x$ et on obtient $u^2 - 4u + 1 = 0$, ce qui est une équation du 2^e^ degré de la forme $au^2 + bu + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 1$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.1 = 16 - 4 = 12$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; les solutions sont $u = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$ et $u = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$;
avec $u = 2+\sqrt{3}$ et $u = e^x$, on obtient $e^x = 2+\sqrt{3} \Rightarrow x = \ln(2+\sqrt{3}) \cong 1,317$;
avec $u = 2-\sqrt{3}$ et $u = e^x$, on obtient $e^x = 2-\sqrt{3} \Rightarrow x = \ln(2-\sqrt{3}) \cong -1,317$.
Ainsi les solutions sont $x = 2+\sqrt{3}$ et $x = 2-\sqrt{3}$.

c. $e^{2x} = 6 - e^x \Rightarrow e^{2x} + e^x - 6 = 0 \Rightarrow (e^x)^2 + e^x - 6 = 0 \Rightarrow (e^x+3)(e^x-2) = 0$
$\Rightarrow$ soit $e^x + 3 = 0 \Rightarrow e^x = -3$ ce qui est impossible puisque $e^x > 0$ peu importe la valeur de x, soit $e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$.
L'unique solution est donc $x = \ln 2$.

Exercice 6.99

a. $f(x)=\ln(x^2+4)$:

a) Domaine de définition: on doit avoir $x^2+4>0$ pour pouvoir calculer le logarithme naturel; or $x^2+4>0$ pour toute valeur de x ; donc $D_f=\mathbb{R}$.

b) Parité: On a $f(-x)=\ln((-x)^2+4)=\ln(x^2+4)=f(x)$. Donc f est paire et l'axe Oy est un axe de symétrie du graphe de f.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques (trigonométriques ou autres), elle n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \ln(x^2+4)=0 \Rightarrow x^2+4=1 \Rightarrow x^2=-3$ impossible $\Rightarrow$ il n'y a pas de zéros et, donc, aucune intersection avec l'axe Ox.

e) Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow f(x)=\ln(4) \Rightarrow$ point $(0;\ln(4))$

f) Tableau de signes:

x	
signes de $f(x)$	$+$

g) Asymptotes verticales: aucune, puisque $D=\mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: une asymptote non verticale, si elle existe, sera de la forme $y=mx+h$, où $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$.

On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(x^2+4)}{x}=0$ car ln perd toujours face à x; ainsi $m=0$.

De plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln(x^2+4)=+\infty$.

Ainsi, il n'y a pas d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersection avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: On a $f'(x)=\frac{1}{x^2+4}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+4}$. On a $D_{f'}=\mathbb{R}$ car $x^2+4>0$ pour toutes les valeurs de x.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+4}=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$; avec $x=0$, on a $y=$ $=\ln(4)$ (voir e) ; f a donc le point à tangente horizontale $(0;\ln(4))$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de la dérivée: f' n'a pas de points critiques.

o) Tableau de variations:

x		0	
Signes de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(0;\ln(4))$ est un minimum de f.

q) <u>Deuxième dérivée:</u> On a $f'(x) = \frac{2x}{x^2+4} = \frac{u}{v}$ avec $u = 2x$ et $v = x^2+4$. Ainsi $u' = 2$, $v' = 2x$ et $f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(x^2+4) - 2x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$.
Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}$ (puisque $x^2+4>0$).

r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2+8=0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$
$\Rightarrow x = \pm 2$.

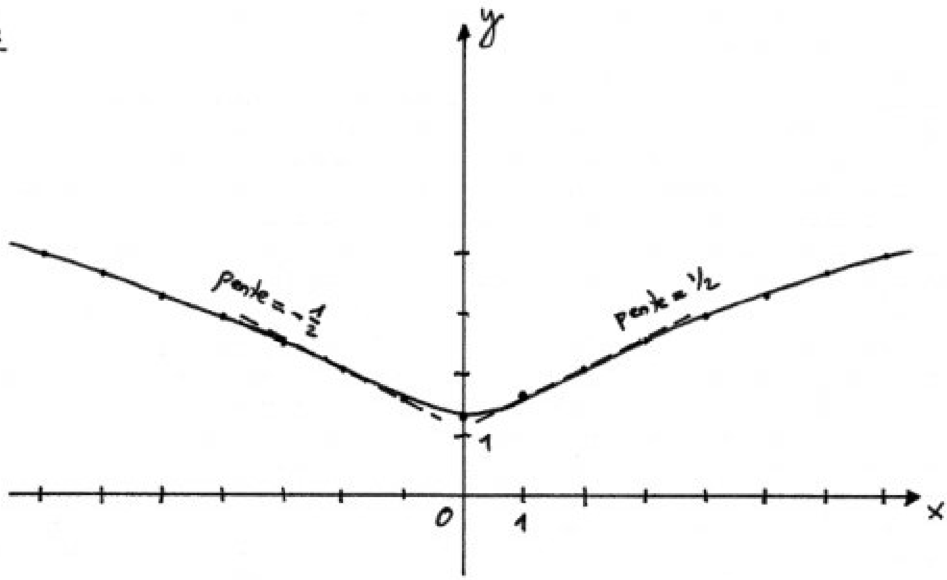
Avec $x=-2$, on a $f'(x) = f'(-2) = \frac{2\cdot(-2)}{(-2)^2+4} = \frac{-4}{4+4} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$ et $f(x) = f(-2) = \ln((-2)^2+4) =$
$= \ln(4+4) = \ln(8)$.

Avec $x=2$, on a $f'(x) = f'(2) = \frac{2\cdot 2}{2^2+4} = \frac{4}{4+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et $f(x) = f(-2) = f(2) = \ln(8)$
(puisque f est paire).

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x		-2		2	
Signes de $f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Convexité ou concavité de $f(x)$	$\frown$ concave		$\smile$ convexe		$\frown$ concave

t) <u>Graphique:</u>



b. $f(x) = x\ln(x)$:

a) <u>Domaine de définition:</u> Comme $\ln$ n'est défini que sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

b) <u>Parité:</u> Comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f ne peut être ni paire, ni impaire.

c) <u>Périodicité:</u> Comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f ne peut pas être périodique.

d) <u>Zéros:</u> $f(x) = 0 \Rightarrow x\ln(x) = 0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$; comme $0 \notin D_f$, l'unique zéro de f est $x=1$.

e) <u>Intersection avec Oy:</u> Elle n'existe pas puisque $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x	0		1	
Signes de $f(x)$	////	$-$	0	$+$

g) <u>Asymptotes verticales:</u> Il faut considérer $x \underset{>}{\to} 0$. On a $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) =$

$$= \lim_{x \underset{>}{\to} 0} x\ln(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{\ln(x)}{1/x} = -\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{-\ln(x)}{1/x} = -\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1/x)}{1/x} = -\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = -0 = 0$$

(par les propriétés des logarithmes, on a $-\ln(x) = (-1)\cdot\ln(x) = \ln(x^{-1}) = \ln(\frac{1}{x})$ et, en posant $y = \frac{1}{x}$, si $x \underset{>}{\to} 0$, alors $y \to +\infty$, et vice versa).

On en déduit que f n'a pas d'asymptotes verticales.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> /

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> une asymptote non verticale, si elle existe, sera de la forme $y = mx + h$, où $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (on ne considère pas le cas $x \to -\infty$, puisque $D_f = \mathbb{R}_+^*$) et, là où m existe, $h = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Ainsi f n'a pas d'asymptote non verticale.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> /

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> /

l) <u>Première dérivée:</u> comme $f(x) = u \cdot v$ avec $u = x$ et $v = \ln(x)$, on a $u' = 1$, $v' = \frac{1}{x}$ et $f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$. On a $D_{f'} = \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Avec $x = e^{-1}$, on a $f(x) = f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) = e^{-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$.

Ainsi $(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e})$ est un point à tangente horizontale.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> le point critique de f' est $x = 0$.

On a $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f'(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} (\ln(x) + 1) = "-\infty + 1" = -\infty$.

Ainsi la pente de f en $x = 0$ est $-\infty$.

o) <u>Tableau de variations:</u>

x		0		$\frac{1}{e}$	
Signes de $f'(x)$			$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$			$\searrow$	min	$\nearrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> D'après o), $(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e})$ est un minimum de f.

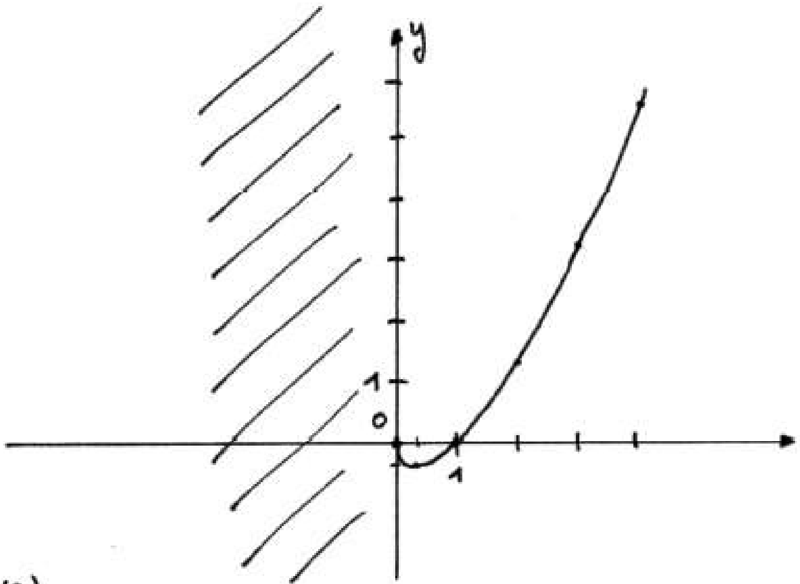
q) <u>Deuxième dérivée:</u> $f'(x) = \ln(x) + 1 \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x}$. On a $D_{f''} = \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.

r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$ impossible $\Rightarrow f$ n'a pas de point d'inflexion.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x		0	
Signes de $f''(x)$			$+$
Convexité ou concavité de $f(x)$			$\smile$ convexe

t) Graphique:



c. $f(x) = \log_x(2) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}$

a) Domaine de définition: Comme $\ln$ est défini sur $\mathbb{R}_+^*$, on doit avoir $x > 0$. En outre, on doit avoir aussi $\ln(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Ainsi $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

b) Parité: Comme $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, f ne peut être ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: Comme $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, f ne peut pas être périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} = 0 \Rightarrow \ln(2) = 0$ exclu $\Rightarrow f$ n'a pas de zéro.

e) Intersection avec Oy: Elle n'existe pas car $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

f) Tableau de signes:

x		0		1	
Signes de $f(x)$	////		$-$	////	$+$

g) Asymptotes verticales: Il faut considérer $x \underset{>}{\to} 0$, $x \underset{<}{\to} 1$ et $x \underset{>}{\to} 1$.

On a $\displaystyle\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{\text{"}\ln(2)\text{"}}{-\infty} = 0_-$,

$\displaystyle\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{\text{"}\ln(2)\text{"}}{0_-} = -\infty$ et

$\displaystyle\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{\text{"}\ln(2)\text{"}}{0_+} = +\infty$.

Ainsi $x = 1$ est une asymptote verticale.

h) Comportement asymptotique: D'après g), on a $\displaystyle\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$.

i) Asymptotes non verticales: On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2}{\ln x} = \frac{\text{"}\ln 2\text{"}}{+\infty} = 0_+$.
Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$ (on ne considère pas $x \to -\infty$ car $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$).

j) Comportement asymptotique: D'après i), on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0_+$.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: Les intersections avec $y = 0$ correspondent aux zéros de f. D'après d), il n'y en a pas.

l) Première dérivée: On a $f(x) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = \ln(2)$ et $v = \ln(x)$.

Ainsi $u'=0$, $v'=\frac{1}{x}$ et $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{0\cdot\ln(x)-\ln(2)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}=\frac{-\ln(2)\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=$

$=-\frac{\ln(2)}{x\ln^2(x)}$. Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}=]0;1[\cup]1;+\infty[$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{\ln(2)}{x\ln^2(x)}=0 \Rightarrow -\ln(2)=0$ exclu

$\Rightarrow f$ n'a pas de points à tangente horizontale.

n) <u>Pente des tangentes aux points critiques de f':</u> Les points critiques de f' sont $x=0$ et $x=1$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(-\frac{\ln(2)}{x\ln^2(x)}\right)=$ "$-\frac{\ln(2)}{0_+\ln^2(0_+)}$" $=$ "$-\frac{\ln(2)}{0+}$" $=-\infty$ ($\ln^2$ perd devant x), $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(-\frac{\ln(2)}{x\ln^2(x)}\right)=$ "$-\frac{\ln(2)}{1\cdot 0+}$" $=-\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(-\frac{\ln(2)}{x\ln^2(x)}\right)=$ "$-\frac{\ln(2)}{1\cdot 0+}$" $=-\infty$.

