Exercice 7.1

L'extraction de la racine carrée d'un nombre négatif étant impossible, parmi les expressions suivantes, certaines ne sont pas définies dans l'ensemble des nombres réels.

$\sqrt{1600} =$ $\qquad \sqrt{-9} =$ $\qquad \sqrt{-4} =$ $\qquad \sqrt{36} =$ $\qquad \sqrt{0} =$

L'utilisation du symbole i satisfaisant $i^2 = -1$ permet d'écrire plus simplement ces expressions. De la même manière, certaines équations ne possèdent pas de solutions dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

$3x^2 - 12 = 0$ $\qquad x^2 + 100 = 0$ $\qquad 7x^2 + 100 = 37$

L'utilisation des nombres complexes permet de contourner cette impossibilité. Grâce aux identités remarquables, notamment $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, il est possible de factoriser certaines expressions.

$x^2 - 36 =$ $\qquad 4x^6 - 81 =$ $\qquad x^2 + 1 =$ $\qquad 25x^2 + 1,21 =$

La formule de *Viète* permet de déterminer les zéros d'un polynôme du 2^{ème} degré et de l'écrire sous forme factorisée.

$x^2 + 5x + 6 =$ $\qquad x^2 - x - 2 =$ $\qquad 14x^2 - 17x - 6 =$

De même, factoriser les équations suivantes :

$x^2 - 4x + 9 =$ $\qquad 3x^2 + x + 1 =$ $\qquad -x^2 + 17x + 29 =$

Exercice 7.2

Ecrire le plus simplement possible :

a. i^3

b. i^4

c. i^5

d. i^{17}

e. $-4i^5 + 3i^3 + i^2$

f. $(-7 + 3i)^2$

g. $(1 + i)(1 - i)(2 + 2i)$

h. $(3 + i)(3 - i)^3$

Exercice 7.3.

Etant donné $z = x + yi$, calculer

a. $z + \overline{z}$

b. $z \cdot \overline{z}$

c. $\frac{1}{z}$

puis déterminer z de sorte que

d. $z + \overline{z} = 1$

e. $z \cdot \overline{z} = 1$

Exercice 7.4

Calculer

a. $\dfrac{3 - 2i}{-1 + i}$

b. $\dfrac{5 + 5i}{3 - 4i} + \dfrac{20}{4 + 3i}$

c. $\dfrac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$

d. $3\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)^2$

e. $(2i-1)^2\left(\frac{4}{1-i}+\frac{2-i}{1+i}\right)$

f. $\frac{i^4+9}{i^7}$

Exercice 7.5

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants puis les représenter dans le plan de Gauss.

a. $z_1 = -3+4i$

b. $z_2 = 1+i$

c. $z_3 = z_1 + z_2$

d. $z_4 = z_1 \cdot z_2$

e. $z_5 = \frac{z_1}{z_2}$

f. $z_6 = \sqrt{3} - i$

g. $z_7 = z_6^2$

h. $z_8 = z_6^3$

i. z_9 =une racine carrée de z_6

Exercice 7.6

Résoudre les équations suivantes :

a. $(3-i)z + 4 = i + 1$

b. $\frac{z-1}{z+i} = -2+3i$

c. $(z-1)(i-2) = z$

d. $\frac{iz+2}{2z+3} = 1-i$

e. $(3+5i)z = -2+4i$

f. $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{-3+4i}{5}$

g. $(1+i)z + (3-i)\bar{z} + 4 - 2i = 0$

h. $\frac{1}{2}z^2 + (5+3i)z + 10 + 15i = 0$

i. $8\bar{z} = z^5$.

Exercice 7.7

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} z_1 + (2-i)z_2 = -2+i \\ (1+i)z_1 + z_2 = 1+3i \end{array}\right.$

Exercice 7.8

Trouver les deux racines carrées des nombres

a. -36

b. $-2i$

c. $5-12i$

d. $-15+8i$

Exercice 7.9

Dans le plan complexe, placer les nombres $z_1 = 1+i$, $z_2 = (1+i)^2$ et $z_3 = (1+i)^3$. Déterminer ensuite le module et l'argument de chacun d'eux.

