Chapitre 2

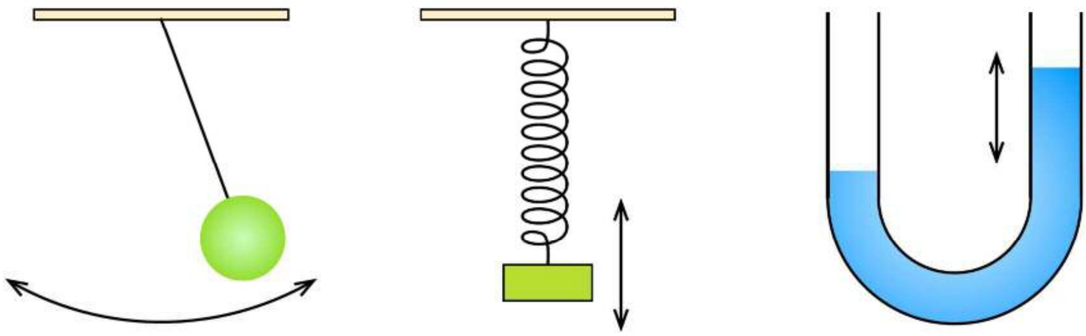
Oscillateurs

2.1 Systèmes oscillants

2.1.1 Exemples d'oscillateurs

Les *systèmes oscillants* sont d'une variété impressionnante et rares sont les domaines de la physique dans lesquels ils ne jouent pas un rôle important. En voici quelques exemples : la corde vocale, le cœur humain, la balançoire, le circuit électrique oscillant, les électrons dans les atomes, les cordes en physique des particules ...

Nous allons étudier les *oscillations* de quelques systèmes oscillants simples, mécaniques et électriques. La figure 2.1 montre quelques *oscillateurs* mécaniques.



Pendule pesant | Pendule élastique | Liquide dans un tube en U

FIGURE 2.1 – Oscillateurs mécaniques

2.1.2 Mise en évidence expérimentale

Expérience 2.1 Sur un banc à coussin d'air, un chariot est accroché à deux ressorts identiques (figure 2.2). Les autres extrémités des ressorts sont fixes et distantes d'une longueur suffisante pour que les ressorts soient toujours tendus.

Un potentiomètre à eau traduit la position du chariot en une tension qui est ensuite visualisée à l'aide d'un oscilloscope. La tension est mesurée entre le pôle négatif du générateur et la pointe de contact fixée au chariot.

La variation de la tension est proportionnelle à la position du chariot mesurée par rapport à sa position d'équilibre. Nous pouvons ainsi observer à l'oscilloscope une représentation à l'échelle de la position du chariot en fonction du temps.

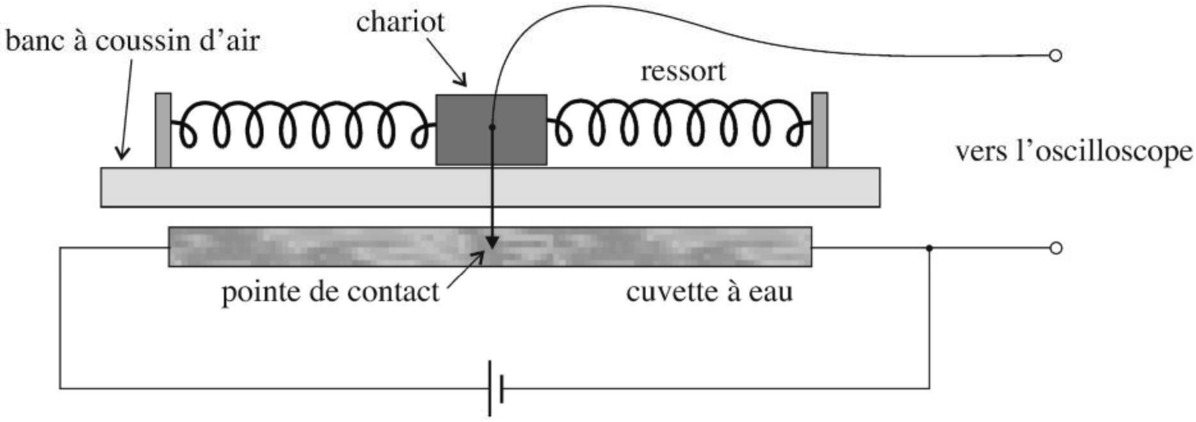
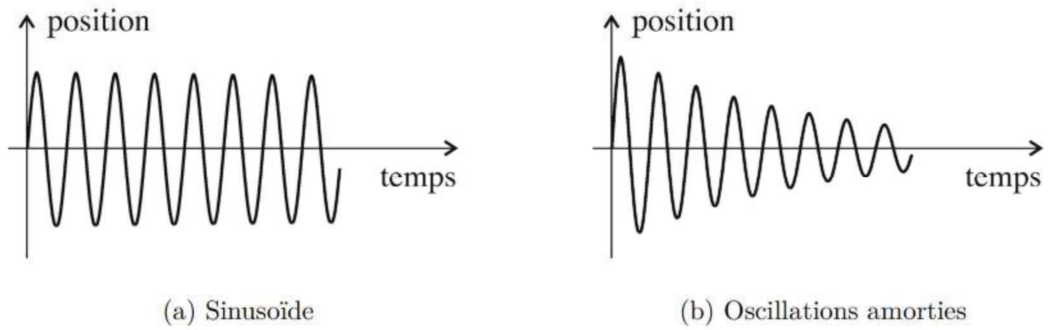


FIGURE 2.2 – Schéma du dispositif expérimental

Observations :

Si les amortissements sont négligeables, on obtient une *sinusoïde* (figure 2.3a). En diminuant la puissance de la soufflerie, l'épaisseur du coussin d'air est réduit ce qui fait augmenter la force de frottement ; on obtient des *oscillations amorties* (figure 2.3b).



(a) Sinusoïde

(b) Oscillations amorties

FIGURE 2.3 – Variations de la position au cours du temps

2.1.3 Définitions d'oscillateurs

Dans l'expérience précédente, le chariot effectue des déplacements périodiques (pseudo-périodiques dans le cas des oscillations amorties) de part et d'autre de sa position d'équilibre.

Définition *Un oscillateur est un système physique manifestant la variation d'une grandeur physique de part et d'autre d'un état d'équilibre. Si les variation se reproduisent identiques à elles-mêmes, l'oscillateur est dit périodique.*

Un oscillateur mécanique effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre. En électricité, un circuit dans lequel circule un courant alternatif est un oscillateur électrique.

Un oscillateur est *harmonique* si la variation de la grandeur physique est une fonction sinusoïdale du temps.

Exemples : pendule élastique, pendule pesant, ...

Un oscillateur *libre* effectue des oscillations correspondant à ses propres caractéristiques. Un oscillateur est *forcé* s'il est soumis à un autre système oscillant qui essaie de lui imposer ses oscillations.

Exemple : un ressort vertical effectue des oscillations libres quand il est tenu par une main immobile ; quand la main effectue un mouvement oscillant vertical on obtient des oscillations forcées.

Un oscillateur *amorti* effectue des oscillations dont l'amplitude diminue avec le temps. Pratiquement tous les oscillateurs observés sont plus ou moins amortis à cause des frottements. Un oscillateur est *entretenu* si l'amplitude reste constante grâce à un apport extérieur d'énergie.

Exemple : le pendule d'une montre.

2.1.4 Grandeurs caractéristiques des oscillateurs

Période et fréquence

Certaines grandeurs sont communes à tous les phénomènes périodiques, comme la période et la fréquence. Ces grandeurs ont été introduites dans l'étude du mouvement circulaire uniforme, qui est un exemple de mouvement périodique.

Dans le cas des oscillations, la *période* T est la durée d'une oscillation. C'est la plus courte durée après laquelle le phénomène oscillatoire se reproduit identique à lui-même. L'unité de la période est la seconde (s).

La *fréquence* f est le nombre de fois que le phénomène oscillatoire se reproduit par seconde. L'unité de la fréquence est le hertz (Hz).

La période et la fréquence sont reliées par : $f = \dfrac{1}{T}$.

Équation horaire

Considérons les oscillations d'un oscillateur harmonique. La variation d'une grandeur x du système est sinusoïdale. Cette grandeur est par exemple :

- la mesure algébrique de l'écart par rapport à la position d'équilibre, appelée *élongation*, du chariot sur le banc à coussin d'air de l'expérience précédente ;
- l'intensité du courant électrique dans le cas d'un oscillateur électrique.

La forme la plus générale de l'équation horaire d'un oscillateur harmonique est :

$$\boxed{x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)} \tag{2.1}$$

où les constantes x_m, ω et φ sont les paramètres de l'oscillation qui dépendent du système considéré. Les constantes x_m et ω sont choisies positives. L'argument du sinus, $\omega t + \varphi$, est la *phase* de l'oscillation à l'instant t.

Remarque : on peut également remplacer le sinus par un cosinus !

La grandeur x prend des valeurs entre $-x_m$ et $+x_m$; la constante x_m est la valeur maximale de x, appelée *amplitude*. L'unité de l'amplitude est égale à celle de x.

