Exercice 1

$f(x) = (x+3)e^{-x}$

1) Domaine de définition: Pour toute valeur de x, on peut calculer f. Donc $D = \mathbb{R}$.

2) Parité: $f(-x) = (-x+3)e^{x} \neq \pm f(x)$. Donc f n'est ni paire, ni impaire.

3) Périodicité: Seules les fonctions contenant des fonctions trigonométriques peuvent être périodiques. Donc f n'est pas périodique.

4) Intersections avec l'axe x: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+3)e^{-x} = 0 \Rightarrow x+3 = 0$ car $e^{-x} > 0$ pour n'importe quelle valeur de $x \Rightarrow x = -3$.
Donc f coupe l'axe x en $x = -3$.

Intersection avec l'axe y: $x = 0 \Rightarrow f(x) = 3e^{-0} = 3$.
Donc f coupe l'axe y en $y = 3$.

5) Tableau de signes:

x		-3	
$f(x)$	$-$	0	$+$

6) Asymptotes verticales: Comme $D = \mathbb{R}$ n'a pas d'exclu, f n'a pas d'asymptote verticale.

Asymptotes non verticales: Les fonctions contenant la fonction exponentielle n'ont pas d'asymptote oblique. Donc f n'a pas d'asymptote oblique.

On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+3)e^{-x} = $ "$(+\infty) \cdot 0$" ; or l'exponentielle, dans le cas d'une telle indéterminée, gagne sur tout polynôme; ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+3)e^{-x} = 0$.

De plus: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+3)e^{-x} = $ "$(-\infty) \cdot (+\infty)$" $= -\infty$.

On en conclut que $y = 0$ est une asymptote horizontale de f à droite (à $+\infty$). En outre, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0+$ (ce qui signifie que f s'approche de 0 lorsque $x \to +\infty$ avec des valeurs positives.

7) Dérivée: $f(x) = (x+3)e^{-x} = u \cdot v$ avec $u = x+3$ et $v = e^{-x}$.
$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ avec $u' = 1$ et $v' = -e^{-x}$.
Donc $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+3)(-e^{-x}) = (1-x-3)e^{-x} = (-x-2)e^{-x} =$
$= -(x+2)e^{-x}$.

8) Points à tangente horizontale : $f'(x)=0 \Rightarrow -(x+2)e^{-x}=0 \Rightarrow x+2=0$ car $e^{-x}>0$ pour n'importe quelle valeur de $x \Rightarrow x=-2$.

On a $f(-2)=(-2+3)e^{-(-2)}=e^2$.

L'unique point à tangente horizontale de f est $(-2;e^2)$.

9) Tableau de croissance :

x		-2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Ainsi f est croissante sur $]-\infty;-2[$, atteint son maximum en $x=-2$ (et $f(-2)=e^2$) et est décroissante sur $]-2;+\infty[$.

10) Tangente au graphe en $x=0$: La tangente au graphe de f en $x=0$ est de la forme $y=mx+h$ avec $m=f'(0)$. Cette tangente passe en outre au point $(0;f(0))$.

On a : $m=f'(0)=-2e^{-0}=-2$.

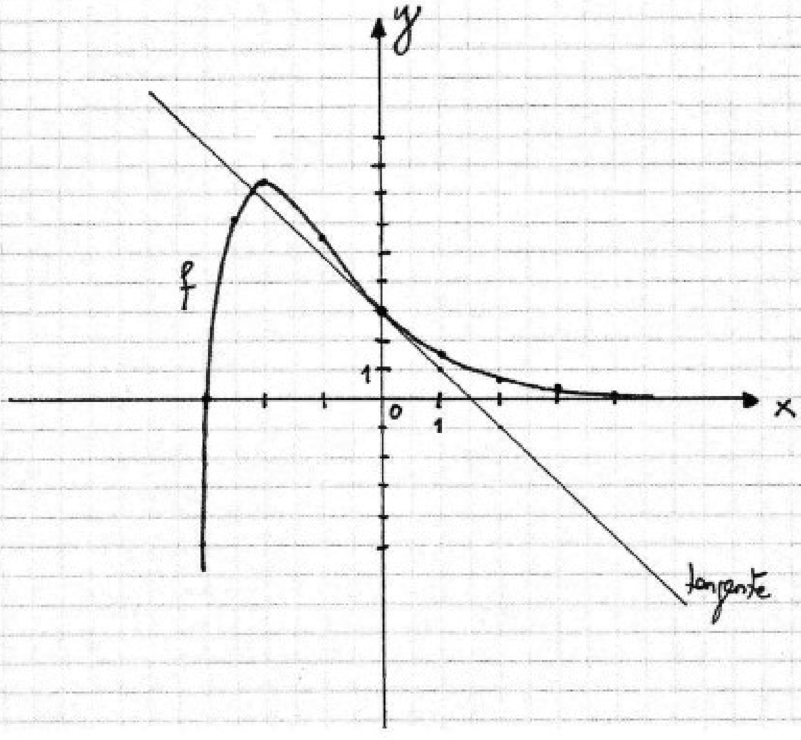
La tangente s'écrit donc $y=-2x+h$.

