

Chapitre 2

Probabilités

Sommaire

1. Introduction.....	3
2. Espace fondamental et évènements.....	3
2.1. Définition.....	3
2.2. Evènements remarquables.....	5
2.3. Opérations sur les évènements.....	6
2.3.1. <i>L'intersection de deux évènements</i>	6
2.3.2. <i>La réunion de deux évènements</i>	7
2.3.3. <i>L'inclusion d'un évènement</i>	8
2.4. Système complet d'évènements.....	9
2.5. Espace probabilisable.....	9
3. Probabilités.....	9
3.1. Définitions.....	10
3.1.1. <i>Concept mathématique</i>	10
3.1.2. <i>Probabilités combinatoires</i>	10
3.1.3. <i>Loi des grands nombres</i>	11
3.1.4. <i>Espace probabilisé</i>	12
3.2. Propriétés des probabilités.....	12
3.2.1. <i>Additivité</i>	12
3.2.2. <i>Evènement contraire</i>	13
3.2.3. <i>Evènement impossible</i>	14

3.2.4. Inclusion.....	14
3.3. Indépendance statistique.....	15
3.3.1. Définition.....	15
3.3.2. Propriétés.....	16
3.3.3. Généralisation à n évènements.....	16
4. Probabilités conditionnelles.....	17
4.1. Définition.....	17
4.2. Probabilités composées.....	18
4.3. Probabilités totales.....	20
4.4. Le théorème de Bayes.....	20

1. Introduction

Les premières personnes à s'être intéressées aux problèmes des **probabilités** furent des mathématiciens français, **Blaise Pascal** et **Pierre de Fermat** qui répondaient aux questions soulevées par un adepte des jeux de **hasard**, le **chevalier de Méré**. A cette époque, la théorie des probabilités se développa uniquement en relation avec les jeux de hasard. Mais avec **Pierre Simon Laplace** et **Karl Friedrich Gauss**, les bases de la théorie furent étendues à d'autres applications et phénomènes.

Le calcul des probabilités fournit une modélisation efficace des situations non **déterministes** c'est-à-dire des phénomènes **aléatoires ou stochastiques**. En ce qui concerne les premiers, le résultat d'une expérience suit une loi rigoureuse connue (taux de croissance d'une population bactérienne). On peut donc ainsi prévoir le résultat pour un événement donné. En revanche dans le cas des phénomènes aléatoires, le résultat de l'expérience n'est pas connu avec certitude mais fluctue autour d'un résultat moyen qui est régit par une loi (transmission des caractères selon la loi de Mendel).

Il existe deux manières d'introduire la notion de probabilité :

- La probabilité *a priori*, « **subjective** » d'un événement est un nombre qui caractérise la croyance que l'on a que cet événement est réalisé avec plus ou moins de certitude avant l'exécution de l'expérience : l'événement est réalisé (probabilité 1) et l'événement n'est pas réalisé (probabilité 0).
- La probabilité *empirique* **assimilée à une fréquence** est définie à partir d'expériences indéfiniment renouvelables. La probabilité d'un événement est alors la fréquence d'apparition de cet événement.

Enfin le calcul des probabilités utilise l'**analyse combinatoire** ainsi que la théorie des ensembles.

2. Espace fondamental et événements

La théorie des ensembles qui est succinctement présentée dans ce chapitre constitue un outil puissant dans plusieurs branches des mathématiques, notamment en probabilités.

2.1 Définitions

En face de situations dont **l'issue est incertaine**, on a bien souvent envie d'attribuer à chacune des éventualités possibles une vraisemblance plus ou moins grande. Afin de donner une rigueur mathématique à ce concept, il est nécessaire tout d'abord de donner quelques définitions.

- Une expérience ou une épreuve est qualifiée d'**aléatoire** si on ne peut pas prévoir son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des résultats différents.
- Le résultat d'une expérience noté ω constitue une **éventualité** ou un **événement élémentaire**.

• l'ensemble des événements élémentaires possibles pour une expérience aléatoire donnée constitue l'**espace fondamental** appelé **univers** ou **univers des possibles** noté Ω .

Exemple :

Lors d'un contrôle sanguin, l'ensemble des résultats possibles si l'on s'intéresse

(1) au groupe sanguin et au facteur rhésus d'un individu est

$$\Omega = \{A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-\}$$

(2) au nombre de globules blancs $\Omega = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$

(3) au taux de glycémie $\Omega = [0 ; 15]$ au-delà de 15, l'individu n'est plus en état de subir une prise de sang.

Ainsi pour une même épreuve, l'univers Ω peut être **fini** (toutes les éventualités sont connues : cas 1) ou **infini** (toutes les éventualités ne sont pas connues : cas 2 et 3). Dans ces deux derniers cas, l'univers peut être **dénombrable** si on peut numéroter les éventualités connues (cas 2) ou bien **continu** comme dans le cas du taux de glycémie (cas 3).