La valeur de x à l'instant $t = 0$ est donnée par :

$$x(t = 0) = x_m \sin(\varphi).$$

La constante φ, appelée *phase initiale*, tient compte de la valeur initiale de la grandeur x et du sens initial de sa variation.

Il reste à déterminer la constante ω. Elle s'exprime en fonction de la période T de sorte que la condition de périodicité pour la grandeur x soit vérifiée. Lorsque le temps t augmente d'une période T :

$$x(t + T) = x_m \sin(\omega t + \varphi + \omega T)$$

l'argument du sinus augmente de 2π de sorte que :

$$x_m \sin(\omega t + \varphi + \omega T) = x_m \sin(\omega t + \varphi + 2\pi) = x(t).$$

Pour que cette condition soit vérifiée à tout instant, ω doit vérifier la relation :

$$\omega T = 2\pi \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

La constante ω et est appelée *pulsation* :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f} \tag{2.2}$$

L'unité de la pulsation est le hertz (Hz).

Remarque : tandis que l'amplitude et la phase initiale sont déterminées par les conditions initiales, la pulsation dépend uniquement des caractéristiques de l'oscillateur.

2.2 Oscillateurs mécaniques

Comme exemple type d'un oscillateur mécanique, nous allons étudier en détail les oscillations d'un pendule élastique horizontal (figure 2.4).

Ce système oscillant simple est composé d'un solide de masse m accroché à un ressort à spires non jointives de raideur k. Le solide peut se déplacer sans frottements sur un support horizontal.

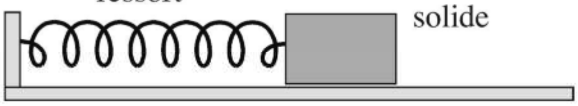


FIGURE 2.4 – Pendule élastique horizontal

2.2.1 Rappels sur le ressort

La figure 2.5 montre un ressort de raideur k sur lequel un opérateur exerce une force $\vec{F}$ à l'extrémité M du ressort.

La position du point M est repérée par l'abscisse x. La position $x = 0$ correspond à un ressort non tendu. La variation de la longueur du ressort est alors égale à x ; l'allongement correspond à des valeurs positives de x, la compression à des valeurs négatives.

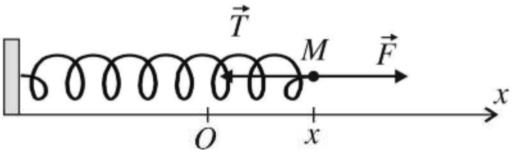


FIGURE 2.5 – Ressort soumis à une force $\vec{F}$

Au point M le ressort exerce la tension $\vec{T}$, avec $\vec{T} = -\vec{F}$. La force $\vec{F}$ vérifie donc la *loi de Hooke* ; sa seule composante est :

$$F_x = k\,x.$$

Cette composante est positive dans le cas d'un allongement et négative dans le cas d'une compression.

L'*énergie potentielle élastique* E_p d'un ressort tendu est égale au travail W effectué par la force $\vec{F}$ pour allonger (ou comprimer) le ressort d'une longueur x. Comme la force varie au cours du déplacement du point d'application M, il faut diviser le déplacement en déplacements élémentaires $\mathrm{d}x$ et calculer le travail élémentaire :

$$\delta W = F_x\,\mathrm{d}x = k\,x\,\mathrm{d}x.$$

Ce travail élémentaire est égal à la variation de l'énergie potentielle élastique :

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = k\,x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = k\,x.$$

L'énergie élastique est donc une primitive par rapport à x de $k\,x$. Nous avons :

$$E_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}\,k\,x^2 + \text{constante}.$$

La constante d'intégration est choisie de sorte que l'énergie élastique d'un ressort non tendu, c'est-à-dire quand $x = 0$, soit nulle. Un ressort de raideur k étiré ou comprimé de x possède donc l'énergie :

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}\,k\,x^2} \qquad (2.3)$$

2.2.2 Équation différentielle du mouvement

Nous allons maintenant établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'oscillateur élastique horizontal. Nous allons d'abord nous servir de la relation fondamentale de la dynamique et puis aboutir au même résultat par des considérations énergétiques.

Pour simplifier la première approche, nous allons négliger toute force de frottement.

Relation fondamentale de la dynamique

La position du solide de masse m est repérée par l'abscisse x de son centre d'inertie. On écarte le solide de sa position d'équilibre O et on le lâche ; il effectue ensuite des oscillations autour de O. Les forces qui s'appliquent au solide sont son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ du support horizontal et la tension $\vec{T}$ du ressort de raideur k (figure 2.6).

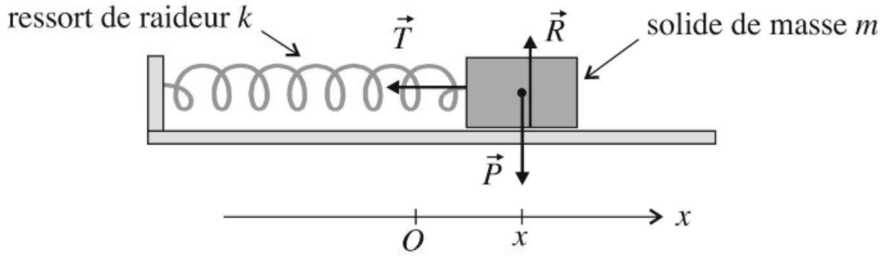


FIGURE 2.6 – Bilan des forces du pendule élastique horizontal

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au solide de masse m :

$$m\,\vec{a} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}.$$

Considérons la projection de cette équation vectorielle dans la direction du mouvement :

$$m\,a_x = P_x + R_x + T_x.$$

Comme le mouvement est horizontal, le poids est perpendiculaire à la direction du mouvement : $P_x = 0$.

La réaction étant perpendiculaire au support, sa projection dans la direction du mouvement est nulle : $R_x = 0$.

L'abscisse x appelée *élongation* est la valeur algébrique de l'écart par rapport à la position d'équilibre O. La coordonnée T_x de la tension du ressort vérifie la loi de Hooke et est de signe opposé à celui de l'élongation :

$$T_x = -k\,x.$$

L'équation se réduit à :

$$m\,a_x = -k\,x.$$

Avec $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ et en divisant par m, on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}\,x}$$

La solution de cette équation différentielle est l'équation horaire $x(t)$.

Conservation de l'énergie

On peut établir l'équation différentielle du mouvement au moyen de considérations énergétiques en remarquant que l'énergie mécanique du système est conservée en absence de frottements. L'énergie mécanique E est la somme de l'énergie cinétique E_c du solide et de l'énergie potentielle élastique E_p du ressort (relation 2.3) :

$$E = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}\, m\, {v_x}^2 + \tfrac{1}{2}\, k\, x^2.$$

La conservation de l'énergie mécanique se traduit par :

$$E = \text{constante} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\, m\, {v_x}^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2\right)}{\mathrm{d}t} = 0$$

d'où :

$$\tfrac{1}{2}\, m\, 2\, v_x\, \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \tfrac{1}{2}\, k\, 2\, x\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Avec $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = a_x = \ddot{x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$ l'expression devient :

$$m\, v_x\, \ddot{x} + k\, x\, v_x = 0.$$

En divisant par $m\, v_x$ et en réarrangeant les termes on obtient :

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\, x.$$

On a ainsi retrouvé l'équation différentielle du mouvement.

2.2.3 Solution de l'équation différentielle

Solution sinusoïdale

Une solution de l'équation différentielle est une fonction du temps ; c'est l'équation horaire $x(t)$ de l'oscillateur.

L'expérience 2.1 a montré que l'équation horaire du pendule élastique horizontal est une sinusoïde de la forme (relation 2.1) :

$$x(t) = x_m\, \sin(\omega_0\, t + \varphi).$$

Vérifions qu'une expression sinusoïdale est effectivement solution de l'équation différentielle du mouvement. En dérivant une première fois par rapport à t :

$$\dot{x} = x_m\, \omega_0\, \cos(\omega_0\, t + \varphi) \tag{2.4}$$

et une deuxième fois :

$$\ddot{x} = -x_m\, {\omega_0}^2\, \sin(\omega_0\, t + \varphi) = -{\omega_0}^2\, x_m\, \sin(\omega_0\, t + \varphi) = -{\omega_0}^2\, x \tag{2.5}$$

on constate que l'équation différentielle du mouvement est vérifiée par l'expression sinusoïdale *sous condition que* :

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}.$$

Exercice 2.1 Montrer que $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est également solution de l'équation différentielle du mouvement.

Après avoir lâché le solide, le pendule effectue des oscillations sans aucune influence de l'extérieur ; c'est donc un oscillateur libre. Pour cette raison la constante ω_0 est appelée *pulsation propre* de l'oscillateur.

La pulsation propre est déterminée par les grandeurs caractéristiques de l'oscillateur, dans notre cas la raideur du ressort et la masse du solide. L'amplitude x_m et la phase initiale φ sont déterminées par les conditions initiales.