Ainsi la pente de f' en $x=0$ et $x=1$ est $-\infty$.

o) <u>Tableau de variation:</u>

x		0		1	
signes de $f'(x)$	//////		$-$	$\downarrow$	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	//////		$\searrow$	//////	$\searrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> f n'a pas de points à tangente horizontale.

q) <u>Deuxième dérivée:</u> $f'(x)=\frac{-\ln(2)}{x\ln^2(x)}=\frac{u}{v}$ avec $u=-\ln(2)$ et $v=x\ln^2(x)$.

Ainsi $u'=0$ et $v'=1\cdot\ln^2(x)+x\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}=\ln^2(x)+2\ln(x)=\ln(x)(\ln(x)+2)$ et

$f''(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{0\cdot x\ln^2(x)-(-\ln(2))\ln(x)(\ln(x)+2)}{(x\ln^2(x))^2}=\frac{\ln(2)\ln(x)(\ln(x)+2)}{x^2\ln^4(x)}=$

$=\frac{\ln(2)(\ln(x)+2)}{x^2\ln^3(x)}$. Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}_+^*=]0;1[\cup]1;+\infty[$.

r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x)=0 \Rightarrow \frac{\ln(2)(\ln(x)+2)}{x^2\ln^3(x)}=0 \Rightarrow \ln(2)(\ln(x)+2)=0$

$\Rightarrow \ln(x)+2=0 \Rightarrow \ln(x)=-2 \Rightarrow x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

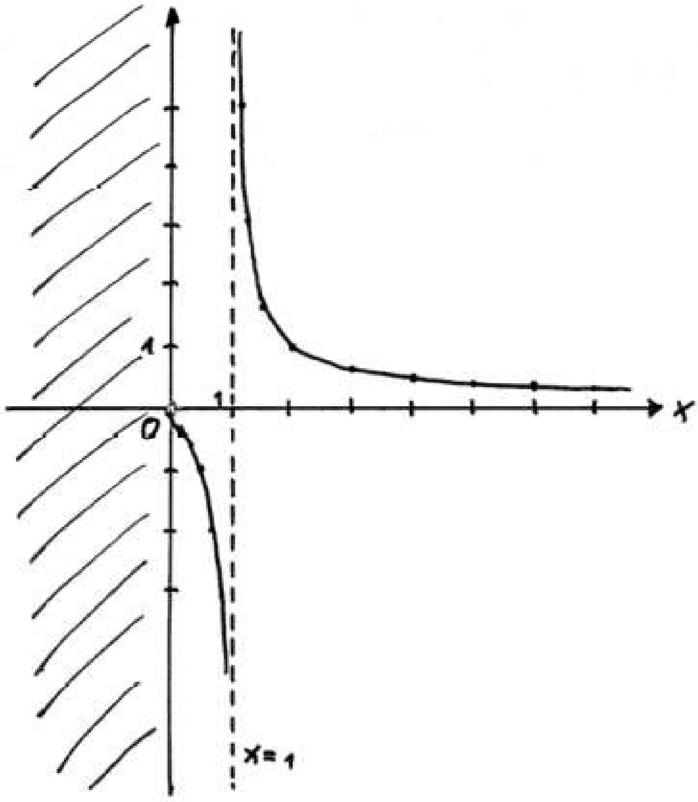
Avec $x=\frac{1}{e^2}$, on a $f(x)=f(e^{-2})=\frac{\ln(2)}{\ln(e^{-2})}=\frac{\ln(2)}{-2}=-\frac{\ln(2)}{2}$ et

$f'(x)=f'(e^{-2})=-\frac{\ln(2)}{e^{-2}\ln^2(e^{-2})}=-\frac{\ln(2)}{e^{-2}(-2)^2}=-\frac{\ln(2)}{4e^{-2}}=-\frac{\ln(2)e^2}{4}$.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1	
signes de $f''(x)$		$+$	0	$-$	//////	$+$
convexité ou concavité de $f(x)$		$\cup$ convexe		$\cap$ concave	//////	$\cup$ convexe

t) <u>Graphique:</u>



d. $f(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x))$:

a) <u>Domaine de définition:</u> on doit avoir $x>0$ et $\ln(x)>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow D_f =]1;+\infty[$.

b) <u>Parité:</u> Comme $D_f =]1;+\infty[$, f ne peut être ni paire, ni impaire.

c) <u>Périodicité:</u> Comme $D_f =]1;+\infty[$, f ne peut pas être périodique.

d) <u>Zéros:</u> $f(x)=0 \Rightarrow \ln(x)-\ln(\ln(x))=0 \Rightarrow \ln(x)=\ln(\ln(x)) \Rightarrow x=\ln(x)$;
pour résoudre cette équation sur $]1;+\infty[$, on considère la fonction $g(x)=x-\ln(x)$;
on a $g'(x)=1-\frac{1}{x}$ et on constate que $g'(x)>0$ si $x\in]1;+\infty[$; ainsi g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$; comme $g(1)=1-\ln(1)=1-0=1$, on en déduit que $g(x)>0$ sur $]1;+\infty[$, autrement dit $x-\ln(x)=0 \Rightarrow x>\ln(x)$;
ainsi $x=\ln(x)$ n'a pas de solution sur $]1;+\infty[$ et, donc, f n'a pas de zéros.

e) <u>Intersection avec Oy:</u> comme $x=0\notin D_f$, il ne peut pas y avoir d'intersection avec Oy.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x	1	
signe de $f(x)$		$+$

g) <u>Asymptotes verticales:</u> On doit considérer le cas $x \underset{>}{\to} 1$.
On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \left(\ln(x)-\ln(\ln(x))\right) = \ln(1) - \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \ln(\ln(x)) =$
$= -\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \ln(\ln(x)) = \text{"}-\ln(\ln(1))\text{"} = \text{"}-\ln(0)\text{"} = +\infty$.
Ainsi $x=1$ est une asymptote verticale (avec $x>1$).

h) Comportement asymptotique: D'après g), $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$.

i) Asymptotes non verticales: une asymptote non verticale, si elle existe, sera de la forme $y = mx+h$, où $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-mx)$ (on ne considère pas $x \to -\infty$ car $D_f =]1;+\infty[$).

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)-\ln(\ln(x))}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(\ln(x))}{x}\right) = 0-0=0$
(puisque ln perd vis-à-vis de x).

De plus $h = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-\ln(\ln(x))\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) = $ "$\ln(+\infty)$" $= +\infty$ (puisque ln perd face à x).

Ainsi f n'a pas d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right)$. Son domaine est $D_{f'} =]1;+\infty[$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right)=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{\ln(x)}=0 \Rightarrow 1=\frac{1}{\ln(x)}$
$\Rightarrow \ln(x)=1 \Rightarrow x=e^1=e$.

Avec $x=e$, $f(x)=f(e)=\ln(e)-\ln(\ln(e))=1-\ln(1)=1-0=1$.

Ainsi $(e;1)$ est un point à tangente horizontale.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': On doit considérer $x=1$.

On a $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f'(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right) =$ "$\frac{1}{1}\left(1-\frac{1}{0+}\right)$" $=$ "$1-\infty$" $= -\infty$.

o) Tableau de variations:

x	1		e	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(e;1)$ est un minimum.

q) Deuxième dérivée: On a $f'(x) = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\ln x - 1}{\ln x} = \frac{\ln x-1}{x\ln x} = \frac{u}{v}$ avec
$u = \ln x - 1$ et $v = x\ln x$. Ainsi $u' = \frac{1}{x}$ et $v' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$ et

$$f''(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}x\ln x - (\ln x-1)(\ln x+1)}{(x\ln x)^2} = \frac{\ln x - (\ln^2 x - 1)}{x^2\ln^2 x} = \frac{-\ln^2 x + \ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}.$$

Son domaine est $D_{f''} =]1;+\infty[$.

r) Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-\ln^2 x + \ln x + 1}{x^2\ln^2 x} = 0 \Rightarrow -\ln^2 x + \ln x + 1 = 0$
$\Rightarrow \ln^2 x - \ln x - 1 = 0$; on pose $u = \ln x$; on obtient l'équation $u^2-u-1=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $au^2+bu+c=0$ avec $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$; on a $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\cdot1\cdot(-1) = 1+4 = 5$; les solutions sont $u = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et

$u = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; avec $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $u = \ln x$, on a $\ln x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow x = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cong 5{,}043$; avec $u = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $u = \ln x$, on a $\ln x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow x = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \cong 0{,}539$.

Or $x \cong 0{,}539 \notin \mathcal{D}_{f^*}$.

Ainsi il y a un unique point d'inflexion : $x = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cong 5{,}043$.

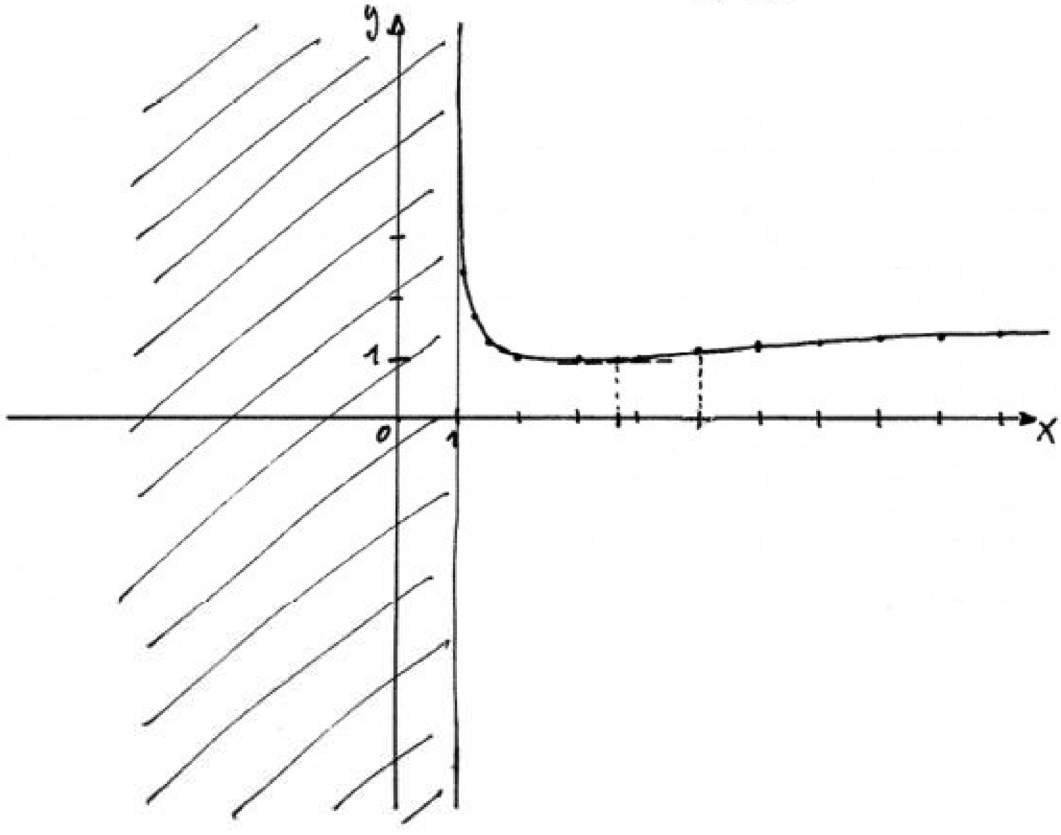
Avec $x \cong 5{,}043$, on a $f(x) \cong \ln(5{,}043) - \ln(\ln(5{,}043)) \cong 1{,}137$ et

$f'(x) \cong \frac{1}{5{,}043}\left(1 - \frac{1}{\ln(5{,}043)}\right) \cong 0{,}076$

s) Tableau de concavité:

x	1		5,043	
Signes de $f''(x)$		+	0	−
convexité ou concavité de $f(x)$		convexe		concave

t) Graphique:



Exercice 6.100

On a l'équation $x^2-2x+2\log(a)=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $Ax^2+Bx+C=0$ avec $A=1$, $B=-2$ et $C=2\log(a)$.
Pour que l'équation ait 2 solutions réelles, il faut que son déterminant Δ soit strictement positif : $\Delta=B^2-4AC>0 \Rightarrow (-2)^2-4\cdot1\cdot2\log(a)>0 \Rightarrow 4-8\log(a)>0$
$\Rightarrow 1-2\log(a)>0 \Rightarrow 2\log(a)<1 \Rightarrow \log(a)<\frac{1}{2}$.
Comme la fonction 10^x est strictement croissante ($p<q \Rightarrow 10^p<10^q$), on obtient $10^{\log(a)}<10^{1/2} \Rightarrow a=\sqrt{10}$.
Ainsi, si $a<\sqrt{10}$, l'équation a 2 solutions réelles.