De plus $f(0)=3e^{-0}=3$. Avec le point de la tangente $(0;3)$, par substitution dans $y=-2x+h$, on obtient $3=-2\cdot 0+h \Rightarrow h=3$.

L'équation de la tangente au graphe de f en $x=0$ est

$$y=-2x+3.$$

11) Graphes :



Exercice 2

$$f(x) = \frac{e^x}{2x+1}$$

1) Domaine de définition: On doit avoir $2x+1 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$. Ainsi $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

2) Parité: $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{-2x+1} \neq \pm f(x)$. Donc f n'est ni paire ni impaire.

3) Périodicité: Seules les fonctions contenant des fonctions trigonométriques peuvent être périodiques.
Donc f n'est pas périodique.

4) Intersections avec l'axe x: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x}{2x+1} = 0 \Rightarrow e^x = 0$, ce qui n'est jamais vrai puisque $e^x > 0$ pour toute valeur de x. Donc f ne coupe pas l'axe x.

Intersection avec l'axe y: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{e^0}{2 \cdot 0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Donc f coupe l'axe y en $y = 1$.

5) Tableau de signes:

x		$-\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$-$	‖	$+$

6) Asymptotes verticales: On a $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ <}} \dfrac{e^x}{2x+1} = \text{“}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{0_-}\text{”} = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ >}} \dfrac{e^x}{2x+1} = \text{“}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{0_+}\text{”} = +\infty$.

Ainsi $x = -\frac{1}{2}$ est une asymptote verticale avec $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ <}} f(x) = -\infty$ et
$\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ >}} f(x) = +\infty$.

Asymptotes non verticales: Les fonctions contenant la fonction exponentielle n'ont pas d'asymptote oblique. Donc f n'a pas d'asymptote oblique.

On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2x+1} = \text{“}\dfrac{+\infty}{+\infty}\text{”}$; or l'exponentielle, dans le cas d'une telle indéterminée, gagne sur tout polynôme; ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De plus: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{2x+1} = \text{“}\dfrac{0_+}{-\infty}\text{”} = 0_-$.

Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale de f à gauche (à $-\infty$) avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0_-$.

7) Dérivée: $f(x) = \frac{e^x}{2x+1} = \frac{u}{v}$ avec $u = e^x$ et $v = 2x+1$.

$f'(x) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$ avec $u' = e^x$ et $v' = 2$.

Ainsi $f'(x) = \frac{e^x.(2x+1) - e^x.2}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1-2)e^x}{(2x+1)^2} = \frac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2}$.

8) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2} = 0 \Rightarrow (2x-1)e^x = 0$

$\Rightarrow 2x-1 = 0$ (car $e^x > 0$ pour tout x) $\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

On a $f(\frac{1}{2}) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2.\frac{1}{2}+1} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{1+1} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