Période propre

L'équation (2.2) relie la pulsation à la période des oscillations. La pulsation propre du pendule élastique est :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

ce qui donne pour la *période propre* du pendule élastique :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Vitesse et accélération instantanées

En utilisant les relations (2.4) et (2.5) on obtient la vitesse :

$$v_x = \dot{x} = x_m \, \omega_0 \, \cos(\omega_0 \, t + \varphi)$$

et l'accélération du solide :

$$a_x = \ddot{x} = -x_m \, {\omega_0}^2 \, \sin(\omega_0 \, t + \varphi) = -{\omega_0}^2 \, x.$$

Les facteurs qui multiplient les fonctions trigonométriques sont les valeurs maximales de la vitesse :

$$v_{max} = x_m \, \omega_0$$

et de l'accélération :

$$a_{max} = x_m \, {\omega_0}^2.$$

L'accélération est toujours de signe opposé à celui de x. Le vecteur accélération est toujours dirigé vers la position d'équilibre.

Quand l'oscillateur s'écarte de sa position d'équilibre, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont opposés : le mouvement est freiné. Lorsqu'il se rapproche de la position d'équilibre, les deux vecteurs ont même sens : le mouvement est accéléré.

Exemple : voir figure 2.7.

Conditions initiales

Quelle est la valeur qu'il faudra donner à la constante φ pour tenir compte de l'état initial du mouvement de l'oscillateur à l'instant $t = 0$? À cet instant, la position est $x_0 = x_m \sin(\varphi)$ et la vitesse $v_{x0} = v_{max} \cos(\varphi)$. Nous allons considérer uniquement les cas particuliers suivants :

- $x_0 = \pm\, x_m$ et $v_{x0} = 0$.

  Le solide est écarté de sa position d'équilibre de l'amplitude x_m et puis lâché sans vitesse initiale. La phase initiale est $\varphi = \pi/2$ si l'élongation initiale est positive et $\varphi = -\pi/2$ si elle est négative.

- $x_0 = 0$ et $v_{x0} = \pm\, v_{max}$.

  Le solide est lancé depuis sa position d'équilibre avec la vitesse v_{max}. La phase initiale est $\varphi = 0$ si cette vitesse est positive et $\varphi = \pi$ si elle est négative. L'amplitude est alors donnée par $x_m = v_{max}/\omega_0$.

Exercice 2.2 Reprendre cette discussion avec $x(t) = x_m \cos(\omega_0\, t + \varphi)$.

Représentation graphique

Considérons le cas où la phase initiale est $\varphi = \pi/2$. Le solide est lâché sans vitesse initiale depuis la position $x_0 = x_m$. La position à l'instant t est donnée par :

$$x = x_m \sin(\omega_0\, t + \pi/2) = x_m \cos(\omega_0\, t).$$

L'expression pour la vitesse devient :

$$v_x = v_{max} \cos(\omega_0\, t + \pi/2) = -v_{max} \sin(\omega_0\, t).$$

L'accélération s'exprime en fonction de la position :

$$a_x = -{\omega_0}^2\, x = -x_m\, {\omega_0}^2 \cos(\omega_0\, t).$$

Le tableau 2.1 reprend les valeurs des grandeurs cinématiques à des instants particuliers.

t	0	$T_0/4$	$T_0/2$	$3\,T_0/4$	T_0
$\omega_0\, t = (2\pi/T_0)\, t$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(\omega_0\, t)$	0	1	0	-1	0
$\cos(\omega_0\, t)$	1	0	-1	0	1
x	x_m	0	$-x_m$	0	x_m
v_x	0	$-x_m\, \omega_0$	0	$x_m\, \omega_0$	0
a_x	$-x_m\, {\omega_0}^2$	0	$x_m\, {\omega_0}^2$	0	$-x_m\, {\omega_0}^2$

TABLE 2.1 – Grandeurs cinématiques à des instants particuliers

La figure 2.7 montre la représentation graphique de $x(t)$, $v_x(t)$ et $a_x(t)$.

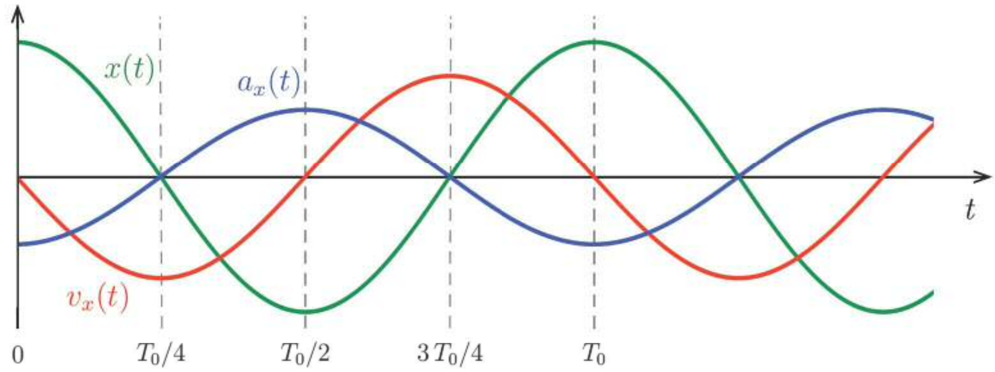
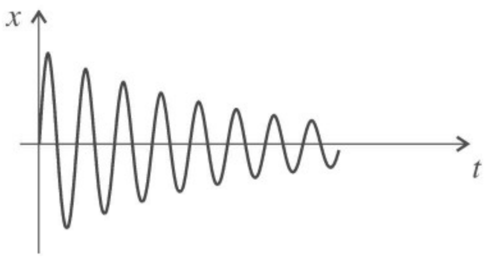


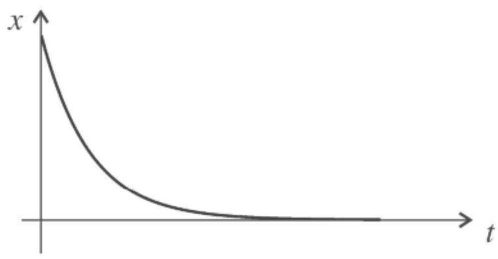
FIGURE 2.7 – Représentation graphique de $x(t)$, $v_x(t)$ et $a_x(t)$

2.2.4 Oscillations amorties

L'expérience avec le pendule élastique a montré qu'une augmentation progressive de la force de frottement provoque une diminution de l'amplitude à chaque aller retour (figure 2.8a). Les oscillations du pendule sont amorties et le mouvement n'est pas périodique au sens strict. On le qualifie de *pseudo-périodique* et on appelle *pseudo-période* la durée d'une oscillation. Dans le cas d'un faible amortissement, la pseudo-période est légèrement supérieure à la période propre du pendule. La valeur de la pseudo-période, donc le temps pour un aller-retour, ne change pas durant le mouvement.



(a) pseudo-périodique



(b) apériodique

FIGURE 2.8 – Régimes oscillatoires en cas de frottements

Lorsque l'intensité de la force de frottement dépasse une valeur critique, il n'y a plus d'oscillations. Écarté de sa position d'équilibre, le pendule y revient lentement sans osciller (figure 2.8b). On qualifie alors le mouvement d'*apériodique*.

Exemples : les aiguilles d'instruments à cadre mobile et les amortisseurs d'automobile effectuent des mouvements apériodiques.

2.2.5 Le phénomène de résonance

Étude expérimentale

Expérience 2.2 On utilise le dispositif solide-ressort de l'expérience 2.1 auquel on adjoint un moteur électrique dont la fréquence de rotation est variable et dont l'axe de rotation supporte un excentrique (figure 2.9). Un des deux ressorts a maintenant une extrémité fixée à l'excentrique, son autre extrémité est reliée au solide. Des potentiomètres à eau traduisent les positions du chariot et de l'extrémité du ressort fixée à l'excentrique en deux tensions qui sont ensuite visualisées à l'aide d'un oscilloscope. Les variations des tensions sont proportionnelles aux élongations respectivement de l'excentrique et du solide.

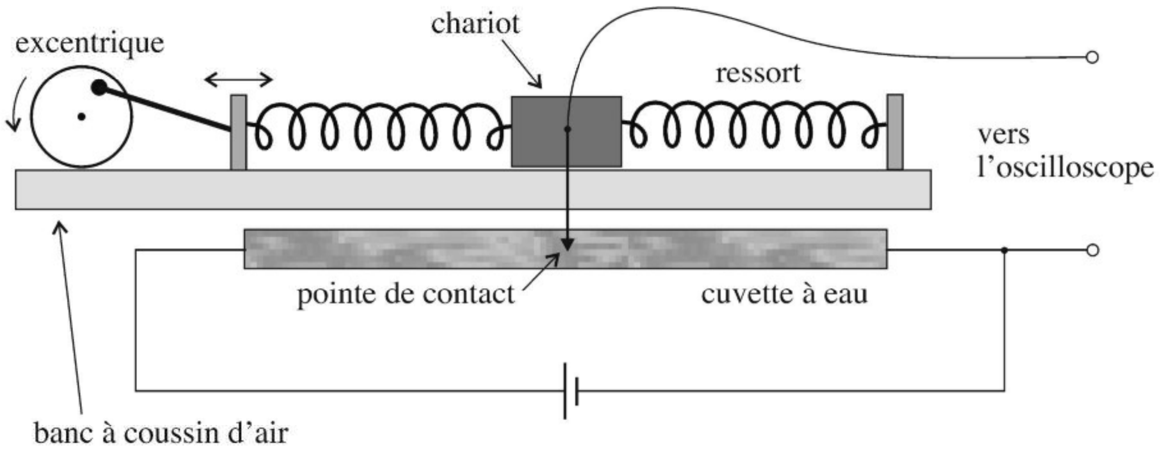


FIGURE 2.9 – Schéma du dispositif expérimental

La soufflerie étant à pleine puissance, on met en marche le moteur avec une fréquence de rotation très petite. On observe qu'après quelques instants le mouvement du mobile devient régulier. Le mouvement observé est alors d'allure sinusoïdale.