Avec l'équation $x^2-2\log(a)x+4=0$, on a cette fois $A=1$, $B=-2\log(a)$ et $C=4$.
On doit aussi avoir $\Delta=B^2-4AC>0 \Rightarrow (-2\log(a))^2-4\cdot1\cdot4>0$
$\Rightarrow 4\log^2(a)-16>0 \Rightarrow \log^2(a)-4>0 \Rightarrow \log^2(a)>4$
$\Rightarrow$ soit $\log(a)<-2$, soit $\log(a)>2$
$\Rightarrow 10^{\log(a)}<10^{-2}$ ou $10^{\log(a)}>10^2$
$\Rightarrow a<\frac{1}{10^2}$ ou $a>10^2 \Rightarrow a<0{,}01$ ou $a>100$.
Ainsi, si $a<0{,}01$ ou $a>100$, l'équation a 2 solutions réelles.

Exercice 6.101

a. $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$:

a) Domaine de définition: on doit avoir $x > 0$ ($\ln$ est défini sur $\mathbb{R}_+^*$) $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

b) Parité: Comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f ne peut être ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: Comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f ne peut pas être périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln^2(x)}{x} = 0 \Rightarrow \ln^2(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

e) Intersection avec Oy: $x = 0 \notin D_f \Rightarrow$ pas d'intersection avec Oy.

f) Tableau de signes:

x	/// 0		1	
Signes de $f(x)$	///	$+$	0	$+$

g) Asymptotes verticales: On doit considérer $x \xrightarrow{>} 0$.

On a $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln^2(x)}{x} = \text{"}\frac{+\infty}{0_+}\text{"} = +\infty$.

Ainsi $x = 0$ est une asymptote verticale ($x > 0$).

h) Comportement asymptotique: D'après g), on a $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$.

i) Asymptotes non verticales: On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} = 0$, car $\ln$ perd face à x (on n'a pas besoin de considérer $x \to -\infty$ puisque $D_f = \mathbb{R}_+^*$).

Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

j) Comportement asymptotique: On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} = \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"} = 0_+$ (voir i)).

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ (voir d)).

l) Première dérivée: On a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = \ln^2(x)$ et $v = x$. Ainsi $u' = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}$ et $v' = 1$, d'où $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^2(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{2\ln(x) - \ln^2(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}$.

Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln(x)(2-\ln(x))}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln(x)(2 - \ln(x)) = 0$

$\Rightarrow$ soit $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$, soit $2 - \ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 2 \Rightarrow e^2$.

Avec $x = 1$, on a $f(x) = 0$ (voir d)). Avec $x = e^2$, on a $f(x) = \frac{\ln^2(e^2)}{e^2} = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2}$.

Ainsi f a 2 points à tangente horizontale: $(1;0)$ et $(e^2; \frac{4}{e^2})$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Le point critique de f' est $x = 0$.

On a $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f'(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln(x)(2-\ln(x))}{x^2} = \text{"}\frac{-\infty(2-(-\infty))}{+\infty}\text{"} = -\infty$ ($\ln$ perd face à x).

o) Tableau de variations:

x	/// 0		1		e^2	
Signes de $f'(x)$	///	$-$	0	$+$	0	$-$
Croissance ou décroissance de $f(x)$	///	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> D'après o), $(1;0)$ est un minimum et $\left(e^2;\frac{4}{e^2}\right)$ est un maximum (local).

q) <u>Deuxième dérivée:</u> On a $f'(x)=\frac{2\ln(x)-\ln^2(x)}{x^2}=\frac{u}{v}$ avec $u=2\ln(x)-\ln^2(x)$ et $v=x^2$. On a $u'=\frac{2}{x}-2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}$ et $v'=2x$, d'où $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=$

$$=\frac{\left(\frac{2}{x}-2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x^2-\left(2\ln(x)-\ln^2(x)\right)\cdot 2x}{(x^2)^2}=\frac{2x-2x\ln(x)-4x\ln(x)+2x\ln^2(x)}{x^4}=$$

$$=\frac{2x-6x\ln(x)+2x\ln^2(x)}{x^4}=\frac{2x\left(\ln^2(x)-3\ln(x)+1\right)}{x^4}=\frac{2\left(\ln^2(x)-3\ln(x)+1\right)}{x^3}.$$

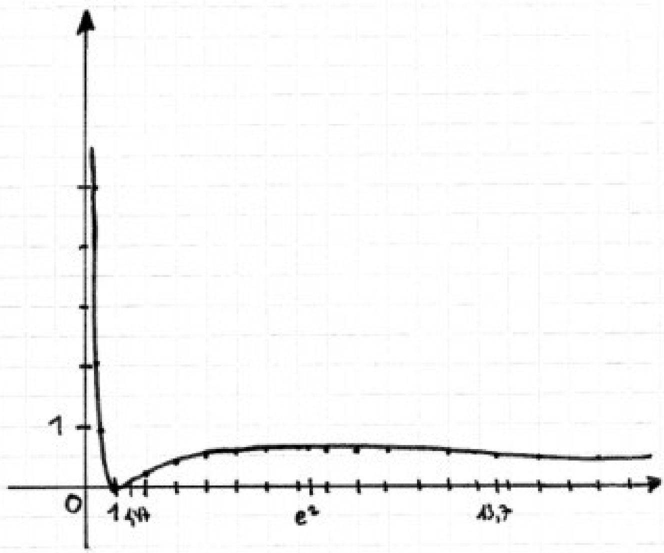
Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$.

r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2(\ln^2(x)-3\ln(x)+1)}{x^3}=0 \Rightarrow 2(\ln^2(x)-3\ln(x)+1)=0$
$\Rightarrow \ln^2(x)-3\ln(x)+1=0$; on pose $u=\ln(x)$ et on obtient l'équation $u^2-3u+1=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $au^2+bu+c=0$; on a $\Delta=b^2-4ac=$
$=(-3)^2-4\cdot1\cdot1=9-4=5$; les solutions sont $u=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $u=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$;
avec $u=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $u=\ln(x)$, on a $\ln(x)=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\cong 13{,}7$;
avec $u=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $u=\ln(x)$, on a $\ln(x)=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\cong 1{,}47$.
Ainsi les points d'inflexion sont en $x\cong1{,}47$ et en $x\cong13{,}7$.
Avec $x\cong1{,}47$, on a $f(x)\cong0{,}1$ et $f'(x)\cong0{,}29$.
Avec $x\cong13{,}7$, on a $f(x)\cong0{,}5$ et $f'(x)\cong-0{,}009$.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x		0		1,47		13,7	
Signe de $f''(x)$			+	0	−	0	+
Convexité ou concavité de $f(x)$			Convexe		Concave		Convexe

t) <u>Graphique:</u>



b. $f(x) = (x-1)^2 e^x$:

a) Domaine de définition: $D_f = \mathbb{R}$.

b) Parité: $f(-x) = (-x-1)^2 e^{-x} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire ni impaire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques, elle n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 e^x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \quad (e^x > 0) \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

e) Intersection avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = (0-1)^2 e^0 = e^0 = 1$.

f) Tableau de signes:

x		1	
Signes de $f(x)$	$+$	0	$+$

g) Asymptotes verticales: Comme $D_f = \mathbb{R}$, f n'a pas d'exclu et donc pas d'asymptote verticale.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: On a $\lim_{x \to -\infty} (x-1)e^x = 0$ car exp gagne sur $(x-1)$.
De plus $\lim_{x \to +\infty} (x-1)e^x = +\infty$.
Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$.

j) Comportement asymptotique: On a $\lim_{x \to -\infty} (x-1)e^x = \text{"}{+\infty} \cdot 0\text{"} = 0_+$.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ (voir d)).

l) Première dérivée: On a $f(x) = u \cdot v$ avec $u = (x-1)^2$ et $v = e^x$. On a $u' = 2(x-1)$ et $v' = e^x$, d'où $f'(x) = u'v + uv' = 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = (2 + x - 1)(x-1)e^x =$
$= (x+1)(x-1)e^x$. Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$ $(e^x > 0)$.
Avec $x = -1$, on a $f(x) = (-1-1)^2 e^{-1} = (-2)^2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{4}{e}$.
Avec $x = 1$, on a $f(x) = 0$ (voir d)).

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': f' n'a pas de points critiques.

o) Tableau de variations:

x		-1		1	
Signes de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(-1; \frac{4}{e})$ est un maximum (local) et $(1; 0)$ est un minimum.

q) Deuxième dérivée: On a $f'(x) = (x+1)(x-1)e^x = (x^2-1)e^x = u \cdot v$ avec $u = x^2 - 1$ et $v = e^x$. Ainsi $u' = 2x$ et $v' = e^x$, d'où $f''(x) = u'v + uv' = 2xe^x + (x^2-1)e^x =$
$= (2x + x^2 - 1)e^x = (x^2 + 2x - 1)e^x$. Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}$

r) Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x - 1)e^x = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (e^x > 0)$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -1$;

on a $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot 1(-1) = 4+4 = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; les solutions sont $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}-1$ et $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{\Delta}}{2} = -1-\sqrt{2}$.

Avec $x = \sqrt{2}-1$, on a $f(x) \cong 0{,}52$ et $f'(x) \cong -1{,}25$.

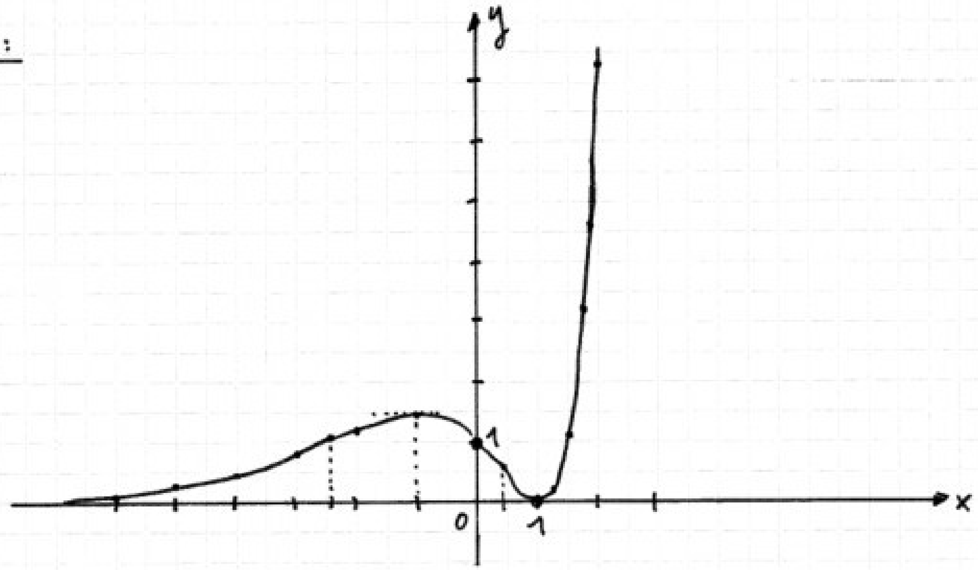
Avec $x = -1-\sqrt{2}$, on a $f(x) \cong 1{,}04$ et $f'(x) \cong 0{,}43$.