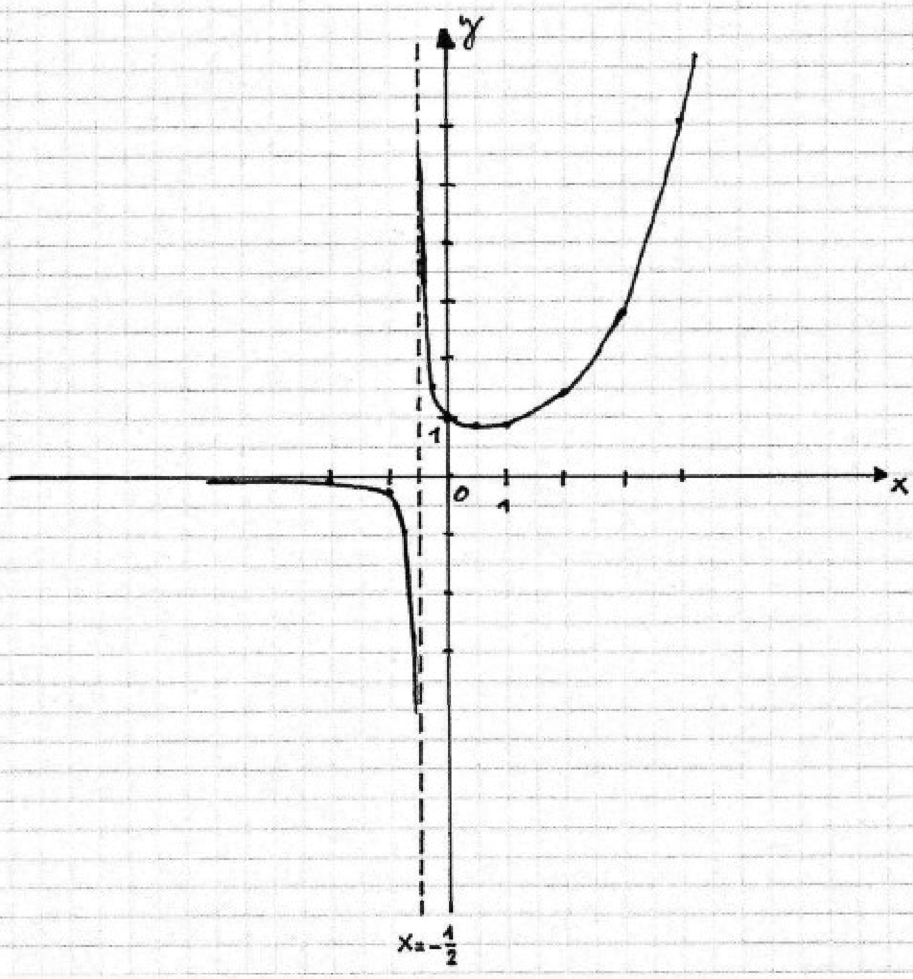
L'unique point à tangente horizontale de f est $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}})$.

9) Tableau de croissance:

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$-$	////	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	////	↘	min	↗

Ainsi f est décroissante sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$, atteint un minimum en $x = \frac{1}{2}$ (et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$) et est croissante sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

10) Graphe:



Exercice 3

$f(x) = (x^2 - 3x)e^{\frac{x}{2}}$

1) Domaine de définition: On peut calculer f pour n'importe quelle valeur de x. Donc $\underline{D = \mathbb{R}}$.

2) Parité: $f(-x) = ((-x)^2 - 3\cdot(-x))e^{-\frac{x}{2}} = (x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}} \neq \pm f(x)$.

Donc f n'est ni paire ni impaire.

3) Périodicité: Seules les fonctions contenant des fonctions trigonométriques peuvent être périodiques.

Donc f n'est pas périodique.

4) Intersections avec l'axe x: $f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 3x)e^{\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$ car $e^{\frac{x}{2}} > 0$ pour toute valeur de $x \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$.

Donc f coupe l'axe x en $x = 0$ et $x = 3$.

Intersection avec l'axe y: $x = 0 \Rightarrow f(x) = (0^2 - 3.0)e^{\frac{0}{2}} = 0.1 = 0$.

Donc f coupe l'axe y en $y = 0$.

5) Tableau de signes:

x		0		3	
$f(x)$	+	0	−	0	+

6) Asymptotes verticales: Comme $D = \mathbb{R}$, f n'a pas d'asymptote verticale.

Asymptotes non verticales: Les fonctions contenant la fonction exponentielle n'ont pas d'asymptote oblique. Donc f n'a pas d'asymptote oblique.

On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x)e^{\frac{x}{2}} = "+\infty \cdot +\infty" = +\infty$.

De plus: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 3x)e^{\frac{x}{2}} = "+\infty \cdot 0"$; or, l'exponentielle, dans le cas d'une telle indéterminée, gagne sur tout polynôme ; ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0_+$.

Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale de f à gauche (à $-\infty$) avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0_+$.

7) Dérivée: $f(x) = (x^2 - 3x)e^{\frac{x}{2}} = u \cdot v$ avec $u = x^2 - 3x$ et $v = e^{\frac{x}{2}}$.

$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ avec $u' = 2x - 3$ et $v' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

Ainsi $f'(x) = (2x-3)e^{\frac{x}{2}} + (x^2 - 3x)\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \left(2x - 3 + \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} =$

$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right)e^{\frac{x}{2}}$.

8) Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3\right)e^{\frac{x}{2}}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3=0$ (car $e^{\frac{x}{2}}>0$ pour tout x) $\Rightarrow x^2+x-6=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=1$, $b=1$ et $c=-6$; on a $\Delta=b^2-4ac=1^2-4.1.(-6)=1+24=25$ et $\sqrt{\Delta}=5$; les solutions sont :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+5}{2.1}=\frac{4}{2}=2$ et