Nous allons faire varier la fréquence f de rotation du moteur de part et d'autre de la fréquence propre f_0 de l'oscillateur et étudier l'évolution de l'amplitude des oscillations du solide.

Description du mouvement

Les figures 2.10a à 2.10d montrent les oscillogrammes du pendule élastique horizontal. Les échelles de temps et d'allongement du ressort sont les mêmes sur toutes les figures.

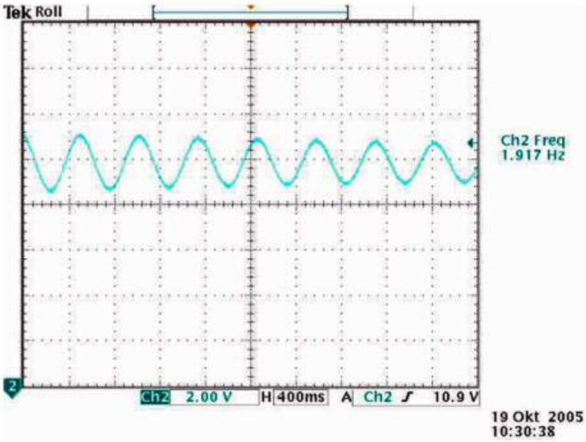
Observations :

- En régime établi, le pendule élastique oscille avec la même fréquence que celle de rotation du moteur.
- L'amplitude des oscillations est maximale si la fréquence du moteur est sensiblement égale à la fréquence propre du pendule élastique (figure 2.10c).

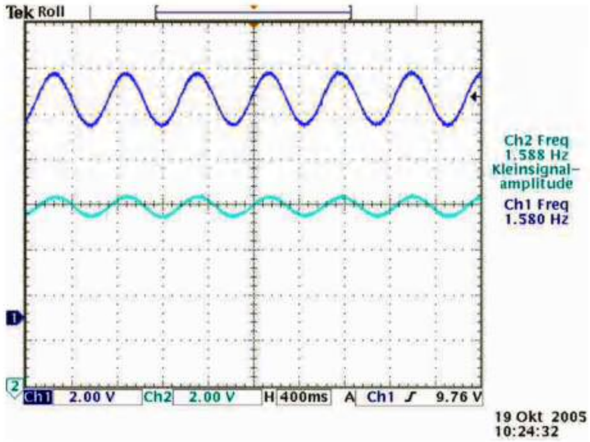
Les oscillations du système solide-ressort sont dites *forcées* par le mouvement du point d'accrochage du ressort à l'excentrique, lui-même lié au moteur.

Lorsqu'un oscillateur est en *oscillations forcées*, sa *fréquence est imposée* par un dispositif extérieur, appelé l'*excitateur*.

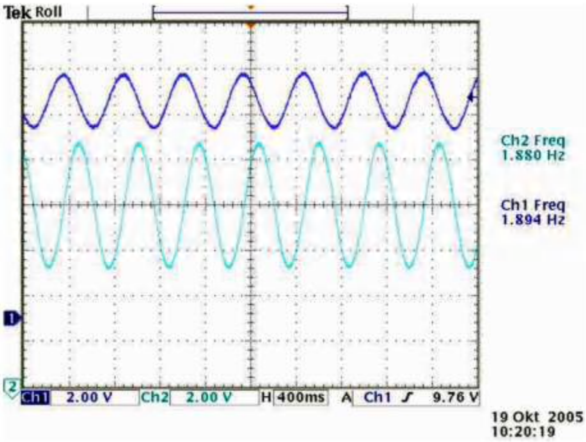
Énoncé *Pour une fréquence d'excitation égale à la fréquence propre de l'oscillateur, l'amplitude des oscillations est maximale ; c'est le phénomène de résonance.*



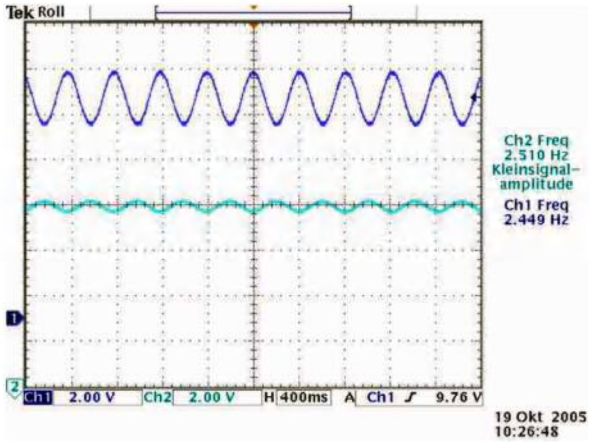
(a) Oscillations libres, f_0



(b) Oscillations forcées, $f < f_0$



(c) Résonance, $f = f_0$



(d) Oscillations forcées, $f > f_0$

FIGURE 2.10 – Oscillogrammes du pendule élastique horizontal

C'est pourquoi un oscillateur en oscillations forcées est aussi appelé *résonateur*.

Influence de l'amortissement

On recommence l'expérience en excitant le résonateur au voisinage de sa fréquence propre, puis on règle la puissance de la soufflerie à des valeurs de plus en plus faibles. On constate alors que l'amplitude du mouvement diminue lorsque la puissance de la soufflerie diminue, c'est-à-dire lorsque l'amortissement augmente.

Énoncé *L'amplitude du mouvement diminue d'autant plus à la résonance que l'amortissement est important.*

Courbe de résonance

En représentant l'amplitude x_m des oscillations en fonction de la fréquence f, on obtient la *courbe de résonance*. La figure 2.11 montre deux courbes pour des frottements d'intensités différentes.

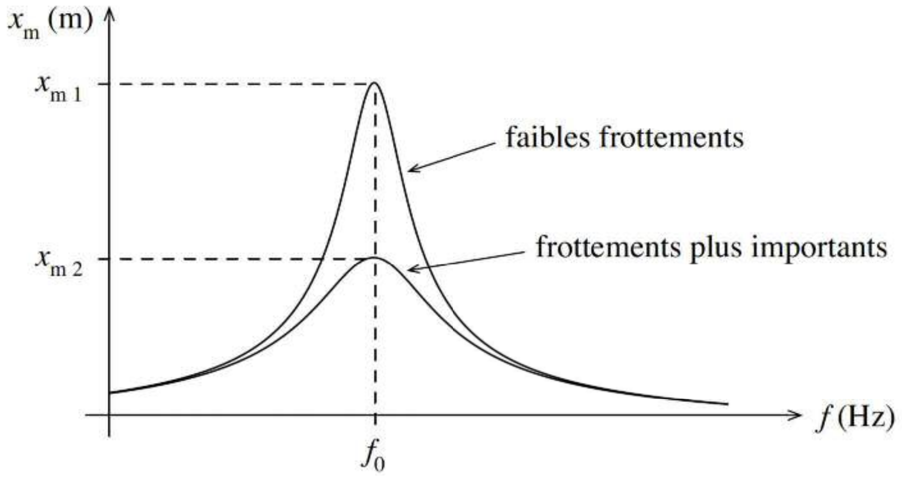


FIGURE 2.11 – Courbe de résonance amplitude en fonction de la fréquence

Les courbes présentent des maxima de valeurs respectivement x_{m1} et x_{m2}. Ces maxima d'amplitude sont obtenus pour une *fréquence de résonance* f_r égale la fréquence propre f_0 du système oscillant :

$$f_r = f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Suivant l'intensité des frottements, la résonance peut être :

- *aiguë* (courbe pointue avec un maximum x_{m1}) lorsque l'amortissement est faible ;
- *floue* (courbe aplatie avec un maximum x_{m2}) lorsque l'amortissement est plus important.

L'amplitude des oscillations diminue d'autant plus à la résonance que les frottements sont importants.