Les points d'inflexion sont donc $(\sqrt{2}-1 ; 0{,}52)$ et $(-1-\sqrt{2} ; 1{,}04)$.

s) Tableau de concavité:

x		$-1-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}-1$	
Signes de $f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Convexité ou concavité de $f(x)$	$\smile$ convexe		$\frown$ concave		$\smile$ convexe

t) Graphique:



c. $f(x) = (2x^2-4)e^{-x}$:

a) Domaine de définition: $D_f = \mathbb{R}$

b) Parité: $f(-x) = (2(-x)^2-4)e^{-(-x)} = (2x^2-4)e^{x} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques, elle n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow (2x^2-4)e^{-x} = 0 \Rightarrow 2x^2-4 = 0 \quad (e^{-x} > 0) \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

e) Intersection avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = (2\cdot 0^2 - 4)e^{-0} = -4\cdot 1 = -4$.

f) Tableau de signes:

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
Signes de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales: Comme f n'a pas d'exclu, il n'y a pas d'asymptote verticale.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: On a $\lim_{x\to-\infty} (2x^2-4)e^{-x} = "+\infty\cdot+\infty" = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (2x^2-4)e^{-x} = "+\infty\cdot 0" = 0$ car exp gagne face à $2x^2-4$.

Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après i), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2-4)e^{-x} = "+\infty \cdot 0_+" = 0_+$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> $f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ (voir d)).

l) <u>Première dérivée:</u> Comme $f(x) = (2x^2-4)e^{-x} = u \cdot v$ avec $u = 2x^2-4$ et $v = e^{-x}$, on a $u' = 4x$ et $v' = -e^{-x}$, d'où $f'(x) = u'v + uv' = 4xe^{-x} + (2x^2-4)(-e^{-x}) =$
$= (4x - 2x^2 + 4)e^{-x} = -2(x^2 - 2x - 2)e^{-x}$. Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x) = 0 \Rightarrow -2(x^2-2x-2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$ $(e^{-x} > 0)$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -2$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; les solutions sont $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}$ et $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$.

Avec $x = 1+\sqrt{3} \cong 2{,}732$, on a $f(x) = (2x^2-4)e^{-x} \cong 0{,}711$.

Avec $x = 1-\sqrt{3} \cong -0{,}732$, on a $f(x) = (2x^2-4)e^{-x} \cong -6{,}089$.

Ainsi les points à tangente horizontale sont $(2{,}732; 0{,}711)$ et $(-0{,}732; -6{,}089)$.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> f' n'a pas de point critique.

o) <u>Tableau de variations:</u>

x		$-0{,}732$		$2{,}732$	
signes de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	↘	min	↗	max	↘

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> D'après o), $(-0{,}732; -6{,}089)$ est un minimum et $(2{,}732; 0{,}711)$ est un maximum.

q) <u>Deuxième dérivée:</u> Comme $f'(x) = -2(x^2-2x-2)e^{-x} = (-2x^2+4x+4)e^{-x} = u \cdot v$ avec $u = -2x^2+4x+4$ et $v = e^{-x}$, on a $u' = -4x+4$ et $v' = -e^{-x}$, d'où $f''(x) = u'v + uv' =$
$= (-4x+4)e^{-x} + (-2x^2+4x+4)(-e^{-x}) = (-4x+4+2x^2-4x-4)e^{-x} = (2x^2-8x)e^{-x} =$
$= 2x(x-4)e^{-x}$. Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}$.

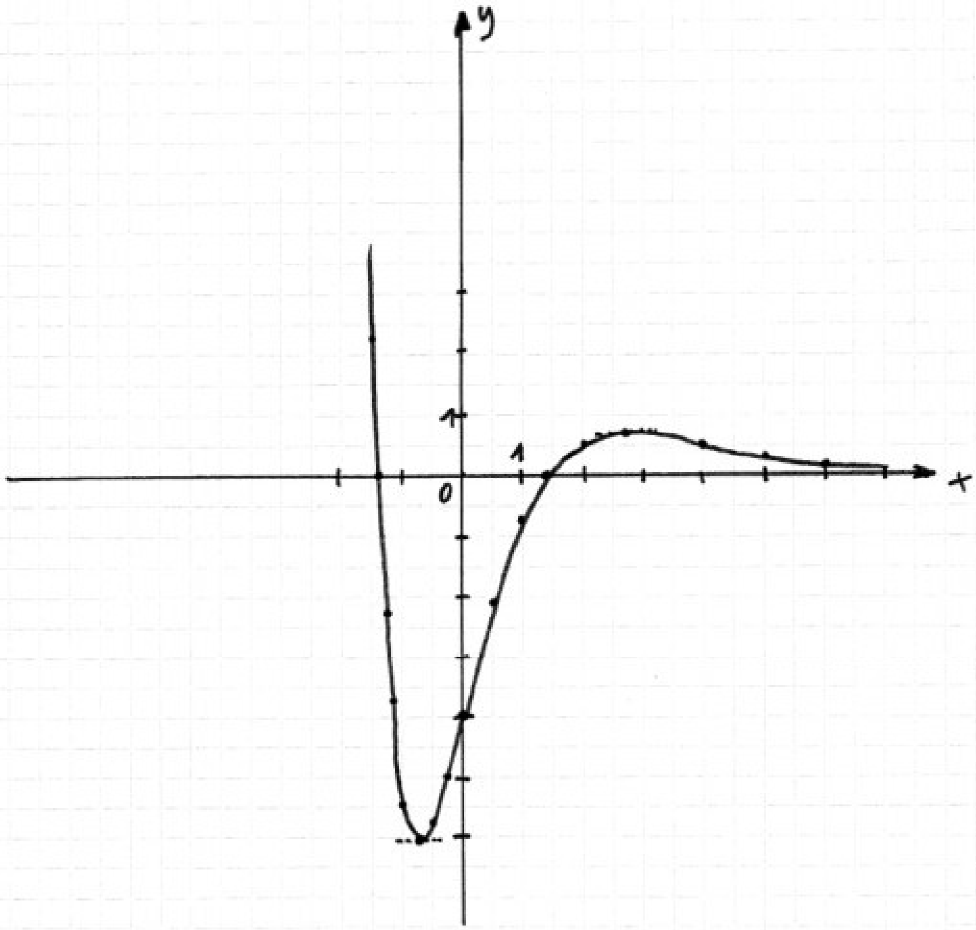
r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x) = 0 \Rightarrow 2x(x-4)e^{-x} = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$ $(e^{-x} > 0) \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$. Si $x = 0$, $f(x) = -4$ (voir e)) et $f'(x) = 4$. Si $x = 4$, $f(x) = 28e^{-4} \cong 0{,}513$ et $f'(x) = -12e^{-4} \cong -0{,}513$.

Les points d'inflexion sont $(0; -4)$ et $(4; -0{,}22)$.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x		0		4	
signes de $f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
convexité ou concavité de $f(x)$	convexe		concave		convexe

t) <u>Graphique:</u>



d. $f(x) = \frac{1}{x-3} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x-3}$:

a) Domaine de définition: Comme on doit avoir $x-3 \neq 0$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

b) Parité: On a $f(-x) = \frac{e^{x}}{-x-3} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire ni impaire.

c) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions périodiques, elle n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{x-3} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0$ ce qui est exclu puisque $e^{-x} > 0$ pour toute valeur de $x \Rightarrow f$ n'a pas de zéros.

e) Intersection avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{e^{-0}}{0-3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

f) Tableau de signes:

x		3	
signes de $f(x)$	$-$	▨	$+$

g) Asymptotes verticales: Comme x est un exclu, $x = 3$ est une asymptote verticale.

h) Comportement asymptotique: On a $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{e^{-x}}{x-3} = \text{"}\frac{e^{-3}}{0_-}\text{"} = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{e^{-x}}{x-3} = \text{"}\frac{e^{-3}}{0_+}\text{"} = +\infty$.

i) Asymptotes non verticales: On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x-3} = \text{"}\frac{+\infty}{-\infty}\text{"} = 0_-$ car exp gagne sur $x-3$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x-3} = \text{"}\frac{0_+}{+\infty}\text{"} = 0_+$.

Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après i), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0+$.

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> $f(x)=0$ ne donne aucune solution (voir d)). Ainsi il n'y a pas d'intersection avec $y=0$.

l) <u>Première dérivée:</u> Comme $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x-3}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=e^{-x}$ et $v=x-3$, on a $u'=-e^{-x}$ et $v'=1$, d'où $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{-e^{-x}(x-3)-e^{-x}\cdot 1}{(x-3)^2}=\dfrac{(-x+3-1)e^{-x}}{(x-3)^2}=$
$=\dfrac{(-x+2)e^{-x}}{(x-3)^2}$. Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{(-x+2)e^{-x}}{(x-3)^2}=0 \Rightarrow (-x+2)e^{-x}=0$
$\Rightarrow -x+2=0 \quad (e^{-x}>0) \Rightarrow x=2$.

Avec $x=2$, $f(x)=\dfrac{e^{-2}}{2-3}=\dfrac{e^{-2}}{-1}=-e^{-2}=-\dfrac{1}{e^2}\cong -0{,}135$.

Ainsi $(2;-0{,}135)$ est un point à tangente horizontale.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> L'unique point critique de f' est $x=3$.
On a $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{(-x+2)e^{-x}}{(x-3)^2}=\text{"}\dfrac{-e^{-3}}{0+}\text{"}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f'(x)=$
$=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{(-x+2)e^{-x}}{(x-3)^2}=\text{"}\dfrac{-e^{-3}}{0+}\text{"}=-\infty$.

o) <u>Tableau de variation:</u>

x		2		3	
Signes de $f'(x)$	+	0	−	//	−
Croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	//	$\searrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> D'après o), $(2;-0{,}135)$ est un maximum (local).

q) <u>Deuxième dérivée:</u> Comme $f'(x)=\dfrac{(-x+2)e^{-x}}{(x-3)^2}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=(-x+2)e^{-x}$ et $v=(x-3)^2$, on a $u'=-1e^{-x}+(-x+2)(-e^{-x})=(-1+x-2)e^{-x}=(x-3)e^{-x}$ et $v'=2(x-3)$, d'où
$f''(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{(x-3)e^{-x}(x-3)^2-(-x+2)e^{-x}2(x-3)}{((x-3)^2)^2}=$
$=\dfrac{(x-1)e^{-x}((x-3)^2-2(-x+2))}{(x-3)^4}=\dfrac{(x^2-6x+9+2x-4)e^{-x}}{(x-3)^3}=\dfrac{(x^2-4x+5)e^{-x}}{(x-3)^3}$.

Son domaine est $D_{f''}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

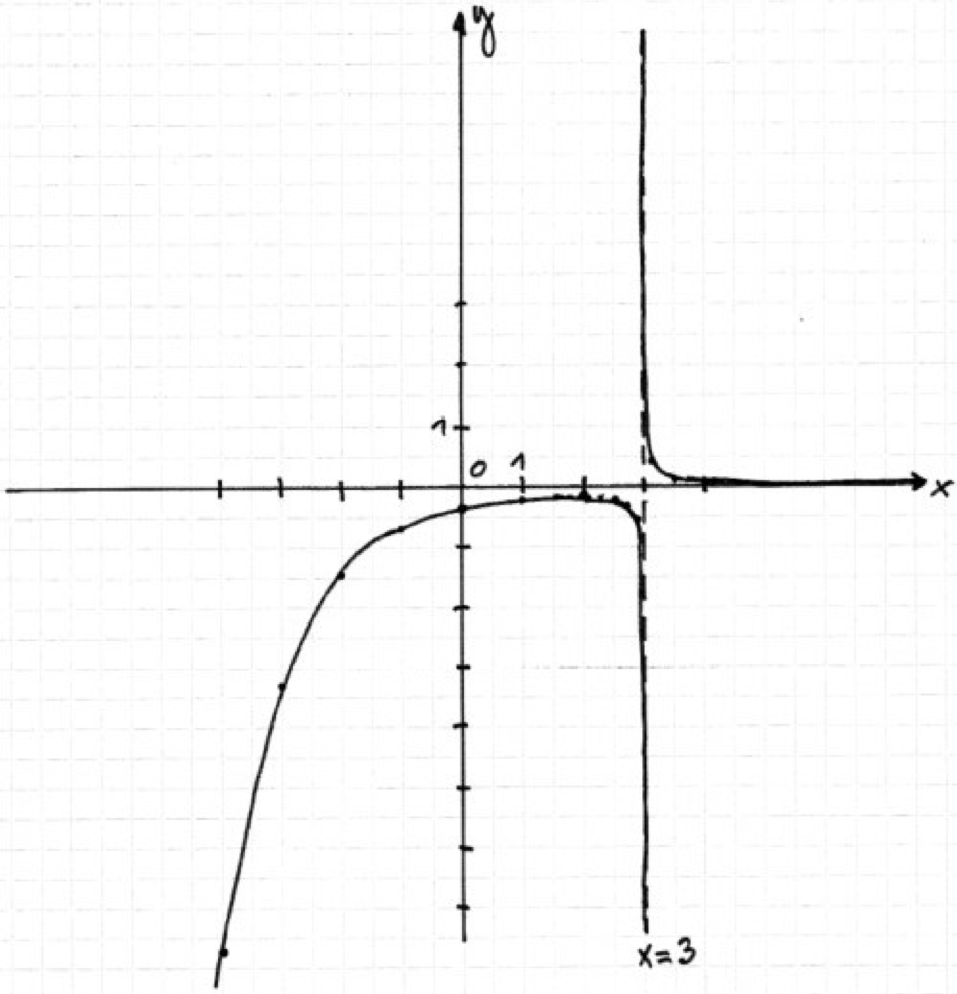
r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x)=0 \Rightarrow \dfrac{(x^2-4x+5)e^{-x}}{(x-3)^3}=0 \Rightarrow (x^2-4x+5)e^{-x}=0$
$\Rightarrow x^2-4x+5=0 \quad (e^{-x}>0)$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-4$ et $c=5$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=$
$=16-20=-4$; il n'y a donc aucune solution.