Un **événement** quelconque A est un ensemble d'événements élémentaires et constitue **une partie de l'univers** des possibles Ω dont on sait dire à l'issue de l'épreuve s'il est réalisé ou non.

Si $\omega \in A$, alors A est réalisé. Mais si $\omega \notin A$ alors A n'est pas réalisé et c'est \bar{A} , l'**événement contraire** qui est réalisé. Un événement est donc une assertion relative aux résultats d'une expérience.

Il est possible qu'un événement ne soit constitué que d'un seul événement élémentaire. Les événements sont représentés par des lettres majuscules, A, B, C, A_1, A_2 , etc.

Exemple :

Dans l'exemple concernant les groupes sanguins,

- l'événement A « l'individu est de rhésus positif » est représenté par :

$$A = \{A+, B+, AB+, O+\} \quad \text{avec } A \subset \Omega$$

- l'événement B « l'individu est donneur universel » est représenté par :

$$B = \{O-\} \text{ un seul événement élémentaire}$$

Dans le cadre de cet exemple, l'événement A est réalisé si le résultat du typage donne l'un des 4 groupes sanguins $A+, B+, AB+, O+$.

Remarque : Pour ce même exemple, le résultat « la glycémie vaut $\sqrt{2}$ » **ne constitue pas un événement** car il est impossible de savoir s'il est réalisé ou non. Toute partie de Ω n'est pas forcément un événement. Ainsi il faut toujours définir après avoir déterminé l'univers Ω , l'ensemble des événements $\mathcal{E}(\Omega)$.

Si Ω est fini, chaque partie A de l'univers Ω ($A \subset \Omega$) est constituée d'un nombre fini d'éventualités et dans ce cas l'ensemble des évènements est tel que :

$$\varepsilon(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega) \text{ l'univers des possibles}$$

Dans le cadre de ce cours, nous nous placerons dans le cas où l'ensemble des évènements de l'univers Ω est clairement défini.

2.2. Evènements remarquables

L'évènement **impossible** noté \emptyset est l'évènement qui **ne peut être réalisé** quelle que soit l'issue de l'épreuve. Bien que constitué d'aucune éventualité, \emptyset est considéré comme un évènement :

$$\emptyset \in \varepsilon(\Omega)$$

L'évènement **certain**, noté Ω **est toujours réalisé** quelle que soit l'issue de l'épreuve. Il est constitué de toutes les éventualités et l'on impose que ce soit un évènement :

$$\Omega \in \varepsilon(\Omega)$$

L'évènement **contraire** ou complémentaire d'un évènement A , noté \overline{CA} ou \overline{A} **est l'évènement qui est réalisé si et seulement si A ne l'est pas**. Il est donc constitué des évènements élémentaires ω qui ne sont pas dans A .

$$\omega \in \overline{A} \Leftrightarrow \omega \notin A$$

Le complémentaire \overline{CA} ou \overline{A} correspond à la **négation** logique **non** $\neg A$.

Exemple :

Dans l'exemple concernant les groupes sanguins, l'évènement contraire de A « l'individu est de rhésus positif » est constitué des évènements élémentaires suivant :

$$\overline{A} = \{A-, B-, AB-, O-\}$$

Par définition, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{array}{l} \parallel \overline{\overline{A}} = A \\ \parallel \overline{\emptyset} = \Omega \\ \parallel \overline{\Omega} = \emptyset \end{array}$$

2.3. Opérations sur les évènements

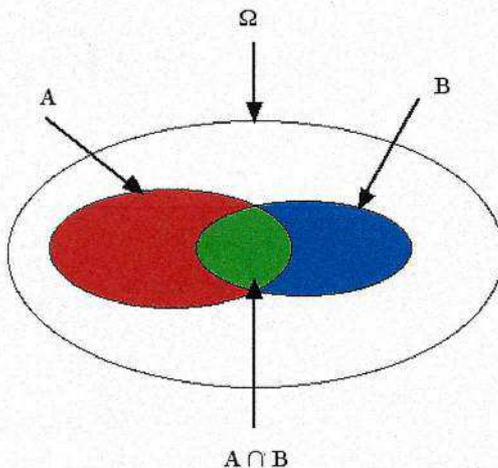
Si l'on considère simultanément la réalisation de deux évènements A et B , il est possible d'effectuer des opérations sur ces ensembles.

2.3.1. L'intersection de deux évènements

On appelle **intersection** de deux évènements A et B , l'évènement qui est réalisé si et seulement si A **et** B le sont. Il est donc constitué des éventualités appartenant à la fois à A **et** B .

C'est un évènement noté $A \cap B$ tel que : $\forall A, B \in \mathcal{E}(\Omega), A \cap B \in \mathcal{E}(\Omega)$
avec $\omega \in A \cap B \Leftrightarrow (\omega \in A \text{ et } \omega \in B)$

L'intersection $A \cap B$ correspond à la *conjonction* logique « A **et** B ».