Exemples de résonances mécaniques

Le phénomène de résonance peut être utile ou destructif, comme le montrent les exemples suivants :

- La suspension d'une automobile peut être modélisée par un ressort vertical fixé entre le châssis et l'axe, ce qui constitue un oscillateur. Il arrivait, sur les modèles anciens, que pour certaines vitesses et certaines irrégularités dans la chaussée, l'oscillateur entre en résonance. Cela se traduisait par une forte augmentation de l'amplitude verticale du mouvement de la caisse et pouvait présenter des dangers : les roues décollaient de la route et perdaient toute adhérence. Afin de limiter cet effet, on ajoute des amortisseurs, généralement à huile, qui permettent de diminuer l'amplitude du mouvement en cas de résonance.
- Le pont de Tacoma aux États-Unis s'effondra en 1940 après être entré en résonance sous l'action de bourrasques de vent périodiques jouant le rôle d'excitateur. De même, en 1850, le tablier d'un pont suspendu sur la Maine à Angers se rompit

au passage d'une troupe marchant au pas cadencé. Le tablier du pont et ses cibles de suspension, présentant une certaine élasticité, constituaient un oscillateur mécanique. L'excitation provoquée par les pas cadencés de la troupe l'avait fait entrer en résonance, provoquant sa rupture. Les tabliers des ponts actuels sont tous arrimés au sol par l'intermédiaire de vérins amortisseurs qui permettent de limiter le phénomène de résonance.

- La caisse de résonance d'un violon permet de renforcer les notes produites par la vibration des cordes. L'âme est la pièce qui lie les cordes et la caisse de résonance. Elle doit être placée sous le chevalet. La caisse de résonance et la masse d'air qu'elle contient constituent un oscillateur mécanique. Ce dernier possède des périodes propres de vibration qui dépendent de la forme de la caisse. Les cordes du violon jouent le rôle de l'excitateur, la caisse de résonance celui du résonateur.

2.3 Oscillateurs électriques

2.3.1 Loi d'Ohm pour une bobine

Description d'une bobine

On obtient un *solénoïde* ou *bobine* en bobinant un fil conducteur électrique sur un support isolant. Le fil doit toujours être enroulé dans le même sens autour de l'axe du support.

La bobine crée un champ magnétique notable lorsqu'elle est parcourue par un courant électrique.

L'étude du phénomène de l'induction magnétique en classe de 2^e^ a montré qu'une bobine ne se réduit pas, d'un point de vue électrique, à la résistance du fil qui la constitue. Elle s'oppose aussi aux variations du courant.

Comportement d'une bobine

Lorsqu'une bobine est parcourue par un courant électrique i variable, une tension u_B apparaît à ses bornes. Quand le courant varie rapidement, cette tension est proportionnelle au taux de variation du courant électrique :

$$u_B \sim \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

En introduisant un coefficient de proportionnalité en en adoptant la convention récepteur pour la définition de la tension u_B, il vient :

$$\boxed{u_B = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

où L est appelée *inductance* de la bobine ; elle s'exprime en *henrys* (H).

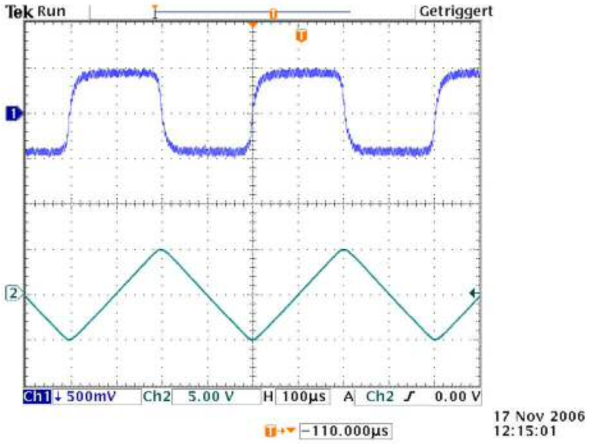
Remarques :

- L'intensité i du courant peut être positive ou négative. On définit un sens positif du courant qui est représenté par une flèche. Lorsque $i > 0$, le courant circule dans le sens indiqué par la flèche ; lorsque $i < 0$, le courant circule dans le sens opposé.
- En convention récepteur, la flèche représentant la tension est en sens inverse de celle choisie pour le sens positif du courant.

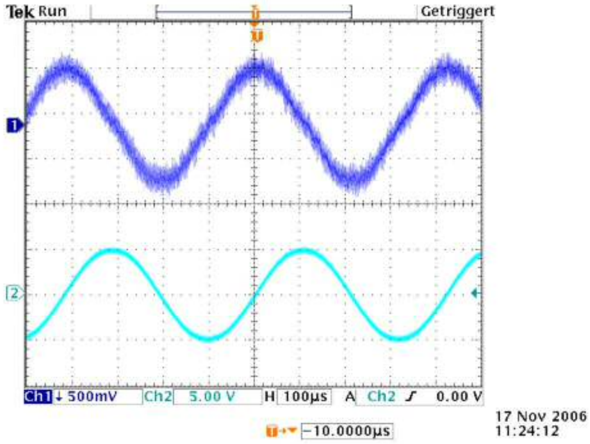
Les oscillogrammes de la figure 2.12 représentent la tension aux bornes de la bobine (voie 1) pour différents courants variables (voie 2).

Modélisation du comportement d'une bobine

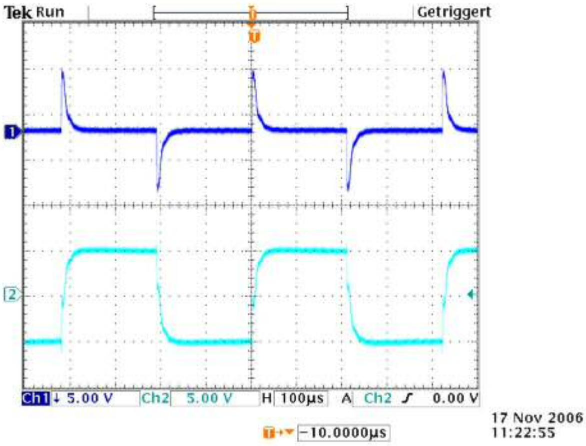
Pour une variation quelconque de l'intensité au cours du temps, la tension est la somme de deux termes liés respectivement à la résistance et à l'inductance de la bobine.



(a) Courant en dents de scie



(b) Courant sinusoïdal



(c) Courant rectangulaire

FIGURE 2.12 – Tension aux bornes de la bobine pour différents courants

En adoptant la convention récepteur, la tension u_B et l'intensité i du courant sont reliées par :

$$\boxed{u_B = r\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} \tag{2.6}$$

Cette relation, appelée *loi d'Ohm pour une bobine*, est l'équivalent pour une bobine de la relation $u_R = R\,i$ pour une résistance R. Elle relie, dans toutes les situations, la tension aux bornes de la bobine et l'intensité du courant qui la traverse.

Remarque : lorsque la fréquence est largement supérieure à une certaine fréquence limite, l'amplitude du 1$^{\text{er}}$ terme devient négligeable devant celle du 2$^{\text{e}}$ terme.

Le symbole d'une bobine représente les deux paramètres caractéristiques de la bobine : sa résistance et son inductance (figure 2.13).

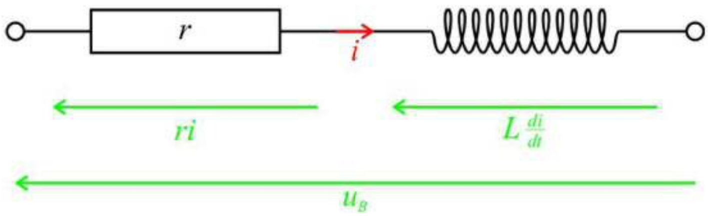


FIGURE 2.13 – Symbole de la bobine

2.3.2 Énergie magnétique d'une bobine

Mise en évidence expérimentale

Expérience 2.3 Un générateur de tension continue alimente une bobine à noyau de fer par l'intermédiaire de l'interrupteur S. La diode D permet le passage du courant dans le moteur dans un seul sens (figure 2.14).

L'axe du moteur M peut entraîner un tambour sur lequel est fixé un fil. À l'extrémité de ce fil, un petit objet est attaché.

L'interrupteur S est ouvert depuis une assez longue durée, le moteur est au repos. On ferme S, un courant s'établit dans la bobine. Le moteur ne tourne pas, la diode empêchant le courant de le traverser.

Après quelques instants, on ouvre S. Le moteur se met en rotation entraînant vers le haut l'objet attaché au bout du fil.

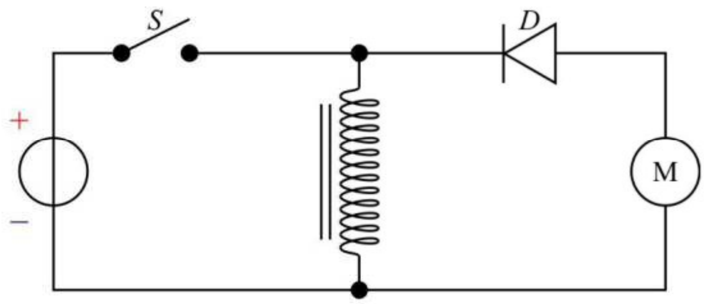


FIGURE 2.14 – Mise en évidence de l'énergie magnétique

Interprétation :

Lorsque le moteur se met à tourner, il n'est plus connecté au générateur qui ne peut donc pas lui fournir de l'énergie. Le courant ne traverse que le moteur, la diode et la bobine dans le sens permis par la diode. Seule la bobine peut donc fournir de l'énergie au moteur.