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-5}{2.1}=\frac{-6}{2}=-3.$

Avec $x_1=2$, on a $f(x_1)=(2^2-3\cdot2)e^{\frac{2}{2}}=(4-6)e^1=-2e.$

Avec $x_2=-3$, on a $f(x_2)=((-3)^2-3\cdot(-3))e^{-\frac{3}{2}}=$

$=(9+9)e^{-\frac{3}{2}}=18e^{-\frac{3}{2}}.$

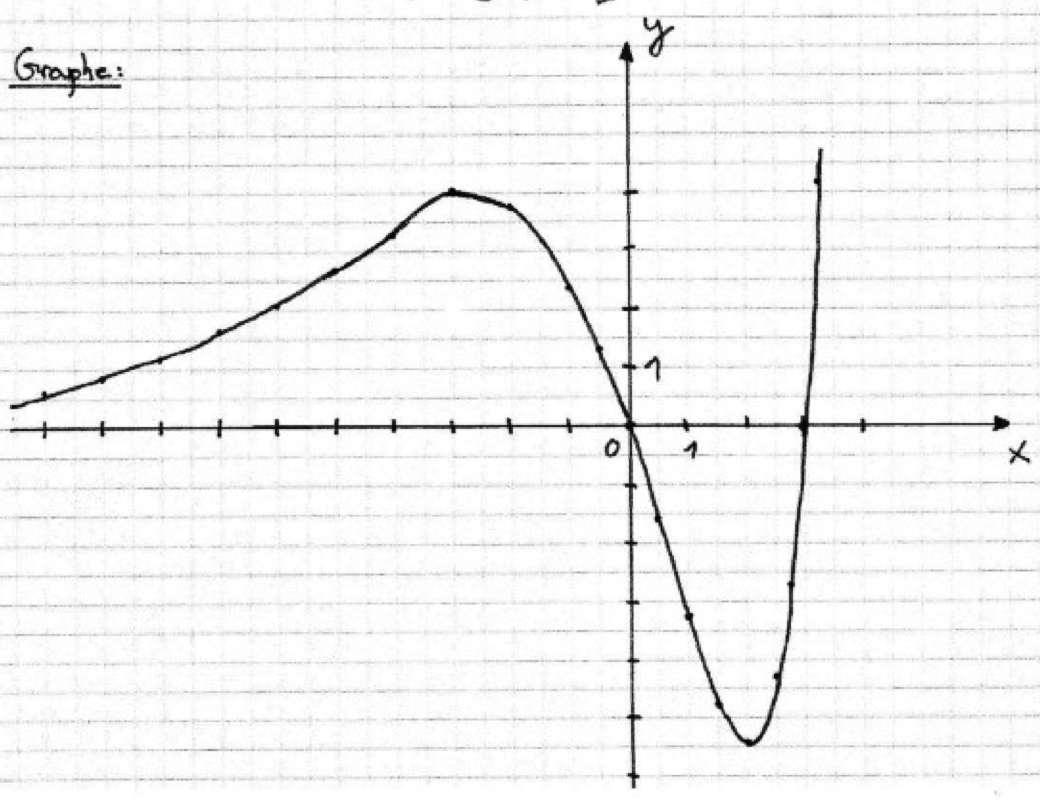
Les points à tangente horizontale du graphe de f sont donc $(2;-2e)$ et $(-3;18e^{-\frac{3}{2}})$.

9) Tableau de croissance:

x		-3		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Ainsi f est croissante sur $]-\infty;-3[$, atteint un maximum en $x=-3$ (et $f(-3)=18e^{-\frac{3}{2}}$), est décroissante sur $]-3;2[$, atteint un minimum en $x=2$ (et $f(2)=-2e$) et est croissante sur $]2;+\infty[$.

10) Graphe:



Exercice 4

$f(x) = -(x^2+4x+5)\cdot e^{-x}$.

1) Domaine de définition: On peut calculer f pour n'importe quelle valeur de x. Donc $D = \mathbb{R}$.

2) Parité: $f(-x) = -((-x)^2+4(-x)+5)\cdot e^{-(-x)} = -(x^2-4x+5)\cdot e^{x} \neq \pm f(x)$.

Donc f n'est ni paire ni impaire.

3) Périodicité: Seules les fonctions contenant des fonctions trigonométriques peuvent être périodiques.

Donc f n'est pas périodique.

4) Intersections avec l'axe x: $f(x)=0 \Rightarrow -(x^2+4x+5)\cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x^2+4x+5=0$ (car $-e^{-x}<0$ pour toute valeur de x), ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=1$, $b=4$ et $c=5$; on a $\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\cdot1\cdot5 =$ $= 16-20 = -4 < 0$; ainsi $x^2+4x+5=0$ n'a pas de solution.

Par conséquent f ne coupe pas l'axe x.

Intersection avec l'axe y: $x=0 \Rightarrow f(x) = -(0^2+4\cdot0+5)\cdot e^{-0} = -5e^0 = -5$.

Donc f coupe l'axe y en $y=-5$.