Exercice 7.10

Soient les nombres complexes $z_1 = r_1\mathrm{cis}(\varphi_1)$ et $z_2 = r_2\mathrm{cis}(\varphi_2)$. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres

a. $z_1 \cdot z_2$

b. $\frac{1}{z_1}$

c. $\frac{z_1}{z_2}$

d. z_1^n

e. $\sqrt[n]{z_1}$

Exercice 7.11

Décrire les figures géométriques du plan complexe déterminées par

a. $|z| = 3$

b. $z - \bar{z} = 10i$

c. $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1$

d. $z \cdot \bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 32$

e. $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2$

f. $(z+\bar{z})^2 + 2i(z-\bar{z}) + 4 = 0$

Exercice 7.12

Prouver que

a. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

b. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

c. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Exercice 7.13

a. Soit l'équation $2z^2 + mz + n = 0$ avec $m, n \in \mathbb{R}$. Déterminer m et n sachant que $-5 - 12i$ est solution de cette équation.

b. Pour les valeurs de m et n obtenues ci-dessus, déterminer les solutions (sous la forme algébrique) de l'équation $2z^5 + mz^3 + nz = 0$.

Exercice 7.14

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

a. $\dfrac{(5(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ))^7}{(4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ))^3}$

b. $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

Exercice 7.15

On donne un nombre naturel n et un nombre complexe w. Calculer et représenter dans le plan de Gauss les racines $n^{\text{èmes}}$ de w.

a. $n = 3$ et $w = -2 + 2i$

b. $n = 2$ et $w = 5 - 12i$

c. $n = 4$ et $w = -2 - 2\sqrt{3}i$

d. $n = 4$ et $w = -32$

Exercice 7.16

Calculer de deux manières le nombre complexe $(\cos\varphi + i \sin\varphi)^4$ et en déduire les formules trigonométriques pour $\cos(4\varphi)$ et pour $\sin(4\varphi)$.

Exercice 7.17

Décrire les transformations géométriques associées aux fonctions complexes suivantes

a. $f(z) = \bar{z}$

b. $f(z) = -z$

c. $f(z) = 4z$

d. $f(z) = \mathrm{Im}(z)$

e. $f(z) = z + w$, avec $w = 3 + 2i$

Quelle fonction complexe est associée à une symétrie d'axe imaginaire ?

Exercice 7.18

Soit la fonction $f(z) = (1+i)z$

a. Calculer les images par la fonction f des nombres $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$ et $z_3 = 5-3i$, qu'on nommera respectivement w_1, w_2 et w_3.

b. Construire les triangles $z_1 z_2 z_3$ et $w_1 w_2 w_3$.

c. Décrire la transformation f.

Exercice 7.19

Mêmes questions que l'exercice précédent, pour la fonction $f(z) = i(z+2i) - 2i$.

Exercice 7.20

La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est appelée **inversion**.

a. Déterminer son domaine et ses points invariants.

b. Déterminer l'image de $2+i$ et de $-9-5i$, par calcul.

c. Construire l'image des nombres précédents. Déterminer par construction l'image de z.

d. Déterminer l'image de la droite linéaire $y = k \cdot x$. La dessiner.

e. Déterminer l'image de la droite verticale $x = k$. La dessiner.

f. Déterminer et dessiner l'image d'un cercle centré en l'origine, de rayon r. Discuter les cas.

g. Soit le carré de sommets 1, 2, $2+i$ et $1+i$. Dessiner le carré et son image.

h. Dessiner la droite $x+y+1=0$ ainsi que son image.

Exercice 7.21

Soit $f : z \mapsto w = f(z) = (3+4i)z + 3 - 2i$

a. Montrer que f admet un point invariant z_0 et que $f(z) = (3+4i)(z-z_0) + z_0$.

b. Justifier la proposition suivante : "f est la composition d'une rotation et d'une homothétie de centre z_0".

c. Y a-t-il une autre description géométrique de f?