L'énergie restituée pendant cette phase de l'expérience a été stockée dans la bobine lors de l'établissement du courant, à la fermeture de l'interrupteur S.

Expression de l'énergie magnétique

La bobine possède de l'*énergie magnétique* E_{L} lorsqu'elle est parcourue par un courant électrique. Cette énergie est égale au travail électrique W que doit effectuer le générateur lors de l'établissement de ce courant.

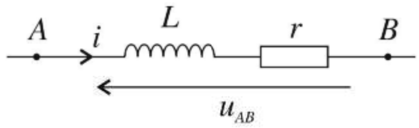


FIGURE 2.15 – Bobine traversée par un courant

La puissance électrique P fournie par le générateur pour faire circuler un courant d'intensité i de A vers B (figure 2.15) à travers la bobine est :

$$P = u_{AB}\, i.$$

Avec la loi d'Ohm pour une bobine :

$$u_{AB} = r\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

la puissance s'écrit :

$$P = r\,i^2 + L\,i\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Le 1[er] terme correspond à la puissance dissipée par effet Joule et ne contribue pas à l'énergie magnétique de la bobine. Le 2[e] terme est égal au taux de variation de l'énergie magnétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t} = L\,i\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

L'énergie magnétique est donc une primitive par rapport au temps de l'expression $L\,i\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Nous avons :

$$E_\mathrm{L} = \tfrac{1}{2}\,L\,i^2 + \text{constante}.$$

La constante d'intégration est choisie de sorte que l'énergie d'une bobine qui n'est pas parcourue par un courant, c'est-à-dire lorsque $i = 0$, soit nulle.

L'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine d'inductance L parcourue par un courant d'intensité i est :

$$\boxed{E_\mathrm{L} = \tfrac{1}{2}\,L\,i^2}$$

2.3.3 Rappel sur le condensateur

Les armatures d'un condensateur portent des charges opposées. La tension u_{AB} entre les armatures A et B est reliée à la charge q de l'armature A par :

$$u_{AB} = \frac{q}{C} \tag{2.7}$$

où C est la capacité du condensateur.

La variation de la charge du condensateur est due à un courant électrique d'intensité i. Avec les conventions de la figure 2.16 nous avons :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{2.8}$$

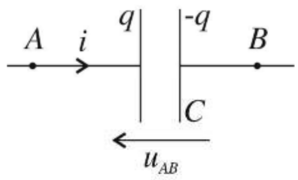


FIGURE 2.16 – Conventions pour le condensateur

L'énergie potentielle électrique E_C d'un condensateur chargé est égale au travail électrique effectué pour charger le condensateur.

La puissance électrique fournie au condensateur est :

$$P = u_{AB}\, i.$$

Elle est égale au taux de variation de l'énergie électrique. En utilisant les relations (2.7) et (2.8) on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_\text{C}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

L'énergie électrique est une primitive par rapport au temps de l'expression $\dfrac{q}{C}\,\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Nous avons :

$$E_\text{C} = \tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{C} + \text{constante}.$$

La constante d'intégration est choisie de sorte que l'énergie d'un condensateur non chargé, c'est-à-dire lorsque $q = 0$, soit nulle. L'énergie électrique emmagasinée dans un condensateur de capacité C portant la charge q est :

$$\boxed{E_\text{C} = \tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}}$$

2.3.4 Oscillations dans un dipôle RLC

Expérience 2.4 Le circuit (figure 2.17) comporte un générateur de tension continue, un condensateur de capacité C, une bobine et une résistance variable R. Lorsque l'interrupteur S est basculé dans la position 1, le condensateur se charge jusqu'à ce que la tension à ses bornes u_C soit égale à la f.é.m. E du générateur.

En basculant S en position 2, on isole le générateur, le condensateur se décharge dans la bobine et dans la résistance montées en série. L'oscilloscope enregistre les variations de u_C au cours de la décharge.

On choisit initialement pour R la valeur $R = 0{,}1\,\mathrm{k\Omega}$. On observe (figure 2.18a) que la décharge du condensateur est *oscillante amortie*. Elle n'est pas périodique puisque u_C ne reprend pas la même valeur à des intervalles de temps égaux ; l'amplitude des oscillations décroît au cours du temps. La tension u_C s'annule à des instants séparés par des intervalles de temps égaux ; la décharge est dite *pseudo-périodique*. La pseudo-période est la durée qui sépare deux passages successifs de u_C par 0 dans le même sens.

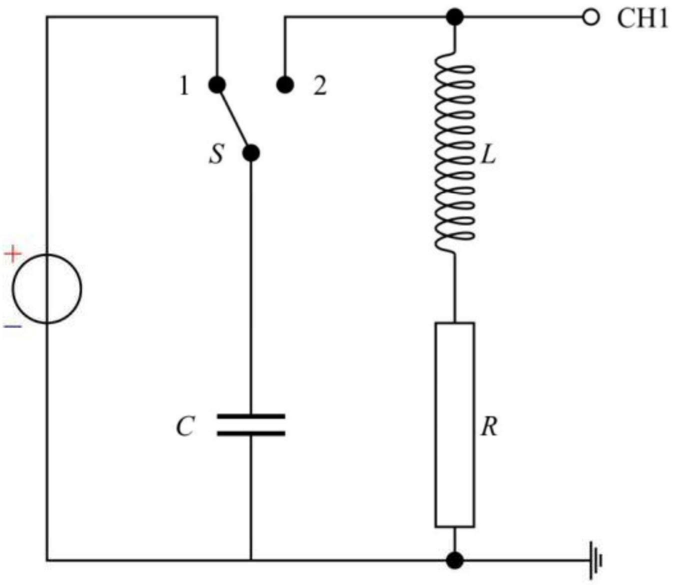
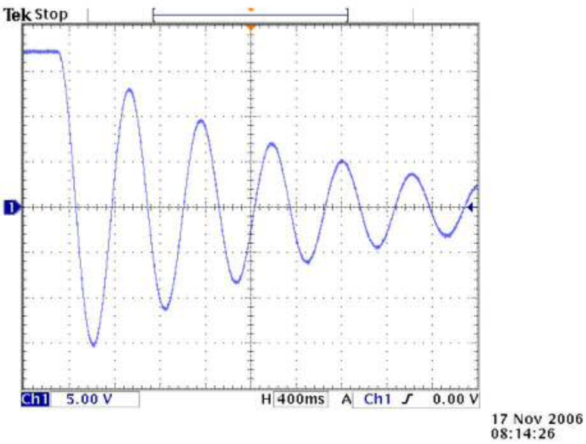
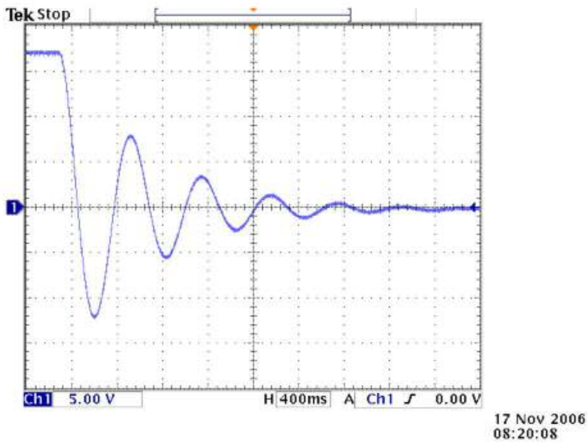


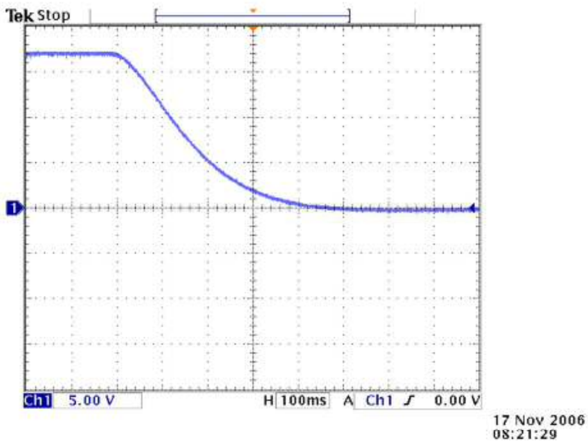
FIGURE 2.17 – Décharge d'un condensateur dans une bobine



(a) Oscillations amorties, $R = 0{,}1\,\mathrm{k\Omega}$



(b) Oscillations amorties, $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$



(c) Décharge apériodique, $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$

FIGURE 2.18 – Oscillogrammes des oscillations libres d'un circuit RLC

L'expérience est répétée avec des valeurs de résistance plus grandes. Avec $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ la décharge est toujours oscillante amortie, mais l'amortissement se fait plus rapidement (figure 2.18b).

Lorsque la résistance est très importante, par exemple pour $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, les oscillations disparaissent (figure 2.18c). La tension décroît sans changer de signe. La décharge est *apériodique.*

En annulant R, l'amortissement, bien que plus faible, n'est pas nul. La résistance de la bobine est la cause de cet amortissement.