5) Asymptotes verticales: Comme $D=\mathbb{R}$, f n'a pas d'asymptote verticale.

Asymptotes non verticales: Les fonctions contenant la fonction exponentielle n'ont pas d'asymptote oblique. Donc f n'a pas d'asymptote oblique.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-(x^2+4x+5)\cdot e^{-x}\right) = "-\infty\cdot 0"$;

or, l'exponentielle, dans le cas d'une telle indéterminée, gagne sur tout polynôme ; ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0_-$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-(x^2+4x+5)\cdot e^{-x}\right) = "-\infty\cdot\infty" =$

$= -\infty$.

Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale de f à droite (à $+\infty$) avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0_-$.

6) Tableau des signes:

x	
$f(x)$	$-$

7) Dérivée: $f(x) = -(x^2+4x+5)\cdot e^{-x} = u\cdot v$ avec $u = -(x^2+4x+5)$ et $v = e^{-x}$.

$f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$ avec $u' = -(2x+4)$ et $v' = -e^{-x}$.

Ainsi $f'(x) = \left(-(2x+4)\right)e^{-x} + \left(-(x^2+4x+5)\right)(-e^{-x}) =$

$= (-2x-4)e^{-x} + (x^2+4x+5)e^{-x} = (-2x-4+x^2+4x+5)e^{-x} =$

$= \underline{\underline{(x^2+2x+1)e^{-x} = (x+1)^2 e^{-x}}}$.

8) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0$, car $e^{-x} > 0$ pour toute valeur de $x \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Avec $x = -1$, on a $f(x) = -\left((-1)^2 + 4\cdot(-1) + 5\right)e^{-(-1)} =$

$= -(1-4+5)e^{1} = -2e$.

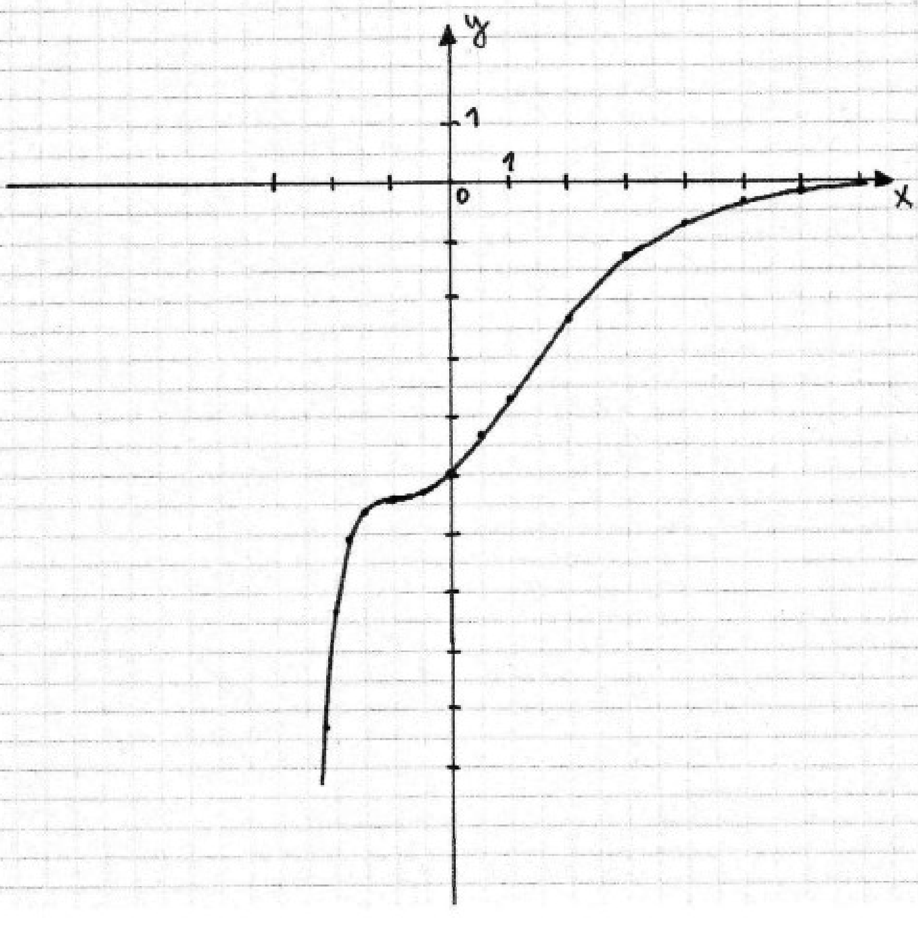
L'unique point à tangente horizontale de f est donc $\underline{\underline{(-1\,;\,-2e)}}$.