Par conséquent, f n'a aucun point d'inflexion.

s) <u>Tableau de concavité:</u>

x		3	
Signes de $f''(x)$	−	//	+
Concavité ou convexité de $f(x)$	$\frown$ concave	//	$\smile$ convexe

t) Graphique:



Exercice 6.102

a. $f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$: domaine de définition: $D=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ($x^2+1>0$ pour toute valeur de x); voyons ce qu'il se passe en $x=0$; d'après Formulaires et Tables p. 72, on a $\lim_{u\to 0}\frac{\ln(u+1)}{u}=1$; en posant $u=x^2$, on obtient $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=1$, ce que l'on peut écrire $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(x^2+1)}{x}=1$.
Comme $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\pm\infty$, on a alors forcément $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{1}=0$ (sinon $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(x^2+1)}{x}=\pm\infty$).
Ainsi f a un trou en $x=0$.
De plus, comme $f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}=\frac{u}{v}$ avec $u=\ln(x^2+1)$ et $v=x$, on a $u'=\frac{2x}{x^2+1}$ et $v'=1$,
d'où $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\cdot x-\ln(x^2+1)\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)\right)=$
$=\frac{2}{x^2+1}-\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$. Ainsi $\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2+1}-\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right)=$ "$+\infty-1$" $=+\infty$.
Par conséquent, $x=0$ est un point de f à tangente verticale.
En outre $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}=0_\pm$ (car ln perd par rapport à x). Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale et on a $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0_+$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0_-$.

b. $f(x)=\frac{e^x}{x^2+ax+a}$: domaine de définition: cherchons les x tels que $x^2+ax+a=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $Ax^2+Bx+C=0$ avec $A=1$, $B=a$ et $C=a$; on a $\Delta=B^2-4AC=$
$=a^2-4\cdot 1\cdot a=a^2-a=a(a-1)$; on a $\Delta>0$ si $a(a-1)>0$, c'est-à-dire $a<0$ ou $a>1$;
$\Delta=0$ si $a=0$ ou $a=1$; $\Delta<0$ si $0<a<1$;
si $a<0$ ou $a>1$, les solutions sont $x=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{-a+\sqrt{a(a-1)}}{2}$ et $x=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-a-\sqrt{a(a-1)}}{2}$;
si $a=0$ ou $a=1$, la solution est $x=\frac{-B}{2A}=-\frac{a}{2}$;
si $0<a<1$, il n'y a pas de solution;
ainsi le domaine de définition est: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-a-\sqrt{a(a-1)}}{2};\frac{-a+\sqrt{a(a-1)}}{2}\right\}$ si $a<0$ ou $a>1$,
$D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{a}{2}\right\}$ si $a=0$ ou $a=1$,
$D=\mathbb{R}$ si $0<a<1$.
Si $a<0$ ou $a>1$, $x=\frac{-a-\sqrt{a(a-1)}}{2}$ et $x=\frac{-a+\sqrt{a(a-1)}}{2}$ sont des asymptotes verticales et on a
$\lim_{x\underset{<}{\to}\frac{-a-\sqrt{a(a-1)}}{2}}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\underset{>}{\to}\frac{-a-\sqrt{a(a-1)}}{2}}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\underset{<}{\to}\frac{-a-\sqrt{a(a-1)}}{2}}=-\infty$ et $\lim_{x\underset{>}{\to}\frac{-a-\sqrt{a(a-1)}}{2}}f(x)=+\infty$.

Si $a=0$ ou $a=1$, $x=-\frac{a}{2}$ est une asymptote verticale et on a $\lim_{x\underset{<}{\to}-\frac{a}{2}}f(x)=\lim_{x\underset{>}{\to}-\frac{a}{2}}f(x)=+\infty$.

De plus, comme $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ et que e^x gagne sur x^2+ax+a à $+\infty$, $y=0$ est une asymptote horizontale lorsque $x\to-\infty$ et on a $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0_+$.

c. $f(x)=\frac{e^x}{x^{1000}+2}$: domaine de définition: $x^{1000}+2>0$ pour toute valeur de x ; ainsi $D=\mathbb{R}$.
Comme $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ et que e^x gagne sur $x^{1000}+2$ à $+\infty$, $y=0$ est une asymptote horizontale lorsque $x\to-\infty$ et on a $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0_+$.

d. $f(x)=\frac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$: domaine de définition: on doit avoir $x>0$ et $\ln(x)\neq 0\Rightarrow x\neq 1$; ainsi

$D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$;

pour $x \in D$, on peut écrire $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)} = \frac{2\ln(x)}{\ln^2(x)} = \frac{2}{\ln(x)}$; ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \text{"}\frac{2}{-\infty}\text{"} = 0_-$,

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \text{"}\frac{2}{0-}\text{"} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \text{"}\frac{2}{0+}\text{"} = +\infty$;

par conséquent $x = 1$ est une asymptote verticale et on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

Pour $x \in D$, on a $f(x) = \frac{2}{\ln(x)} = \frac{u}{v}$ avec $u = 2$ et $v = \ln(x)$, d'où $u' = 0$ et $v = \frac{1}{x}$. Ainsi $f'(x) =$
$= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0 \cdot \ln(x) - 2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{2}{x\ln^2(x)}$; ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \text{"}\frac{2}{0_+ \cdot +\infty}\text{"} = +\infty$ car ln perd face à x.

Ainsi, si $x \underset{>}{\to} 0$, on a $f(x) = 0$ et $f'(x) = +\infty$; $x = 0$ est donc un point à tangente infinie.

En outre, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\ln(x)} = 0_+$ (inutile de regarder $x \to -\infty$ puisque $D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$).

Ainsi $y = 0$ est une asymptote verticale et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0_+$.

Exercice 6.103

On a $f(x) = \frac{x}{\ln(x)} - 3$.

a) Domaine de définition: on doit avoir $x > 0$ (pour que ln existe) et $\ln(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$; ainsi $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

b) Parité: Comme $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, f ne peut être ni paire, ni impaire.

c) Périodicité: Comme $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, f ne peut pas être périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\ln(x)} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\ln(x)} = 3 \Rightarrow x = 3\ln(x)$; cette équation n'est pas facile à résoudre; on va commencer par chercher s'il existe des solutions et si oui, combien; pour cela, on va étudier la fonction $g(x) = x - 3\ln(x)$; son domaine est $D_g = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$; on a $g'(x) = 1 - \frac{3}{x}$; $g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 3$; on fait un tableau de variation pour g:

x	////	0		3	
$g'(x)$	////		$-$	0	$+$
$g(x)$	////		$\searrow$	min	$\nearrow$

ainsi g est minimum en $x = 3$; on a $g(3) = 3 - 3\ln(3) = -0,296$; de plus $g(1) = 1 - 3\ln(1) = 1$ et $g(5) = 5 - 3\ln(5) = 0,172$;

on en déduit que $g(x) = 0$ (c'est-à-dire $x = 3\ln(x)$) a 2 solutions: une dans l'intervalle $]1;3[$ et l'autre dans l'intervalle $]3;5[$;

$g(2) = 2 - 3\ln(2) = -0,079$, $g(1,5) = 1,5 - 3\ln(1,5) = 0,284$, $g(1,75) = 1,75 - 3\ln(1,75) = 0,071$,
$g(1,875) = 1,875 - 3\ln(1,875) = -0,011$, $g(1,86) = 1,86 - 3\ln(1,86) = -0,002$,
$g(1,85) = 1,85 - 3\ln(1,85) = 0,004$, $g(1,855) = 1,855 - 3\ln(1,855) = 0,0013$,
$g(1,8575) = 1,8575 - 3\ln(1,8575) = -0,00019$; ainsi une des solutions est $x \cong 1,8575$;
$g(4) = 4 - 3\ln(4) = -0,159$, $g(4,5) = 4,5 - 3\ln(4,5) = -0,012$, $g(4,75) = 4,75 - 3\ln(4,75) = 0,076$,
$g(4,6) = 4,6 - 3\ln(4,6) = 0,021$, $g(4,55) = 4,55 - 3\ln(4,55) = 0,0046$,
$g(4,53) = 4,53 - 3\ln(4,53) = -0,002$, $g(4,54) = 4,54 - 3\ln(4,54) = 0,0012$,
$g(4,535) = 4,535 - 3\ln(4,535) = -0,0005$, $g(4,537) = 4,537 - 3\ln(4,537) = 0,0002$,
$g(4,536) = 4,536 - 3\ln(4,536) = -0,0001$; ainsi la 2e solution est $x \cong 4,536$;
par conséquent, les zéros de f sont $x \cong 1,8575$ et $x \cong 4,536$.

e) Intersection avec Oy: Comme $x = 0 \notin D_f$, f ne coupe pas Oy.

f) Tableau de signes:

x	////	0		1		1,8575		4,536	
Signes de $f(x)$	////		$-$	////	$+$	0	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales, sauts, trous: les points à considérer sont $x = 0$ et $x = 1$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{x}{\ln(x)} - 3\right) = "\frac{0}{-\infty} - 3" = -3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{x}{\ln(x)} - 3\right) = "\frac{1}{0-} - 3" = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{x}{\ln(x)} - 3\right) = "\frac{1}{0+} - 3" = +\infty$.

Ainsi $x = 1$ est une asymptote verticale et $x = 0$ est tel que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -3$.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après g), on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

i) <u>Asymptotes non verticales:</u> Une asymptote non verticale, si elle existe, est de la forme $y = mx + h$, où $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe $h = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.

Ici comme $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on considère uniquement $x \to +\infty$.

On a $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\ln(x)} - 3\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{3}{x}\right) = 0 - 0 = 0$ et

$h = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\ln(x)} - 3\right) = +\infty$ car $\ln(x)$ perd par rapport à x lorsque $x \to +\infty$.

Ainsi il n'y a pas d'asymptotes non verticales.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> /

k) <u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> /

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f(x) = \frac{u}{v} - 3$ avec $u = x$ et $v = \ln(x)$. On a $u' = 1$ et $v' = \frac{1}{x}$, d'où $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$. Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

m) <u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = 0 \Rightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1$
$\Rightarrow x = e^1 = e$.

Avec $x = e$, on a $f(x) = \frac{e}{\ln(e)} - 3 = \frac{e}{1} - 3 = e - 3$.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> Les points critiques de f' sont $x = 0$ et $x = 1$.

On a $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x)\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)}{\ln(x) \cdot \ln(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\ln(x)}}{\ln(x)} = \text{"}\frac{1 - \frac{1}{-\infty}}{-\infty}\text{"} = 0_-$.