Énoncé *Lorsque la résistance du circuit RLC est faible, la décharge du condensateur dans la bobine est oscillante amortie. L'amortissement augmente avec la résistance totale du circuit. Au-delà d'une valeur limite, la décharge devient apériodique.*

2.3.5 Équation différentielle pour un circuit LC

Nous allons maintenant établir l'équation différentielle qui régit les oscillations d'un circuit LC ; la résistance totale du circuit est supposée négligeable. Nous allons d'abord nous servir de la loi des mailles et puis aboutir au même résultat par des considérations énergétiques.

Loi des mailles

Considérons le circuit LC de la figure 2.19 constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable et d'un condensateur de capacité C.

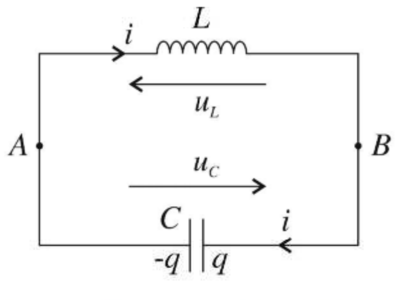


FIGURE 2.19 – Circuit oscillant LC

L'application de la loi des mailles donne : $u_{AB} + u_{BA} = 0$. Avec les relations (2.6) et (2.7) et en prenant $r = 0$:

$$u_{AB} = u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad u_{BA} = u_C = \frac{q}{C}$$

cette équation s'écrit :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0. \tag{2.9}$$

En utilisant la relation (2.8) entre charge et intensité du courant, la dérivée par rapport au temps de l'intensité est :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{q}.$$

En divisant l'équation (2.9) par L et en réarrangeant les termes, l'équation différentielle pour le circuit LC devient :

$$\boxed{\ddot{q} = -\frac{1}{L\,C}\,q}$$

Remarques :

- En remplaçant dans l'équation différentielle q par $C\,u_C$ (relation 2.7) et en divisant ensuite par C on obtient l'équation différentielle :

$$\ddot{u}_C = -\frac{1}{L\,C}\,u_C.$$

  Pour dériver par rapport au temps, on remarque que C est une constante et donc $\ddot{q} = C\,\ddot{u}_C$.

- L'équation différentielle pour la charge a la même forme que celle pour l'élongation d'un oscillateur mécanique.

Conservation de l'énergie

Nous allons établir cette même équation différentielle à partir de considérations énergétiques. L'énergie E du système est la somme de l'énergie électrique E_{C} du condensateur et de l'énergie magnétique E_{L} de la bobine :

$$E = E_{\mathrm{C}} + E_{\mathrm{L}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{C} + \tfrac{1}{2}\,L\,i^2.$$

Lorsque la dissipation d'énergie par effet Joule peut être négligée, l'énergie du système reste constante :

$$E = \text{constante} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}\,L\,i^2\right)}{\mathrm{d}t} = 0$$

d'où :

$$\tfrac{1}{2}\,2\,\frac{q}{C}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \tfrac{1}{2}\,L\,2\,i\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Avec les conventions de la figure 2.19 nous avons $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{q}$. L'expression devient :

$$\frac{q}{C}\,i + L\,i\,\ddot{q} = 0.$$

En divisant par $L\,i$ et en réarrangeant les termes on obtient finalement :

$$\ddot{q} = -\frac{1}{L\,C}\,q.$$

On a ainsi retrouvé l'équation différentielle du circuit LC.

2.3.6 Solution de l'équation différentielle

Solution sinusoïdale

Une solution de l'équation différentielle est une fonction du temps ; c'est l'équation horaire $q(t)$ de l'oscillateur électrique.

Les résultats expérimentaux et la forme de l'équation différentielle suggèrent une solution sinusoïdale de la forme :

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où $Q_m > 0$ est la charge maximale de l'armature positive du condensateur.

Vérifions que cette fonction est effectivement solution de l'équation différentielle du circuit. En dérivant une première fois par rapport à t :

$$\dot{q} = -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{2.10}$$

et une deuxième fois :

$$\ddot{q} = -Q_m {\omega_0}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -{\omega_0}^2 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = -{\omega_0}^2 q$$

on constate que l'équation différentielle est vérifiée par la fonction sinusoïdale sous condition que :

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{L C}.$$

Exercice 2.3 Montrer que $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ est également solution de l'équation différentielle.

Lorsqu'une bobine est branchée aux bornes d'un condensateur chargé, le condensateur va se décharger et se charger périodiquement sans aucune influence de l'extérieur ; le circuit LC est donc un oscillateur libre. Pour cette raison la constante ω_0 est appelée *pulsation propre* de l'oscillateur.

La pulsation propre est déterminée par les grandeurs caractéristiques de l'oscillateur. Dans le cas du circuit LC ce sont la capacité C du condensateur et l'inductance L de la bobine. La charge maximale Q_m et la phase initiale φ sont déterminées par les conditions initiales.

Période propre

La pulsation propre des oscillations libres du circuit LC est :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}}}$$

La relation (2.2) permet d'obtenir la *période propre* :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{L C}} \tag{2.11}$$

Tensions et intensité du courant

La tension aux bornes du condensateur est donnée par la relation (2.7) :

$$u_C = \frac{q}{C} = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où $U_m = \dfrac{Q_m}{C}$ est l'amplitude de la tension u_C.

La loi des mailles permet d'obtenir la tension aux bornes de la bobine :

$$u_L = -u_C = -U_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

L'intensité du courant est obtenue à l'aide des relations (2.8) et (2.10) :

$$i = \dot{q} = -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

où $I_m = Q_m \omega_0$ est l'amplitude de l'intensité i. Le circuit LC est donc traversé par un *courant alternatif sinusoïdal.*

Conditions initiales

Les grandeurs Q_m et φ sont déterminées par les conditions initiales, c'est-à-dire par les valeurs de u_C et i à l'instant $t = 0$.

Supposons que le condensateur fut chargé à l'aide d'un générateur de tension continue de f.é.m. E. Lorsqu'on branche la bobine sur ce condensateur chargé, la tension initiale au bornes du condensateur est E et sa charge initiale vaut $Q_m = C\,E$. Nous avons à l'instant $t = 0$: $E = U_m \cos(\varphi)$. L'intensité du courant doit être nulle initialement car le courant ne peut pas s'établir de façon instantanée dans la bobine : $0 = -I_m \sin(\varphi)$. Il résulte de ces deux conditions que $\varphi = 0$ et $U_m = E$, et ainsi :

$$\begin{aligned}
u_C &= U_m \cos(\omega_0 t) = E \cos(\omega_0 t) \\
u_L &= -U_m \cos(\omega_0 t) = -E \cos(\omega_0 t) \\
i &= -I_m \sin(\omega_0 t) = -C\,E\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)
\end{aligned}$$

En utilisant les relations trigonométriques :

$$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x) \quad ; \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

nous pouvons réécrire ces expressions :

$$\begin{aligned}
u_C &= U_m \cos(\omega_0 t) \\
u_L &= U_m \cos(\omega_0 t + \pi) \\
i &= U_m \sqrt{\frac{C}{L}} \cos(\omega_0 t + \pi/2)
\end{aligned}$$

Exercice 2.4 Reprendre cette discussion si $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

t	0	$T_0/4$	$T_0/2$	$3\,T_0/4$	T_0
$\omega_0\,t = (2\pi/T_0)\,t$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(\omega_0\,t)$	0	1	0	-1	0
$\cos(\omega_0\,t)$	1	0	-1	0	1
u_C	U_m	0	$-U_m$	0	U_m
u_L	$-U_m$	0	U_m	0	$-U_m$
i	0	$-C\,U_m\,\omega_0$	0	$C\,U_m\,\omega_0$	0

TABLE 2.2 – Tensions et intensité à des instants particuliers

Représentation graphique

Le tableau 2.2 reprend les valeurs des tensions et de l'intensité du courant à des instants particuliers.

La figure 2.20 montre la représentation graphique de $u_C(t)$, $u_L(t)$ et $i(t)$.

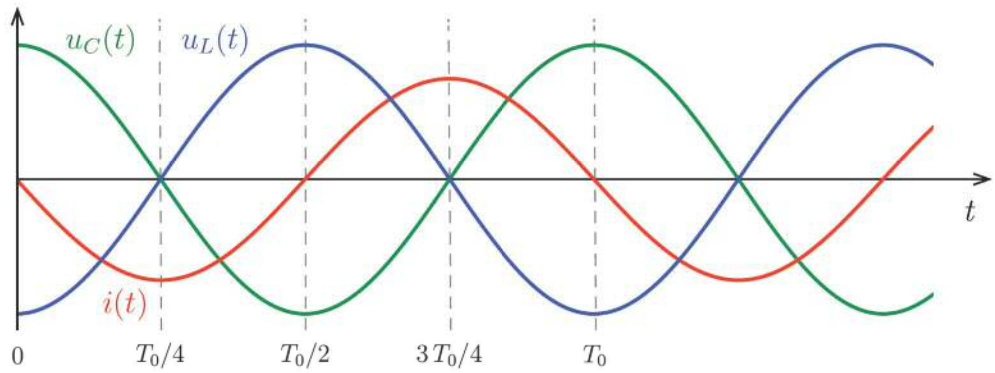


FIGURE 2.20 – Représentation graphique de $u_C(t)$, $u_L(t)$ et $i(t)$

On constate que u_C et i sont déphasées de $\pi/2$.