9) Tableau de croissance:

x		-1	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	point d'inflexion	$\nearrow$

Ainsi f est croissance sur $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;+\infty[$ et a une tangente horizontale en $x = -1$ (avec $f(-1) = -2e$).

10) Graphe:



Exercice 5

$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

1) Domaine de définition: On peut calculer f pour n'importe quelle valeur de x. Donc $D = \mathbb{R}$.

2) Parité: $f(-x) = e^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x)$. Donc f est paire (symétrique par rapport à l'axe y).

3) Périodicité: Seules les fonctions contenant des fonctions trigonométriques peuvent être périodiques.
Donc f n'est pas périodique.

4) Intersections avec l'axe x: $f(x) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$, ce qui est impossible puisque $e^y > 0$ pour toute valeur de y. Donc, f ne coupe pas l'axe x.

Intersection avec l'axe y: $x = 0 \Rightarrow f(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2} = e^0 = 1$.
Donc f coupe l'axe y en $y = 1$.

5) Tableau de signes:

x	
$f(x)$	$+$

6) Asymptotes verticales: Comme $D = \mathbb{R}$, f n'a pas d'asymptote verticale.

Asymptotes non verticales: Les fonctions contenant la fonction exponentielle n'ont pas d'asymptote oblique. Donc f n'a pas d'asymptote oblique.

On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = "e^{-\infty}" = 0_+$.

Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0_+$.

7) Dérivées: $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}2x e^{-\frac{1}{2}x^2} = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

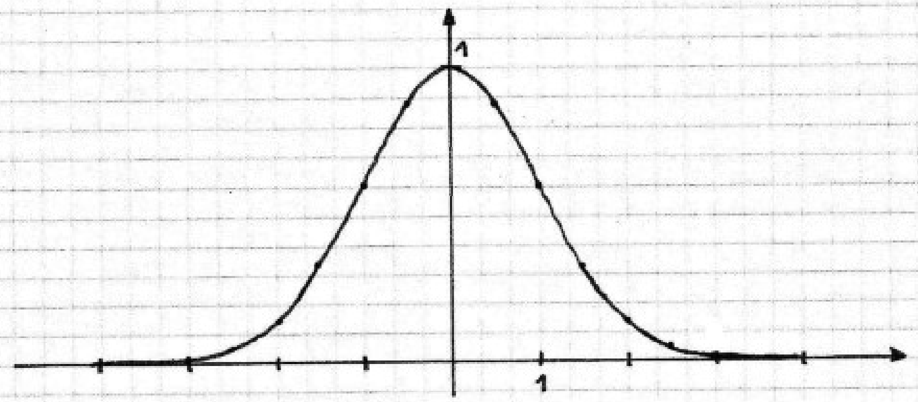
8) Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow -xe^{-\frac{1}{2}x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$, car $e^y > 0$ pour toute valeur de y.
Avec $x = 0$, on a $f(x) = 1$ (voir 4)).
L'unique point à tangente horizontale de f est donc $(0; 1)$.

9) Tableau de croissance:

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Ainsi f est croissante sur $]-\infty; 0[$, atteint son maximum en $x = 0$ (avec $f(0) = 1$) et est décroissante sur $]0; +\infty[$.

10) Graphe :



Exercice 6

a) $f(x) = \frac{\ln(|x|)}{x}$.

Domaine de définition: Pour que l'on puisse calculer $\ln(|x|)$ et diviser par x, il faut que $x \neq 0$.

Ainsi $D = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

Parité: $f(-x) = \frac{\ln(|-x|)}{-x} = \frac{\ln(|x|)}{-x} = -\frac{\ln(|x|)}{x} = -f(x)$.

Ainsi f est impaire (symétrique par rapport à l'origine).

Périodicité: Seules les fonctions contenant des fonctions trigonométriques peuvent être périodiques.

Donc f n'est pas périodique.

Intersections avec l'axe x: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln(|x|)}{x} = 0 \Rightarrow \ln(|x|) = 0$

$\Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = -1$ ou 1.

Donc f coupe l'axe x en $x=-1$ et $x=1$.

Intersection avec l'axe y: Comme $x = 0 \notin D$, on ne peut pas calculer f en $x=0$.

Donc f ne coupe pas l'axe y.

Tableau de signes:

x		-1		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	//	$-$	0	$+$

Asymptotes verticales: Etudions ce qu'il se passe pour f lorsque $x \to 0$:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(|x|)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(x)}{x} = "\frac{-\infty}{0_+}" = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\ln(|x|)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\ln(-x)}{x} = "\frac{-\infty}{0_-}" = +\infty$.

Ainsi $x=0$ est une asymptote verticale et on a

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.