Exercice 7.22

Soit $f : z \mapsto w = f(z) = z^2$

a. Posons $z = x+iy$ et $w = u+iv$. Exprimer u et v en fonction de x et y.

b. Trouver les points invariants de f dans le plan de Gauss

c. Soit le carré de sommets $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1+i$ et $z_3 = i$. Calculer $f(z_0), f(z_1), f(z_2)$ et $f(z_3)$.

d. Déterminer les images des quatre côtés du carré et dessiner ces images dans le plan de Gauss.

e. Déterminer et dessiner les images des diagonales du carré.

Exercice 7.23

Déterminer la fonction f associée à la rotation de centre $2-3i$ et d'angle 60°. Calculer ensuite $f(i)$. Envisager un contrôle graphique.

Exercice 7.24

Soit p un polynôme à coefficients réels : $p(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$

a. Pour tout nombre complexe z, montrer que $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$

b. En déduire que si $p(z) = 0$ alors $p(\bar{z}) = 0$. (Si z est zéro de $p(z)$ alors $\bar{z}$ aussi !)

c. Soit $p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 2$. Vérifier que $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ est un zéro de $p(z)$

d. Trouver tous les zéros de $p(z)$

Exercice 7.25

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42 = 0$ en montrant d'abord qu'elle admet une solution réelle. Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 7.26

Pour quelle valeur de k les solutions de l'équation $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0$ sont-elles alignées dans le plan complexe ? Déterminer k ainsi que ces solutions.

Exercice 7.27

Déterminer la fonction f associée à la symétrie de centre $5 - 3i$ dans le plan de Gauss.

Exercice 7.28

Considérons les homothéties f de centre $1 + i$ et de rapport 3, et g de centre $4 + 3i$ et de rapport $\frac{1}{2}$. Prouver, à l'aide de calculs, que $g \circ f$ est aussi une homothétie. En déterminer le centre et le rapport.

Exercice 7.29

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{z - 2i}{z - 1} \end{array}$$

a. Calculer et représenter dans le plan de Gauss l'image de $-2i$, $-i$, 0, i, et $2i$.

b. Vérifier par dessin et par calcul que ces cinq images sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Vérifier qu'en posant $z = x + iy$ on obtient

$$f(x + iy) = \frac{x^2 + y^2 - x - 2y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{-2x - y + 2}{(x-1)^2 + y^2} i$$

d. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer la figure géométrique que forment les points de l'ensemble E. $E_1 = \{z \,|\, f(z) \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{z \,|\, \arg(f(z)) = \frac{\pi}{4}\}$

e. Pour w un nombre complexe fixé, déterminer les nombres complexes z tels que $f(z) = w$. L'application est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 7.30

Les nombres complexes $w = 3 + 2i + 5\text{cis}(\beta)$, avec $\beta \in [0; 2\pi]$ décrivent une courbe dans le plan de Gauss.

a. De quelle courbe s'agit-il ?
b. Décrire cette courbe par ses équations paramétriques
c. Déterminer son image par une homothétie de centre i et de facteur 2
d. Déterminer son image par une rotation de centre $1 - i$ et d'angle $90°$
e. Déterminer son image par une symétrie d'axe passant par les points O et $\text{cis}(45°)$
f. Dessiner la courbe et ses différentes images.

Exercice 7.31

Les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1$ sont les premiers termes d'une progression géométrique.

a. Déterminer les trois termes suivants z_3, z_4 et z_5.
b. Représenter ces points dans le plan complexe.
c. Déterminer la longueur de la ligne polygonale passant par $z_1 z_2 z_3 ... z_n$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7.32

Déterminer les solutions de l'équation $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Les dessiner dans le plan complexe.