En outre $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = \text{"}\frac{0 - 1}{0_+}\text{"} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} =$
$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \text{"}\frac{0 - 1}{0_+}\text{"} = -\infty$.

o) <u>Tableau de variations:</u>

x	///	0		1		e	
Signes de $f'(x)$	///		$-$	///	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	///		$\searrow$	///	$\searrow$	min	$\nearrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> D'après o), $(e; e-3)$ est un minimum (local).

q) <u>Deuxième dérivée:</u> On a $f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = \frac{u}{v}$ avec $u = \ln(x) - 1$ et $v = \ln^2(x)$. On a $u' = \frac{1}{x}$ et $v' = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)}{x}$, d'où $f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}\ln^2(x) - (\ln(x) - 1)\frac{2\ln(x)}{x}}{(\ln^2(x))^2} =$

$$= \frac{\frac{\ln(x)}{x}\left(\ln(x) - 2(\ln(x) - 1)\right)}{\ln^4(x)} = \frac{\ln(x) - 2(\ln(x) - 1)}{x\ln^3(x)} = \frac{\ln(x) - 2\ln(x) + 2}{x\ln^3(x)} = \frac{2 - \ln(x)}{x\ln^3(x)}.$$

Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

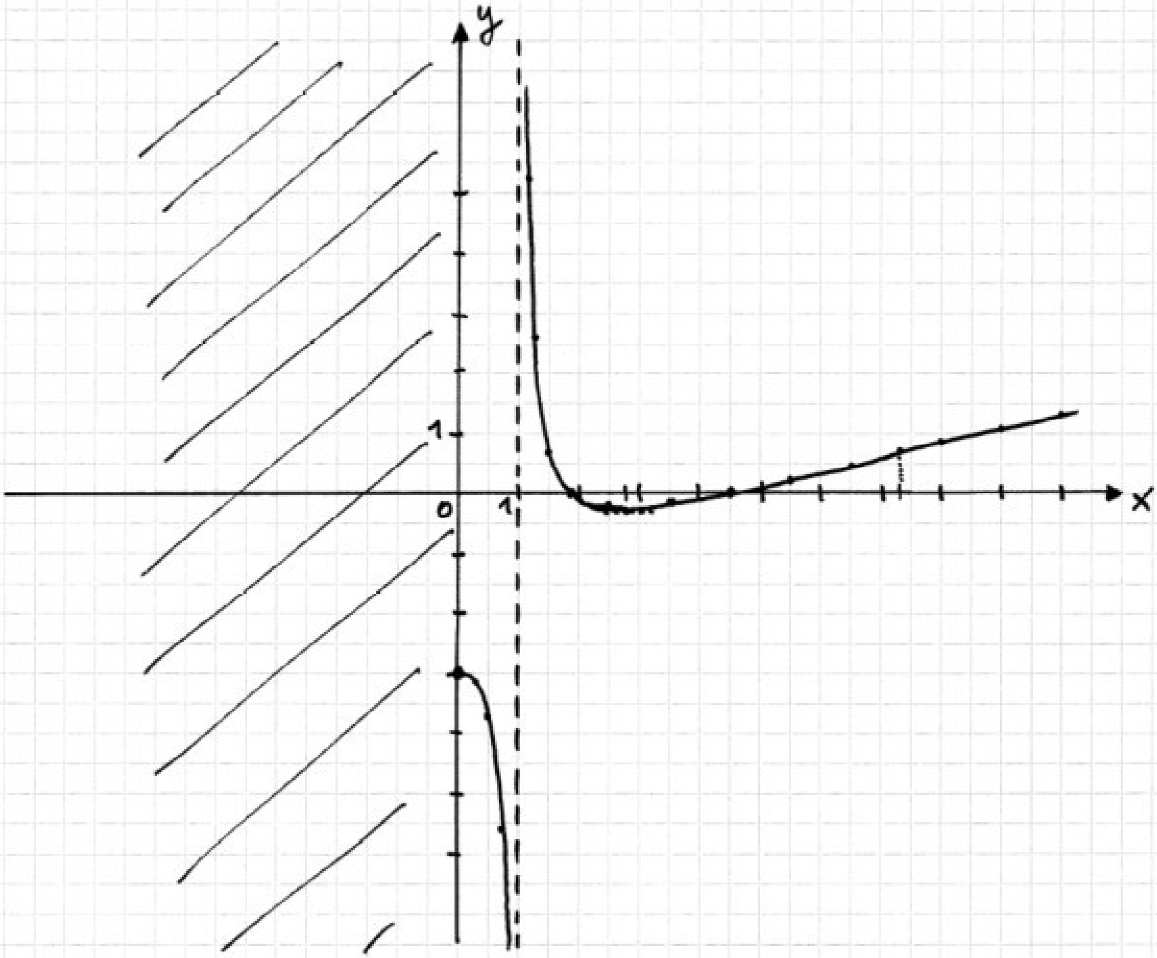
r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 - \ln(x)}{x\ln^3(x)} = 0 \Rightarrow 2 - \ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2$.

Avec $x = e^2$, on a $f(x) = \frac{e^2}{\ln(e^2)} - 3 = \frac{e^2}{2} - 3$ et $f'(x) = \frac{\ln(e^2)-1}{\ln^2(e^2)} = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

s) Tableau de convexité:

x	////	0		1		e^2	
Signes de $f''(x)$	////		$-$	//	$+$	0	$-$
Convexité ou concavité de $f(x)$	////		Concave	//	Convexe		Concave

t) Graphique:



Exercice 6.104

On a $f(x) = e^{0{,}75x} - 3x + c$.

a. Pour que f passe par l'origine $(0;0)$, on doit avoir $0 = e^{0{,}75 \cdot 0} - 3 \cdot 0 + c$
$\Longrightarrow 0 = 1 + c \Longrightarrow c = -1$.

b. On a $f'(x) = 0{,}75 e^{0{,}75x} - 3$.
$f'(x) = 0 \Longrightarrow 0{,}75 e^{0{,}75x} - 3 = 0 \Longrightarrow 0{,}75 e^{0{,}75x} = 3 \Longrightarrow e^{0{,}75x} = 4$
$\Longrightarrow 0{,}75x = \ln(4) \Longrightarrow x = \frac{\ln(4)}{0{,}75} = \frac{4\ln(4)}{3} \cong 1{,}848$.

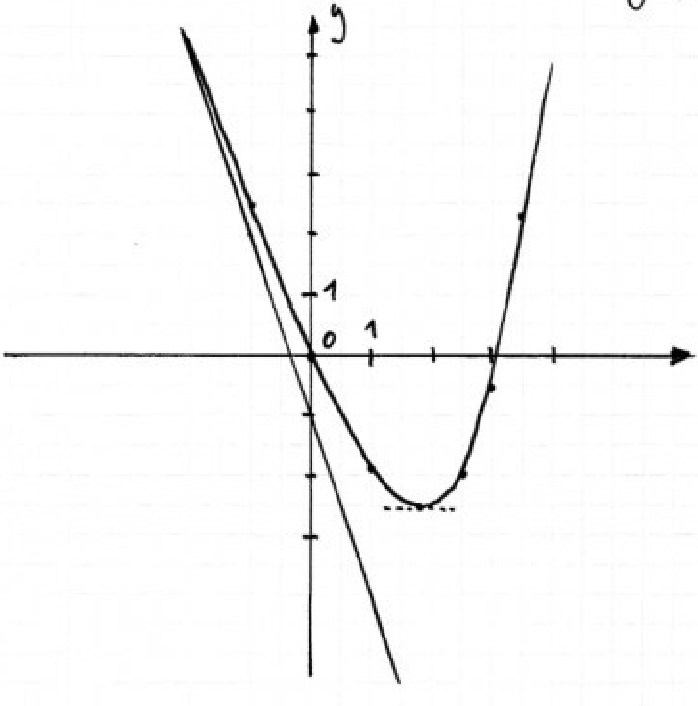
Avec $x = \frac{4\ln(4)}{3}$, on a $f(x) = e^{0{,}75 \frac{4\ln(4)}{3}} - 3\frac{4\ln(4)}{3} - 1 = e^{\ln(4)} - 4\ln(4) - 1 =$
$= 4 - 4\ln(4) - 1 = 3 - 4\ln(4) \cong -2{,}545$.
Ainsi les coordonnées du point à tangente horizontale sont $\left(\frac{4\ln(4)}{3} ; 3 - 4\ln(4)\right) \cong$
$(1{,}848 ; -2{,}545)$.

c. Comme $D_f = \mathbb{R}$, on n'a aucune asymptote verticale. Cherchons à voir si f a une asymptote non verticale. Si elle existe, elle sera de la forme $y = mx + h$ avec $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{0{,}75x} - 3x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{0{,}75x}}{x} - 3 - \frac{1}{x} \right) = \text{"} +\infty - 3 - 0 \text{"} = +\infty$
(car $e^{0{,}75x}$ gagne sur x) et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{0{,}75x - 3x - 1}{x} =$
$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{0{,}75x}}{x} - 3 - \frac{1}{x} \right) = 0 - 3 - 0 = -3$. Ainsi, lorsque $x \to -\infty$, on a $m = -3$.

On a alors $h = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{0{,}75x} - 3x - 1 - (-3x) \right) =$
$= \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{0{,}75x} - 1) = -1$. Ainsi, lorsque $x \to -\infty$, on a l'asymptote oblique $y = -3x - 1$.

Graphique:



Exercice 6.105

On a $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$.
On sait que f n'admet qu'un point à tangente horizontale, c'est-à-dire que $f'(x)$ a une unique solution.
On a $f(x) = uv$ avec $u = x^2 + ax + b$ et $v = e^x$. Ainsi $u' = 2x + a$ et $v' = e^x$, d'où
$f'(x) = u'v + uv' = (2x+a)e^x + (x^2 + ax + b)e^x = (2x + a + x^2 + ax + b)e^x =$
$= (x^2 + (a+2)x + a + b)e^x$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + (a+2)x + a + b)e^x = 0 \Rightarrow x^2 + (a+2)x + a + b = 0$.
Cette dernière équation, de la forme $Ax^2 + Bx + C = 0$ avec $A = 1$, $B = a+2$ et $C = a+b$, doit avoir une seule solution ; autrement dit, on doit avoir $\Delta = B^2 - 4AC = 0$
$\Rightarrow (a+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a+b) = a^2 + 2a + 4 - 4a - 4b = a^2 - 2a + 4 - 4b = (a-2)^2 - 4b = 0$.
En outre, si $\Delta = 0$, la solution est $x = -\frac{B}{2A} = -\frac{a+2}{2 \cdot 1} = -\frac{a+2}{2}$.
Comme l'abscisse du point à tangente horizontale est 2, on doit avoir $-\frac{a+2}{2} = 2$
$\Rightarrow -(a+2) = 4 \Rightarrow a + 2 = -4 \Rightarrow a = -6$.
Avec $a = -6$, on a $(a-2)^2 - 4b = 0 \Rightarrow (-6-2)^2 - 4b = 0 \Rightarrow 4b = (-8)^2 = 64 \Rightarrow b = 16$.
Ainsi, avec $a = -6$ et $b = 16$, f admet un seul point à tangente horizontale, dont l'abscisse est 2.

Exercice 6.106

a. $y = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$:

a) Domaine de définition: $D_f = \mathbb{R}$

b) Parité: $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques, elle n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow (e^x)^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (e^x)^2 = 1 \Rightarrow e^x = 1 \;(e^x > 0) \Rightarrow x = 0.$

e) Intersections avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0.$

f) Tableau de signes:

x		0	
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

g) Asymptotes verticales: Aucune, puisque $D_f = \mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{"0 - \infty"}{2} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{"+\infty - 0"}{2} = +\infty$. f n'a pas d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: On a $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(= \cosh(x))$. Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 0$

$\Rightarrow (e^x)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (e^x)^2 = -1$, ce qui est impossible $\Rightarrow f$ n'a pas de point à tangente horizontale.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': f' n'a pas de point critique.

o) Tableau de variations:

x	
signe de $f'(x)$	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: /

q) Deuxième dérivée: On a $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $(= \sinh(x))$. Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}$.

r) Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$ (voir d)).

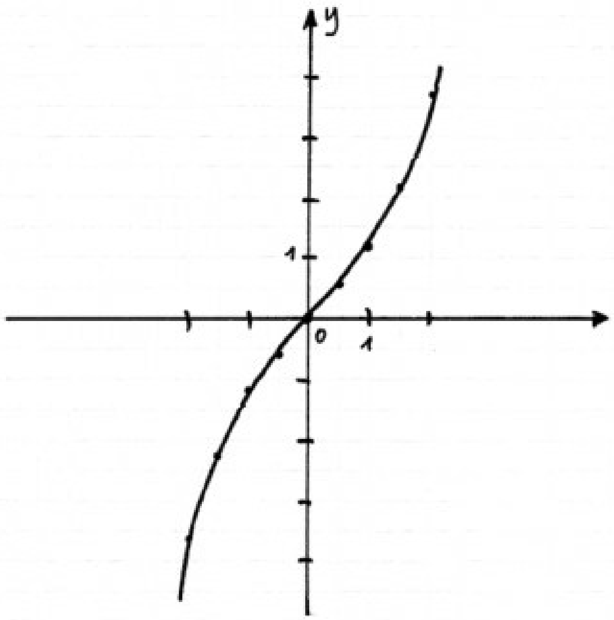
Avec $x = 0$, on a $f'(x) = \dfrac{e^0 + e^{-0}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$ et $f(x) = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$.