Asymptotes non verticales: Les fonctions contenant des fonctions logarithmes n'ont pas d'asymptotes obliques. Ainsi f n'a pas d'asymptote oblique.

On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(|x|)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = "\frac{+\infty}{+\infty}"$;

or, dans ce genre d'indéterminée, le logarithme perd; ainsi

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0_+$.

De plus: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(|x|)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = "\frac{+\infty}{-\infty}"$

$= 0_-$, puisque $\ln$ perd.

Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0_+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0_-$.

Dérivée: On va calculer la dérivée pour les $x>0$, puis la dérivée pour les $x<0$.

$x>0$: $f(x)=\dfrac{\ln(|x|)}{x}=\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=\ln(x)$ et $v=x$;

$f'(x)=\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$ avec $u'=\dfrac{1}{x}$ et $v'=1$;

ainsi $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln(x).1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

$x<0$: $f(x)=\dfrac{\ln(|x|)}{x}=\dfrac{\ln(-x)}{x}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=\ln(-x)$ et $v=x$;

$f'(x)=\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$ avec $u'=-\dfrac{1}{-x}=\dfrac{1}{x}$ et $v'=1$;

ainsi $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln(-x).1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(-x)}{x^2}$.

On peut alors écrire de manière générale : $f'(x)=\dfrac{1-\ln(|x|)}{x^2}$.

Points à tangence horizontale: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1-\ln(|x|)}{x^2}=0 \Rightarrow 1-\ln(|x|)=0$

$\Rightarrow \ln(|x|)=1 \Rightarrow |x|=e^1=e$

$\Rightarrow x=-e$ ou $x=e$.

Avec $x=-e$, on a $f(-e)=\dfrac{\ln(|-e|)}{-e}=\dfrac{\ln(e)}{-e}=-\dfrac{1}{e}$.

Avec $x=e$, on a $f(e)=\dfrac{\ln(|e|)}{e}=\dfrac{\ln(e)}{e}=\dfrac{1}{e}$.

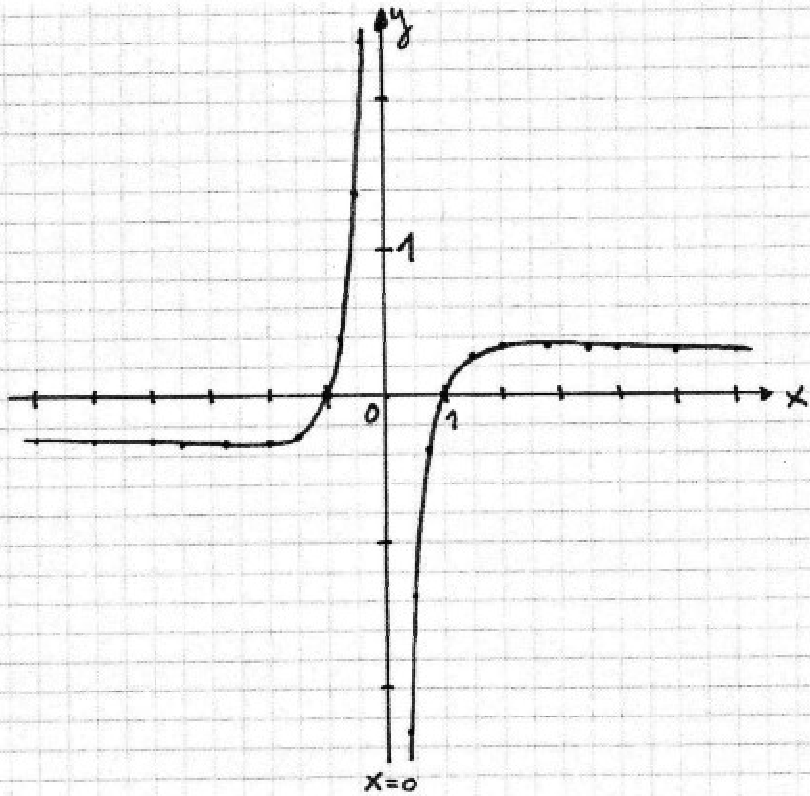
Ainsi f a 2 points à tangente horizontale: $\left(-e;-\frac{1}{e}\right)$ et $\left(e;\frac{1}{e}\right)$.

Tableau de croissance:

x		$-e$		0		e	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	////	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	////	↗	max	↘

Ainsi f est décroissante sur $]-\infty;-e[$, atteint un minimum en $x=-e$ (avec $f(-e)=-\frac{1}{e}$), est croissante sur $]-e;0[\,\cup\,]0;e[$, atteint un maximum en $x=e$ (avec $f(e)=\frac{1}{e}$) et est décroissante sur $]e;+\infty[$

Graphe:



b) Equation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x=-1$:

L'équation de cette tangente est de la forme $y=mx+h$, où $m=f'(-1)$. En outre, elle passe par le point $(-1; f(-1))$.

