Chapitre 8. Analyse combinatoire – Corrigé.

Exercice 1

L'ordre de placement des personnes est important. On a :

7 possibilités	6 possibilités	5 possibilités	4 possibilités	3 possibilités	2 possibilités	1 possibilité

Ainsi, il y a $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = \underline{5040}$ façons différentes.

Exercice 2

L'ordre des chiffres est important :

1.

6 possibilités	5 possibilités	4 possibilités

$\Rightarrow$ il y a $6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{120}$ nombres possibles.

2.

2 ou 3 2 possibilités	5 possibilités	4 possibilités

$\Rightarrow$ il y a $2 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{40}$ nombres possibles.

3.

4 possibilités	5 possibilités	2 ou 6 2 possibilités

(on commence par le dernier chiffre à droite)

$\Rightarrow$ il y a $4 \cdot 5 \cdot 2 = \underline{40}$ nombres possibles.

4. On nombres d'impairs = nb total de possibilités – nb de pairs $= 120 - 40 = \underline{80}$.

5.

4 possibilités	5 possibilités	5 1 possibilité

(on commence par le dernier chiffre à droite)

$\Rightarrow$ il y a $4 \cdot 5 \cdot 1 = \underline{20}$ nombres possibles.

Exercice 3

L'ordre des places est important. On a:

1. ___ ___ ___ ___ ___

5 poss | 4 poss | 3 poss | 2 poss | 1 poss

$\Longrightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = \underline{120}$ façons différentes.

2. G G G F F ou F G G G F ou F F G G G.

Pour chacune de ces possibilités on a:
1e garçon: 3 possibilités
2e garçon: 2 possibilités
3e garçon: 1 possibilité
1e fille: 2 possibilités
2e fille: 1 possibilité

$\Longrightarrow$ au total, on a $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = \underline{36}$ possibilités.

3. F F G G G ou G F F G G ou G G F F G ou G G G F F.

Similairement à 2., on a alors au total $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = \underline{48}$ possibilités.

4. En alternance, on a qu'une manière: G F G F G F.

Similairement à 2., on a alors au total $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{12}$ possibilités.

Exercice 4

L'ordre n'est pas important. On a donc des combinaisons et on les calcule avec la calculatrice:

$$C^n_k = C(n;k) = \binom{n}{k} = \boxed{n}\,\boxed{2nd}\,\underset{}{\overset{nCr}{\boxed{8}}}\,\boxed{k}\,\boxed{=}$$

(exemple: $C^5_2 = \boxed{5}\,\boxed{2nd}\,\boxed{8}\,\boxed{2}\,\boxed{=}\ 10$).

1. On choisit 3 élèves parmi 21: $C^{21}_3 = \underline{1330}$ délégations possibles.
2. Il reste à choisir 1 élèves parmi les 19 restants: $C^{19}_1 = \underline{19}$ délégations possibles.
3. On choisit 3 élèves parmi les 20 autres: $C^{20}_3 = \underline{1140}$ délégations possibles.
4. Il reste à choisir 2 élèves parmi les 19 restants: $C^{19}_2 = \underline{171}$ délégations possibles.

Exercice 5

On a : Cléante — Harpagon — Valère

10 possibilités (10 garçons) — 9 possibilités — 8 possibilités

$\Rightarrow 10.9.8 = \underline{720}$ manières.

Exercice 6

On a : Cléante — Harpagon — Valère | Frosine — Marianne

10 possibilités (10 garçons) — 9 possibilités — 8 possibilités | 7 possibilités (7 filles) — 6 possibilités

$\Rightarrow 10.9.8.7.6 = \underline{30'240}$ manières.

Exercice 7

L'ordre des lettres dans le mot est important.

1. On a CCCCV ou CCCVC ou CCVCC ou CVCCC ou VCCCC.
   Pour chacune de ces 5 manières, on a $4.3.2.1.5 = 120$ possibilités.
   Au total, on a donc $120.5 = \underline{600}$ possibilités.
2. On a VVVVV $\Rightarrow 5.4.3.2.1 = 5! = \underline{120}$ possibilités.
3. On a E _ _ _ S
   7 poss. (reste 7 lettres) — 6 poss. — 5 poss.
   $\Rightarrow 7.6.5 = \underline{210}$ possibilités.
4. On a C _ _ _ _
   4 poss — 8 — 7 — 6 — 5
   $\Rightarrow 4.8.7.6.5 = \underline{6720}$ possibilités.
5. Le E peut être à 5 places différentes. Pour les autres lettres, on a $8.7.6.5 = 1680$ possibilités. Au total, on a donc $5.1680 = \underline{8400}$ possibilités.
6. On a VCVCV ou CVCVC, soit
   $5.4.4.3.3 + 4.5.3.4.2 = 720 + 480 = \underline{1200}$ possibilités.
7. On a QU _ _ _ ou _ QU _ _ ou _ _ QU _ ou _ _ _ QU, soit
   $4.7.6.5 = \underline{840}$ possibilités.