Exercice 7.33

a. Trouver le module et l'argument de $z_0 = 3 + 4i$.
b. Soit f la transformation suivante :

$$z \mapsto z - 2 + i \mapsto (3 + 4i)(z - 2 + i) \mapsto \omega = (3 + 4i)(z - 2 + i) + 2 - i$$

   Donner une interprétation géométrique de f.
c. Rechercher de deux manières différentes l'expression de f^{-1}

Exercice 7.34

Considérons la fonction complexe $f(z) = az$, de paramètre $a \in \mathbb{C}$.

a. Déterminer a de sorte que
$$f\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i$$

Dans le plan de Gauss, on considère la similitude $g : z \mapsto az$, avec $a = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

b. Calculer le rapport d'homothétie et l'angle de rotation de la similitude g.

On pose $z_0 = 6, z_1 = g(z_0), z_2 = g(z_1), \ldots, z_n = g(z_{n-1}), \ldots$

c. Calculer z_1, z_2, z_9. Exprimer z_n.
d. Montrer que le triangle de sommets Oz_1z_2 est rectangle.
e. Expliquer pourquoi tout triangle $Oz_{k-1}z_k$ est rectangle en z_k.
f. En tirant profit de l'observation précédente et en choisissant 1 cm comme unité, construire la ligne polygonale de sommets $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_9$
g. Calculer la longueur du segment d'extrémités z_0 et z_1.
h. Si on poursuivait indéfiniment la construction de la ligne polygonale de sommets $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots$, quelle serait la longueur L de la spirale obtenue ?

Exercice 7.35

On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{2\} \\ z & \longmapsto & \omega = 2 + \dfrac{3-4i}{z-2} \end{array}$$

a. Montrer que f^{-1} , l'application réciproque de f, est égale à f.

b. Calculer les points fixes de f.

c. En posant $z = x + yi$ et $\omega = u + vi$, calculer les expressions de u et v en fonction de x et y.

d. Dans le plan de Gauss, où sont les nombres complexes z dont l'image ω a une partie imaginaire égale à 1 ?

Exercice 3.36

a. Montrer que les deux équations ci-dessous ont une solution commune.

$$z^3 + (-2-5i)z^2 + (-11+18i)z + (28-29i) = 0$$

$$z^2 + (1-3i)z + (-14-5i) = 0$$

Dans le plan de Gauss, on envisage l'application

$$f: \quad z \quad \longmapsto \quad f(z) = -i\bar{z}+4+4i$$

b. Trouver les points invariants de f

c. Trouver l'image d_1 de la droite $d : y = 6x - 3$ et calculer l'intersection entre les droites.

d. Dessiner d et d_1 et les points invariants de f. Interpréter géométriquement .

Dans le plan de Gauss, on envisage encore l'application

$$g: \quad z \quad \longmapsto \quad g(z) = f(z^2)$$

e. Montrer que l'image de la droite $x = 1$ est une parabole que l'on dessinera (unité deux carreaux)

f. Trouver l'ensemble des points qui ont une image réelle ; représenter cet ensemble dans le plan de Gauss.

Exercice 7.37

Une tarte est proposée aux convives d'un repas. A tour de rôle, chacun se sert en prenant la moitié du reste, par gourmandise (pour le premier surtout !) et par politesse (pour les suivants, qui ainsi en laissent toujours aux autres.)

a. Quelle part du gâteau prennent les invités no. 1,2,3,4,. . .,n ?

b. Quelle part du gâteau est prise en tout après que l'invité no. 1,2,3,4,..,n se soit servi ?

c. Après combien d'invités plus de 90% du gâteau est-il pris ?

d. Après combien d'invités plus de 99,9% du gâteau est-il pris ?

e. Quelques calculs !

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \cdots \qquad\qquad 1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{2^6} + \cdots$$
$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{27} + \cdots \qquad\qquad \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2^3} + \tfrac{3}{2^5} + \tfrac{3}{2^7} + \cdots$$

RECURRENCE

Exercice supplémentaire

Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$