D'après a), on a $f'(x) = \frac{1-\ln(|x|)}{x^2}$.

Ainsi $f'(-1) = \frac{1-\ln(|-1|)}{(-1)^2} = \frac{1-\ln(1)}{1} = \frac{1-0}{1} = 1$. Donc $m=1$.

De plus, $f(-1) = \frac{\ln(|-1|)}{-1} = \frac{\ln(1)}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$.

La tangente s'écrit donc $y = x+h$ et elle passe par $(-1;0)$.

Par substitution, on a $0 = -1+h \Rightarrow h=1$.

L'équation de la tangente est donc $\underline{\underline{y=x+1}}$.

Angle aigu entre la tangente et l'axe des abscisses:

La pente de la tangente vaut 1.

Cela signifie que l'angle aigu entre la tangente et l'axe des abscisses est $\underline{\underline{45°}}$.

Exercice 7

a) $f(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Domaine de définition: On peut calculer f pour toute valeur de x. Donc $\underline{\underline{D = \mathbb{R}}}$

Parité: On a $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$.

Donc f est impaire, i.e. symétrique par rapport à l'origine.

Périodicité: Seules les fonctions contenant des fonctions trigonométriques peuvent être périodiques.

Donc f n'est pas périodique.

Intersections avec l'axe x: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0$

$\Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow \ln(e^x) = \ln(e^{-x}) \Rightarrow x = -x$

$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Donc f coupe l'axe x en $x = 0$.

Intersection avec l'axe y: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$.

Donc f coupe l'axe y en $y = 0$.

Tableau de signes:

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

Asymptotes verticales: Comme $D = \mathbb{R}$, f n'a pas d'asymptote verticale.

Asymptotes non verticales: Les fonctions contenant la fonction exponentielle n'ont pas d'asymptote oblique.

Donc f n'a pas d'asymptote oblique.

On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{\text{"}+\infty - 0\text{"}}{2} = +\infty$ et

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{\text{"}0 - \infty\text{"}}{2} = -\infty$.

Donc f n'a pas d'asymptote horizontale.

Dérivée: $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(= \cosh(x))$.

Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 0$, ce qui est exclu

puisque $e^y > 0$ pour toute valeur de y.

Donc f n'a pas de point à tangente horizontale.

Tableau de croissance:

x	
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Graphe:</u> Voir énoncé, dessin de droite.

b) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

<u>Domaine de définition:</u> On peut calculer f pour toute valeur de x. Donc $\underline{D = \mathbb{R}}$.

<u>Parité:</u> On a $f(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$.

Donc <u>f est paire</u>, i.e. symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

<u>Périodicité:</u> Seules les fonctions contenant des fonctions trigonométriques peuvent être périodiques.

Donc <u>f n'est pas périodique</u>.

<u>Intersection avec l'axe x:</u> $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 0$, ce qui est exclu puisque $e^y > 0$ pour toute valeur de y.

Donc <u>f ne coupe pas l'axe x</u>.

<u>Intersection avec l'axe y:</u> $x = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{e^0 + e^{-0}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$.

Donc <u>f coupe l'axe y en $y = 1$</u>.

<u>Tableau de signes:</u>

x	
$f(x)$	$+$

<u>Asymptotes verticales:</u> Comme $D = \mathbb{R}$, <u>f n'a pas d'asymptote verticale</u>.

<u>Asymptotes non verticales:</u> Les fonctions contenant la fonction exponentielle n'ont pas d'asymptote oblique.

Donc <u>f n'a pas d'asymptote oblique</u>.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{"}\dfrac{+\infty + 0}{2}\text{"} = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{"}\dfrac{0 + \infty}{2}\text{"} = +\infty$.

Donc <u>f n'a pas d'asymptote horizontale</u>.

<u>Dérivées:</u> $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \underline{f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$ $(= \sinh(x))$.

<u>Points à tangente horizontale:</u> $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x}$

$\Rightarrow \ln(e^x) = \ln(e^{-x}) \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Avec $x = 0$, on a $f(x) = 1$ (voir ci-dessus).

Donc <u>l'unique point à tangence horizontale de f est $(0;1)$</u>.

<u>Tableau de croissance:</u>

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Donc f est décroissante sur $]-\infty; 0[$, atteint son minimum en $x = 0$ (avec $f(0) = 1$) et est croissante sur $]0; +\infty[$.

Graphe: Voir énoncé, dessin de gauche.

c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{(e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2e^0+e^{-2x}}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Ainsi $\underline{\underline{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \text{ pour toute valeur de } x.}}$