Ainsi $(0;0)$ est un point d'inflexion.

s) Tableau de convexité:

x		0	
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
convexité ou concavité de $f(x)$	$\frown$ concave		$\smile$ convexe

t) Graphique:



$y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$:

a) Domaine de définition: $D_f = \mathbb{R}$.

b) Parité: $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x) \Rightarrow f$ est paire.

c) Périodicité: f ne contenant pas de fonctions périodiques, f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \Rightarrow (e^x)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (e^x)^2 = -1$,
ce qui est impossible $\Rightarrow f$ n'a pas de zéros.

e) Intersection avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$.

f) Tableau de signes:

x	
signe de $f(x)$	$+$

g) Asymptotes verticales: Aucune, puisque $D_f = \mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\text{“}+\infty + 0\text{”}}{2} = +\infty$ et
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\text{“}0 + \infty\text{”}}{2} = +\infty$. f n'a pas d'asymptote non verticale.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersections avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: On a $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $(= \sinh(x))$. Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0$
$\Rightarrow (e^x)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (e^x)^2 = 1 \Rightarrow e^x = 1 \quad (e^x > 0) \Rightarrow x = 0$.

Avec $x = 0$, on a $f(x) = 1$ (voir e)).

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': f' n'a pas de point critique.

o) Tableau de variations:

x		0	
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(0;1)$ est un minimum.

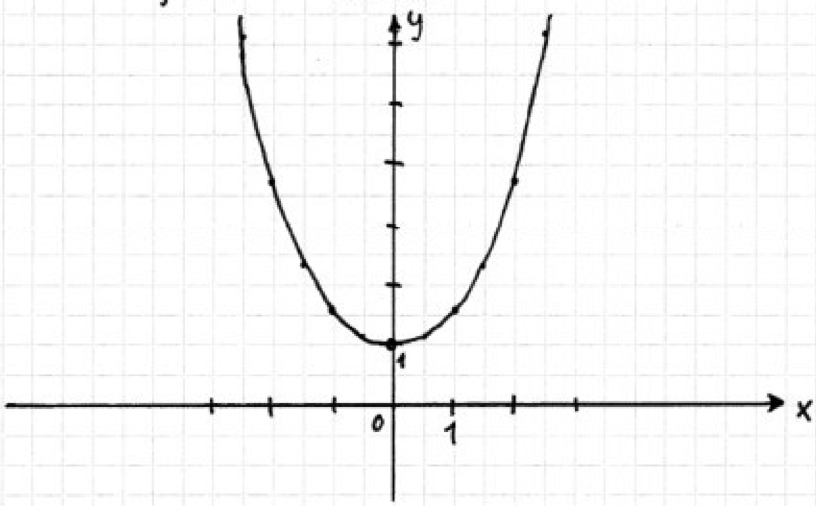
q) Deuxième dérivée: $f''(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(= \cosh(x))$. Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}$.

r) Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \Rightarrow (e^x)^2 + 1 = 0$
$\Rightarrow (e^x)^2 = -1$, impossible. Ainsi f n'a pas de point d'inflexion.

s) Tableau de convexité:

x	
Signes de $f''(x)$	+
Convexité ou concavité de $f(x)$	$\smile$ convexe

t) Graphique:



$y = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. On va utiliser ce qui a été fait ci-dessus pour $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$.

a) Domaine de définition: On doit avoir $\cosh(x) \neq 0$. Or, ceci est vrai pour toute valeur de x. Ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

b) Parité: On sait que $\sinh(x)$ est impaire $(\sinh(-x) = -\sinh(x))$ et que $\cosh(x)$ est paire $(\cosh(-x) = \cosh(x))$. Par conséquent $\tanh(x)$ est impaire $\left(\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = \right.$
$\left. = -\tanh(x)\right)$.

c) Périodicité: Comme f ne contient pas de fonctions périodiques, f n'est pas périodique.

d) Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = 0 \Rightarrow \sinh(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

e) Intersections avec Oy: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \tanh(0) = \frac{\sinh(0)}{\cosh(0)} = \frac{0}{1} = 0$.

f) Tableau de signes:

x		0	
Signes de $f(x)$	−	0	+

g) Asymptotes verticales: Aucune puisque $D_f = \mathbb{R}$.

h) Comportement asymptotique: /

i) Asymptotes non verticales: On a $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Ainsi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x(e^x-e^{-x})}{e^x(e^x+e^{-x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1} = \frac{0^2-1}{0^2+1} = -1$ et

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}(e^x-e^{-x})}{e^{-x}(e^x+e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-(e^{-x})^2}{1+(e^{-x})^2} = \frac{1-0^2}{1+0^2} = 1$

Ainsi $y=-1$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$ et $y=1$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

j) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après i), $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1} = \frac{0_+-1}{0_++1} = \frac{-1_+}{1_+} = 1_+$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-(e^{-x})^2}{1+(e^{-x})^2} = \frac{1-0_+}{1+0_+} = \frac{1_-}{1_+} = 1_-$.

k) <u>Intersection avec les asymptotes non verticales:</u>

Avec $y=1$: $f(x)=-1 \Rightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1 \Rightarrow e^x-e^{-x} = e^x+e^{-x} \Rightarrow -e^{-x} = e^{-x}$

$\Rightarrow 2e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}=0$ impossible puisque $e^{-x}>0$ pour toute valeur de x.

Avec $y=-1$: $f(x)=1 \Rightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = -1 \Rightarrow e^x-e^{-x} = -e^x-e^{-x} \Rightarrow e^x = -e^x$

$\Rightarrow 2e^x = 0 \Rightarrow e^x=0$ impossible puisque $e^x>0$ pour toute valeur de x.

Ainsi f ne coupe pas ses asymptotes non verticales.

l) <u>Première dérivée:</u> On a $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{u}{v}$ avec $u=\sinh(x)$ et $v=\cosh(x)$.

Ainsi $u'=\cosh(x)$ et $v'=\sinh(x)$, d'où $f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(\cosh(x))^2-(\sinh(x))^2}{(\cosh(x))^2} =$

$= \frac{1}{\cosh^2(x)}\left(\cosh^2(x)-\sinh^2(x)\right) = \frac{1}{\cosh^2(x)}\left(\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\right) =$

$= \frac{1}{\cosh^2(x)}\left(\frac{(e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4}\right) =$

$= \frac{1}{\cosh^2(x)} \cdot \frac{(e^x)^2+2+(e^{-x})^2-(e^x)^2+2-(e^{-x})^2}{4} = \frac{1}{\cosh^2(x)} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$.

Comme $\cosh^2(x)>0$ pour tout x, le domaine de f' est $D_{f'} = \mathbb{R}$.

m) <u>Point à tangente horizontale:</u> $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{\cosh^2(x)} = 0 \Rightarrow 1=0$ impossible $\Rightarrow f$ n'a pas de point à tangente horizontale.

n) <u>Pentes des tangentes aux points critiques de f':</u> f' n'a pas de point critique.

o) <u>Tableau de variation:</u>

x	
Signes de $f'(x)$	$+$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$

p) <u>Nature des points à tangente horizontale:</u> /

q) <u>Deuxième dérivée:</u> On a $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \cosh^{-2}(x) \Rightarrow f''(x) = -2\cosh^{-3}(x)\cdot\sinh(x) =$

$= -\frac{2\sinh(x)}{\cosh^3(x)}$. Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}$ $(\cosh(x)>0)$.

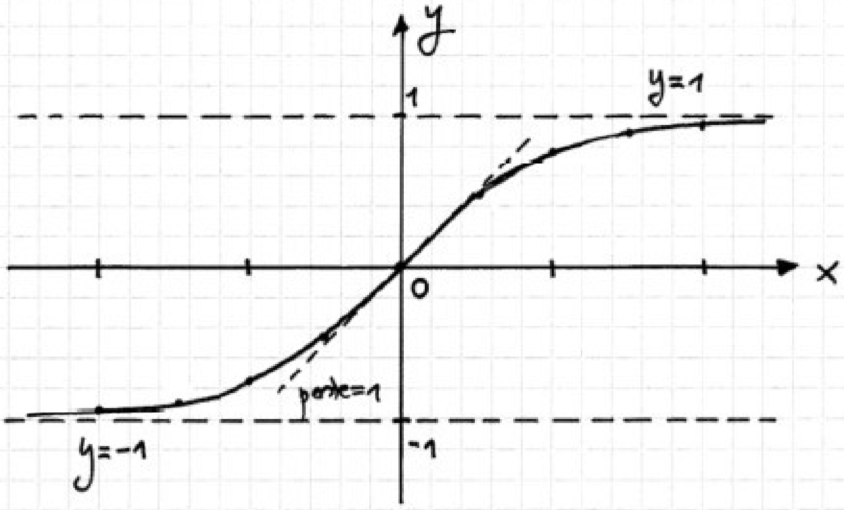
r) <u>Points d'inflexion:</u> $f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-2\sinh(x)}{\cosh^3(x)} = 0 \Rightarrow -2\sinh(x)=0 \Rightarrow \sinh(x)=0 \Rightarrow x=0$.

Avec $x=0$, on a $f(x) = \tanh(0) = \frac{0}{1} = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{1^2} = 1$.

s) <u>Tableau de convexité:</u>

x		0	
Signes de $f''(x)$	$+$	0	$-$
Convexité ou Concavité de $f(x)$	$\smile$ convexe		$\frown$ concave

t) Graphique:



$y=\coth(x)=\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}=\frac{1}{\tanh(x)}$. On va utiliser ce qui a été fait ci-dessus.

a) Domaine de définition: On doit avoir $\sinh(x)\neq 0$ (ou $\tanh(x)\neq 0$) et, donc $x\neq 0$.
Ainsi $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Parité: Comme $\tanh(x)$ est impaire, $\coth(x)$ est aussi impaire.

c) Périodicité: Comme $\tanh(x)$ n'est pas périodique, $\coth(x)$ ne l'est pas non plus.

d) Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{\tanh(x)}=0 \Rightarrow 1=0$ impossible. Ainsi f n'a pas de zéro.

e) Intersection avec Oy: comme $x=0\notin D_f$, $\coth(x)$ ne coupe pas Oy.

f) Tableau de signes:

x		0	
signes de $f(x)$	$-$	//////	$+$

g) Asymptotes verticales: Comme $x=0$ est un exclu, $x=0$ est une asymptote verticale.

h) Comportement asymptotique: On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\coth(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{\tanh(x)}=\text{"}\frac{1}{0-}\text{"}=-\infty$ et
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\coth(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\tanh(x)}=\text{"}\frac{1}{0+}\text{"}=+\infty$.

i) Asymptotes non verticales: Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\tanh(x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\tanh(x)=1$, on a
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\tanh(x)}=\frac{1}{-1}=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\tanh(x)}=\frac{1}{1}=1$.
Ainsi $y=-1$ est asymptote verticale lorsque $x\to-\infty$ et $y=1$ est asymptote verticale lorsque $x\to+\infty$.

j) Comportement asymptotique: On a $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\tanh(x)}=\frac{1}{-1_+}=-1_-$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\tanh(x)}=\frac{1}{1_-}=1_+$.

k) Intersections avec les asymptotes non verticales:
Avec $y=1$: $f(x)=1\Rightarrow\frac{1}{\tanh(x)}=1\Rightarrow\tanh(x)=1$ impossible.
Avec $y=-1$: $f(x)=-1\Rightarrow\frac{1}{\tanh(x)}=-1\Rightarrow\tanh(x)=-1$ impossible.
Ainsi f ne coupe pas ses asymptotes verticales.

e) Première dérivée: On a $f(x)=\coth(x)=\frac{1}{\tanh(x)}=(\tanh(x))^{-1}$. Ainsi $f'(x)=-1(\tanh(x))^{-2}(\tanh(x))'=$

$= -\frac{1}{\tanh^2(x)} \cdot \frac{1}{\cosh^2(x)}$. Comme $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, on a $\tanh^2(x) = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}$ et $\frac{1}{\tanh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)}$. Ainsi $f'(x) = -\frac{\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} \cdot \frac{1}{\cosh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$. Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\sinh(x) = 0$ si $x = 0$).