2.3.7 Oscillations amorties

L'expérience 2.4 a montré que si la résistance totale du circuit n'est pas négligeable, les oscillations sont amorties : l'amplitude diminue. L'effet de la résistance est comparable à celui d'une force de frottement dans le cas d'oscillations mécaniques.

Pour une discussion de l'influence de la résistance sur l'amortissement, voir la section 2.3.4.

L'énergie du système électrique n'est plus constante mais elle est dissipée progressivement par effet joule. L'équation différentielle et sa solution ne sont plus valables.

2.3.8 Le phénomène de résonance

Étude expérimentale qualitative

Un circuit LC livré à lui-même constitue un oscillateur libre de fréquence propre f_0. Que va-t-il se passer si nous allons forcer des oscillations dans un tel circuit ?

Expérience 2.5 Considérons le cas d'un dipôle RLC série branché aux bornes d'un générateur de tension alternative sinusoïdale. Nous allons utiliser le montage de la figure 2.21. La capacité du condensateur vaut $C = 18\,\mu\text{F}$, l'inductance de la bobine est $L = 9\,\text{mH}$. La fréquence propre est obtenue à l'aide de la relation (2.11) et vaut $f_0 = {T_0}^{-1} = 395\,\text{Hz}$.

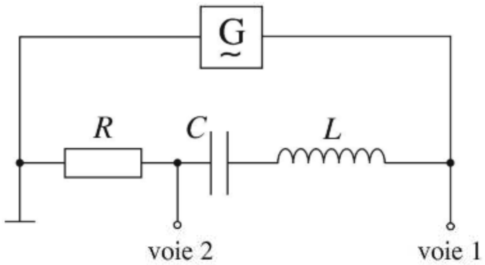


FIGURE 2.21 – Circuit RLC en régime forcé

Les figures 2.22a à 2.22c montrent les oscillogrammes du circuit RLC en régime forcé. Les échelles de temps et de tension sont les mêmes sur toutes les figures. L'amplitude de la tension aux bornes du générateur (voie 1) est gardée constante. D'après la loi d'Ohm, l'intensité $i(t)$ circulant dans le circuit est proportionnelle à la tension aux bornes de la résistance (voie 2).

Observations :

- En régime établi, la fréquence des oscillations du courant électrique est égale à celle du générateur de tension.
- L'amplitude de l'intensité est maximale si la fréquence du générateur est égale à la fréquence propre du circuit LC (figure 2.22c).

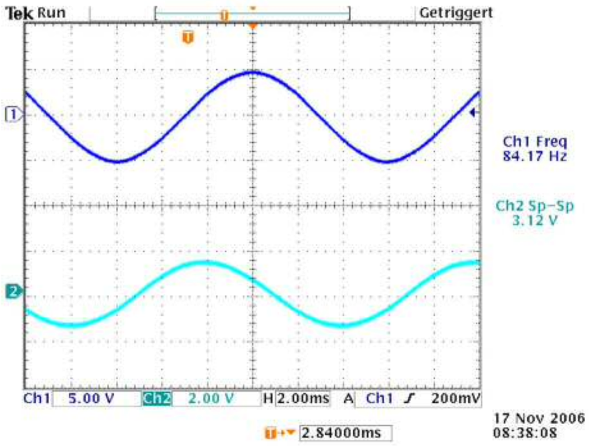
Le générateur de tension joue le rôle de l'*excitateur* et impose sa fréquence aux oscillations du circuit RLC ; ces oscillations sont dites *forcées* par le générateur de tension.

Énoncé *Pour une fréquence d'excitation égale à la fréquence propre du circuit LC, l'amplitude des oscillations du courant électrique devient maximale, c'est le phénomène de résonance.*

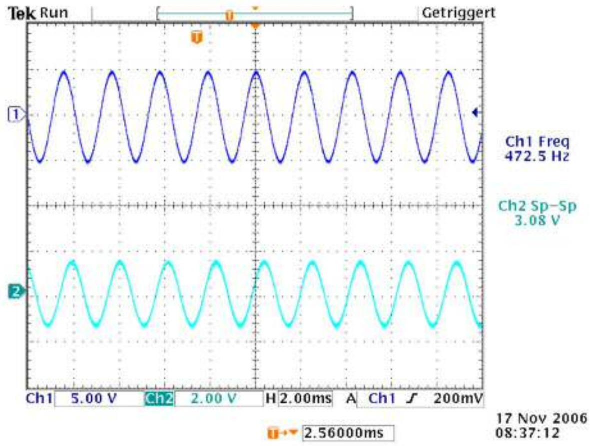
C'est pourquoi un circuit RLC en oscillations forcées est aussi appelé *résonateur*.

Courbe de résonance

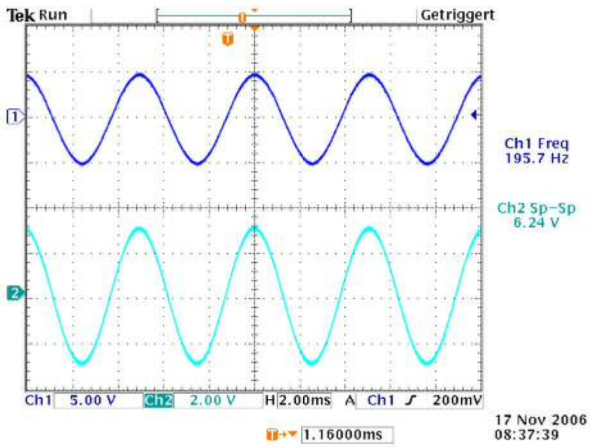
Expérience 2.6 Nous mesurons à l'aide d'un ampèremètre l'amplitude I du courant électrique. La figure 2.23 montre le montage utilisé. Le voltmètre sert à vérifier que l'amplitude de la tension du générateur reste constante lors des mesures.



(a) Oscillations forcées, $f < f_0$



(b) Oscillations forcées, $f > f_0$



(c) Oscillations forcées, $f = f_0$

FIGURE 2.22 – Oscillogrammes du circuit RLC en régime forcé

Les résultats des mesures sont représentés à l'aide de la courbe amplitude I en fonction de la fréquence f. La figure 2.24 représente deux courbes pour des valeurs différentes R_1 et R_2 de la résistance du circuit.

Les courbes présentent des maxima de valeurs respectivement I_1 et I_2. Ces maxima d'amplitude sont obtenus pour une *fréquence de résonance* f_r égale à la fréquence propre f_0 du circuit oscillant non-amorti :

$$f_r = f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}}.$$

Suivant les valeurs de la résistance, la résonance peut être :

- *aiguë* (courbe pointue de maximum I_1) lorsque la résistance est faible ;
- *floue* (courbe aplatie de maximum I_2) lorsque la résistance est plus importante.

L'amplitude de l'intensité du courant électrique diminue d'autant plus à la résonance que la résistance du circuit est importante.

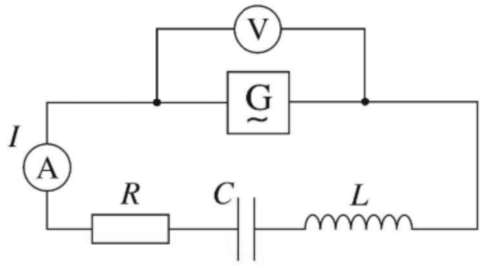


FIGURE 2.23 – Montage utilisé pour déterminer la courbe de résonance

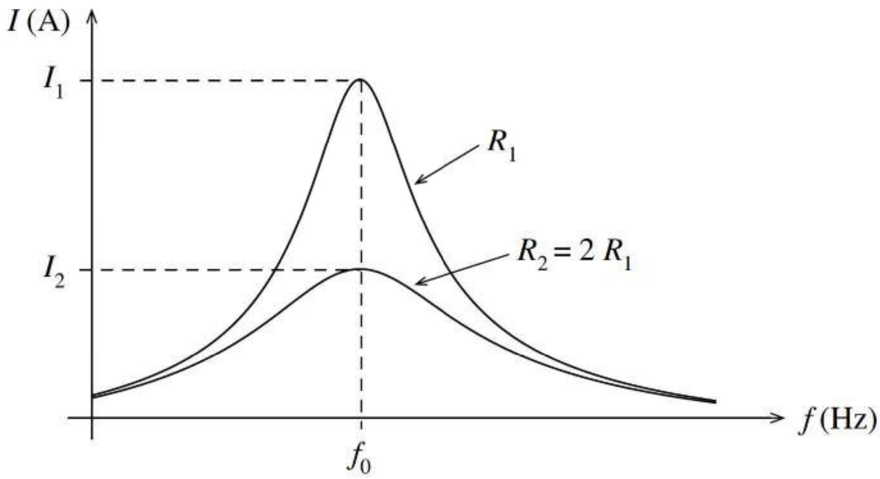


FIGURE 2.24 – Courbe de résonance amplitude en fonction de la fréquence