Exercice 8

Il y a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ possibilités de mettre les gros livres ensemble.
Il y a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ possibilités de mettre les livres moyens ensemble.
Il y a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ possibilités de mettre les petits livres ensemble.
Il y a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ possibilités de placer les 3 ensembles de livres.
Ainsi, au total, il y a $120 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 6 = \underline{103'680}$ possibilités.

Exercice 9

1. $A \to B$ et $B \to C \longrightarrow 6 \cdot 4 = \underline{24}$ chemins possibles.
2. $A \to C$ et $C \to A \longrightarrow 24 \cdot 24 = \underline{576}$ chemins possibles.
3. $A \to C$ et $C \to A \longrightarrow 6 \cdot 4 \cdot (4-1) \cdot (5-1) = 24 \cdot 12 = \underline{360}$ chemins possibles.

Exercice 10

L'ordre est important. On a $\underset{7\text{ poss}}{\underline{\quad}} \; \underset{6}{\underline{\quad}} \; \underset{5}{\underline{\quad}} \; \underset{4}{\underline{\quad}} \Longrightarrow 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{840}$ nombres possibles.

Exercice 11

L'ordre n'est pas important $\longrightarrow$ combinaisons.
On choisit 4 légumes parmi 6 $\Longrightarrow C_4^6 = \underline{15}$ assortiments différents.

Exercice 12

L'ordre du choix n'est pas important $\longrightarrow$ combinaisons.
On choisit 5 personnes avec au moins 3 ouvriers.
3 ouvriers exactement : 3 ouvriers parmi 7 et 2 cadres parmi 8 $\longrightarrow C_3^7 \cdot C_2^8 = 35 \cdot 28 = 980$.
4 ouvriers exactement : 4 ouvriers parmi 7 et 1 cadre parmi 8 $\longrightarrow C_4^7 \cdot C_1^8 = 35 \cdot 8 = 280$.
5 ouvriers exactement : 5 ouvriers parmi 7 et 0 cadre parmi 8 $\longrightarrow C_5^7 \cdot C_0^8 = 21 \cdot 1 = 21$.
Au total, on a donc $980 + 280 + 21 = \underline{1281}$ possibilités.

Exercice 13

L'ordre du choix n'est pas important $\longrightarrow$ Combinaisons.
On choisit 13 étudiants parmi les 27 et les 14 restants forment le 2e groupe
$\longrightarrow C_{13}^{27} \cdot 1 = \underline{20'058'300}$ manières.

Exercice 14

L'ordre des lettres est important. On a $\underset{7\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{6}{\_\_}\ \underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ possibilités.

Il lui faudra donc $840 \cdot 5 = 4200$ secondes $=$ 70 minutes.

Exercice 15

On va calculer le nombre total de possibilités et soustraire le nombre de cas où les 2 personnes en question (A et B) sont l'une à côté de l'autre. L'ordre est important.

Nombre total de possibilités : $\underset{5\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ possibilités.

A et B côte à côte : $AB\ \underset{3\text{ poss}}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_}$ ou $\_\ AB\ \_\ \_$ ou $\_\ \_\ AB\ \_$ ou $\_\ \_\ \_\ AB$ ou

$BA\ \_\ \_\ \_$ ou $\_\ BA\ \_\ \_$ ou $\_\ \_\ BA\ \_$ ou $\_\ \_\ \_\ BA$

$\Rightarrow 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ possibilités.

Le nombre de manières où les 2 personnes ne sont pas l'une à côté de l'autre est donc

$120 - 48 =$ 72 possibilités.

Exercice 16

L'ordre du choix est important (A président, B secrétaire, C caissier est différent de B président, C secrétaire et A caissier) :

président	secrétaire	caissier
20 possibilités	19 possibilités	18 possibilités

$\Rightarrow$ au total $20 \cdot 19 \cdot 18 =$ 6840 possibilités.

Exercice 17

L'ordre du choix des réponses aux questions n'est pas important $\rightarrow$ combinaisons.

1. Choisir 6 parmi 10 $\Rightarrow C_6^{10} = 210$ choix.
2. Choisir 4 parmi les 8 autres $\Rightarrow C_4^{8} = 70$ choix.

Exercice 18

L'ordre des chiffres est important.

1. $\underset{5\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{5\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{5\text{ poss}}{\_\_} \Longrightarrow 5.5.5 = 5^3 = \underline{125}$ nombres possibles.

2. $\underset{5\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{4\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{3\text{ poss}}{\_\_} \Longrightarrow 5.4.3 = \underline{60}$ nombres possibles.

Exercice 19

L'ordre des lettres est important.

1. Toutes les lettres sont différentes : $\underset{5\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_} = 5! = \underline{120}$ mots.

2. Si toutes les lettres étaient différentes : $8.7.6.5.4.3.2.1 = 8! = 40'320$ mots.
   Mais, il y a 2A et 2C. Les A, respectivement les C, sont interchangeables sans que cela change le mot.
   Le nombre de mots possibles est donc $\dfrac{40'320}{2 \cdot 2} = \underline{10'080}$ mots.

   pour le A   pour le C