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 0 \Rightarrow -1 = 0$ impossible. Ainsi f n'a pas de point à tangente horizontale.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Le point critique de f' est $x = 0$. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(-\frac{1}{\sinh^2(x)}\right) = \text{"}-\frac{1}{0_+}\text{"} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-\frac{1}{\sinh^2(x)}\right) = \text{"}-\frac{1}{0_+}\text{"} = -\infty$.

o) Tableau de variation:

x		0	
signes de $f'(x)$	$-$	//	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$	//	$\searrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: /

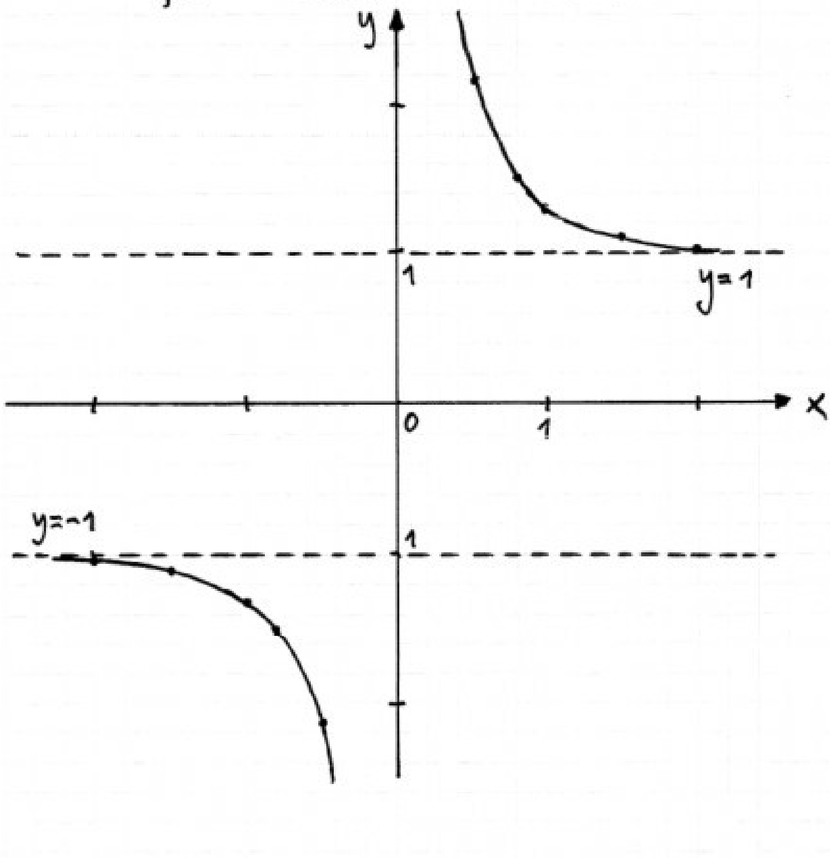
q) Deuxième dérivée: On a $f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = -\sinh^{-2}(x) \Rightarrow f''(x) = 2\sinh^{-3}(x)\cosh(x) = \frac{2\cosh(x)}{\sinh^3(x)}$. Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

r) Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\cosh(x)}{\sinh^3(x)} = 0 \Rightarrow \cosh(x) = 0$ impossible $\Rightarrow f$ n'a pas de points d'inflexion.

s) Tableau de convexité:

x		0	
signes de $f''(x)$	$-$	//	$+$
convexité ou concavité de $f(x)$	$\frown$ concave	//	$\smile$ convexe

t) Graphique:



b. On a $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} =$

$= \frac{(e^x)^2 + 2 + (e^{-x})^2 - (e^x)^2 + 2 - (e^{-x})^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$, pour toute valeur de x.

Exercice 6.10

On doit montrer que $\ln(x+1) \geqslant \frac{x}{x+1}$ $\forall x \in [0;+\infty[$ (pour toute valeur de x appartenant à $[0;+\infty[$).
Pour cela on va étudier la croissance de la fonction $d(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$: on va montrer que $d'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0;+\infty[$, ce qui nous dira que d est croissante sur $[0;+\infty[$; on calculera $d(0)$ et on verra que $d(0) \geqslant 0$; cela nous donnera alors que $d(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [0;+\infty[$, d'où l'inégalité à démontrer.

On a $d(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = \ln(x+1) - \frac{x+1-1}{x+1} = \ln(x+1) - 1 + \frac{1}{x+1}$.

Ainsi $d'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$.

Si $x \geqslant 0$, on a clairement $d'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \geqslant 0$.
Ainsi $d(x)$ est croissante sur $[0;+\infty[$.
En outre, $d(0) = \ln(0+1) - \frac{0}{0+1} = \ln(1) = 0$, et, donc, $d'(0) \geqslant 0$.
On en déduit alors que $d(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [0;+\infty[$, d'où $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geqslant 0$ $\forall x \in [0;+\infty[$ et donc $\ln(x+1) \geqslant \frac{x}{x+1}$ $\forall x \in [0;+\infty[$.

Exercice 6.108

On a $f(x)=x-\ln(x)$, ou plutôt $f(x)=x-\ln|x|$ pour pouvoir considérer des $x<0$.

a. On cherche à trouver la ou les solutions de $f(x)=0$, c'est-à-dire $x-\ln|x|=0$, sur l'intervalle $[-1;0[$. On a $f(-1)=-1-\ln|-1|=-1-\ln(1)=-1<0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}(x-\ln|x|)=\text{"}0-\ln(0)\text{"}=+\infty>0$. Comme f est une fonction continue sur $[-1;0[$ (on peut la dessiner sans lever le crayon), il existera forcément au moins un $x\in[-1;0[$ tel que $f(x)=0$.

Montrons qu'il ne peut en exister qu'un seul.

On a $f(x)=x-\ln|x|=x-\ln(-x)$ si $x\in[-1;0[$.

De plus $f'(x)=1-\frac{1}{-x}(-1)=1-\frac{1}{x}>0$ si $x\in[-1;0[$ (on a $\frac{1}{x}<0$ si $x\in[-1;0[$).

Ainsi f est strictement croissante sur $[-1;0[$.

Ainsi il n'existe qu'un seul $x\in[-1;0[$ tel que $f(x)=0$.

On va utiliser la méthode de la bissection pour trouver une estimation de cette solution (voir Formulaire et Tables p. 93 pour la description de la méthode de la bissection).

On sait que $f(-1)=-1$ et $f(-0{,}5)=-0{,}5-\ln(0{,}5)=0{,}193$.

On prend $m_1=\frac{-1+(-0{,}5)}{2}=-0{,}75$ (milieu entre -1 et $-0{,}5$). On a $f(m_1)=f(-0{,}75)=$
$=-0{,}75-\ln(0{,}75)=-0{,}46$.

On prend $m_2=\frac{-0{,}75+(-0{,}5)}{2}=-0{,}625$. On a $f(m_2)=-0{,}625-\ln(0{,}625)=-0{,}155$.

On prend $m_3=\frac{-0{,}625+(-0{,}5)}{2}=-0{,}5625$. On a $f(m_3)=-0{,}5625-\ln(0{,}5625)=0{,}013$.

On prend $m_4=\frac{-0{,}625+(-0{,}5625)}{2}=-0{,}59375$. On a $f(m_4)=-0{,}59375-\ln(0{,}59375)=-0{,}072$.

On prend $m_5=\frac{-0{,}59375+(-0{,}5625)}{2}=-0{,}578125$. On a $f(m_5)=-0{,}578125-\ln(0{,}578125)=-0{,}03$.

On prend $m_6=\frac{-0{,}578125+(-0{,}5625)}{2}=-0{,}5703125$. On a $f(m_6)=-0{,}5703125-\ln(0{,}5703125)=-0{,}008$.

On en déduit ainsi que la solution est $x\cong-0{,}57$.

b. a) <u>Domaine de définition:</u> $D_f=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) <u>Parité:</u> $f(-x)=-x-\ln|-x|=-x-\ln|x|\neq\pm f(x)\Rightarrow f$ n'est ni paire ni impaire.

c) <u>Périodicité:</u> f ne contenant pas de fonctions périodiques, elle n'est pas périodique.

d) <u>Zéros:</u> $f(x)=0\Longrightarrow x\cong-0{,}57$ (voir a.). Il n'y a pas d'autre solution.

e) <u>Intersection avec Oy:</u> Comme $x=0\notin D_f$, f ne coupe pas l'axe Oy.

f) <u>Tableau de signes:</u>

x		$-0{,}57$		0	
signes de $f(x)$	$-$	0	$+$	▨	$+$

g) <u>Asymptotes verticales:</u> On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-\ln|x|)=\text{"}0-(-\infty)\text{"}=+\infty$.
Ainsi $x=0$ est une asymptote verticale.

h) <u>Comportement asymptotique:</u> D'après g), on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=+\infty$.

i) Asymptotes non verticales: Une asymptote verticale, si elle existe, est de la forme $y = mx+h$, où $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, là où m existe, $h = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.

On a: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x - \ln|x|}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{\ln|x|}{x}\right) = 1 - 0 = 1$ ($\ln(x)$ perd par rapport à x).

Ainsi on a $m = 1$.

On a: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x - \ln|x| - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (-\ln|x|) = -\infty$.

Par conséquent, il n'y a pas d'asymptote oblique.

j) Comportement asymptotique: /

k) Intersection avec les asymptotes non verticales: /

l) Première dérivée: On a $f(x) = x - \ln|x| = \begin{cases} x - \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x - \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Ainsi $f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 - \frac{1}{-x}(-1) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} = 1 - \frac{1}{x}$.

Son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

m) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1$.

Avec $x = 1$, on a $f(x) = 1 - \ln 1 = 1$.

n) Pentes des tangentes aux points critiques de f': Il faut considérer $x = 0$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - (-\infty) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \infty = -\infty$.

o) Tableau de variations:

x		0		1	
Signes de $f'(x)$	$+$	//	$-$	0	$+$
Croissance ou décroissance de $f(x)$	$\nearrow$	//	$\searrow$	min	$\nearrow$

p) Nature des points à tangente horizontale: D'après o), $(1;1)$ est un minimum.

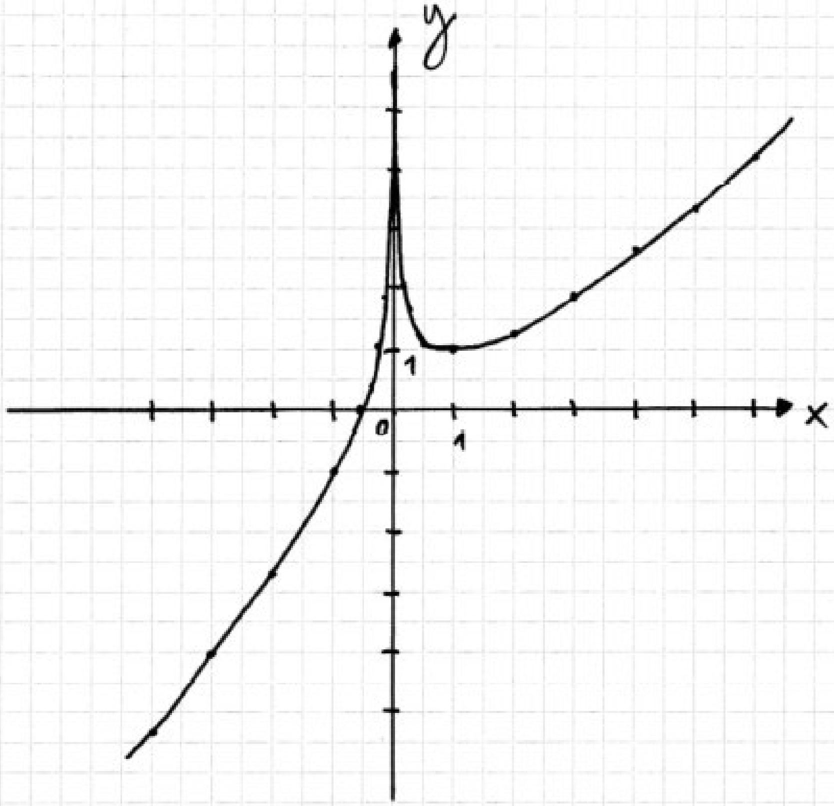
q) Deuxième dérivée: On a $f''(x) = \frac{1}{x^2}$. Son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

r) Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = 0$ impossible $\Rightarrow$ il n'y a pas de point d'inflexion.

s) Tableau de convexité:

x		0	
Signes de $f''(x)$	$+$	//	$+$
Convexité ou concavité de $f(x)$	$\cup$ convexe	//	$\cup$ convexe

t) Graphique:


y
x
0
1
1