L'**intersection** des deux évènements A et B figure **en vert** sur le graphe ci-contre.

Remarque : L'univers des possibles Ω n'étant pas limité uniquement aux évènements A (parties **rouge** et **verte**) et B (parties **bleu** et **verte**), l'évènement complémentaire \bar{A} , est formé des parties **bleu** et blanche.

Exemple :

Dans l'exemple concernant les groupes sanguins, si à l'évènement A « l'individu est de rhésus positif », on ajoute l'évènement B « l'individu possède l'allèle B », l'intersection de ces deux évènements donne : $A \cap B = \{B+, AB+\}$

Deux évènements A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**, s'ils ne peuvent être réalisés simultanément. On a alors : $A \cap B = \emptyset$

Quelques propriétés de l'intersection (\cap) :

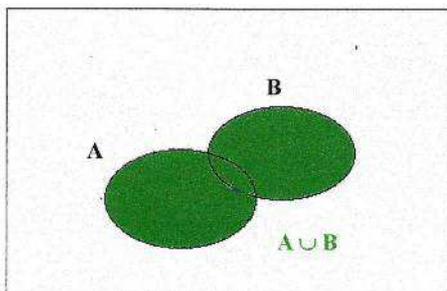
$A \cap \bar{A} = \emptyset$	événements incompatibles
$\Omega \cap A = A$	élément neutre (Ω)
$\emptyset \cap A = \emptyset$	élément absorbant (\emptyset)
$A \cap B = B \cap A$	commutativité
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	associativité
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributivité avec la <u>réunion</u> (\cup)

2.3.2. La réunion de deux événements

On appelle réunion de deux événements A et B , l'événement qui est réalisé si et seulement si A **ou** B est réalisé. Il est donc constitué des éventualités appartenant à A **ou** B .

C'est un événement noté $A \cup B$ tel que : $\forall A, B \in \mathcal{E}(\Omega), A \cup B \in \mathcal{E}(\Omega)$
avec $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow (\omega \in A \text{ ou } \omega \in B)$

La réunion $A \cup B$ correspond à la *disjonction* logique « A **ou** B ».



La réunion des deux événements A et B figure en **vert** sur le graphe ci-contre.

Remarque : La réunion de deux événements n'est pas la somme algébrique des événements dans la mesure où la zone de recouvrement n'est pas comptabilisée deux fois.

Exemple :

Dans l'exemple concernant les groupes sanguins, si à l'événement A « l'individu est de rhésus positif », on ajoute l'événement B « l'individu possède l'allèle B », la réunion de ces deux événements donne :

$$A \cup B = \{A+, B+, B-, AB+, AB-, O+\}$$

Quelques propriétés de la réunion (\cup) :

$A \cup \bar{A} = \Omega$	événements complémentaires
$\emptyset \cup A = A$	élément neutre (\emptyset)
$\Omega \cup A = \Omega$	élément absorbant (Ω)
$A \cup B = B \cup A$	commutativité
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup C$	associativité
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivité avec l' <u>intersection</u> (\cap)

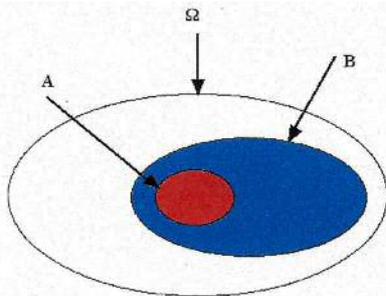
Selon les lois de Morgan, nous avons :

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	ce qui correspond à la partie hachurée sur ce <u>graphe</u> .
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	ce qui correspond à l'ensemble vide \emptyset lorsque l'univers des possibles Ω n'est constitué que des événements A et B (<u>graphe</u>).

2.3.3. L'inclusion d'un événement

Un événement A entraîne un événement B si la réalisation de A implique celle de B . On dit que l'événement A est **inclus** dans l'événement B .

$$A \subset B$$



L'**implication** logique « $A \Rightarrow B$ » se traduit par l'inclusion $A \subset B$.

Exemple de **l'inclusion** de l'événement A en **rouge** dans l'événement B en **bleu**.

Exemple :

Soit une urne contenant des billes rouges unies et des billes vertes unies et striées. Si l'on note A l'événement « obtention d'une bille striée » et B l'événement « obtention d'une bille verte », la réalisation de A implique la réalisation de B car A est inclus dans B .

2.4. Système complet d'évènements

A_1, A_2, \dots, A_n forment un système complet d'évènements si les **parties** A_1, A_2, \dots, A_n de Ω constituent une **partition** de Ω telle que :

$$\begin{aligned} \forall i \quad A_i &\neq \emptyset \\ \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j &= \emptyset \\ \bigcup_i A_i &= \Omega \end{aligned}$$

Un **système complet d'évènements** est formé de toutes les parties de Ω , c'est-à-dire des familles d'évènements **2 à 2 incompatibles** dont la réunion constitue l'évènement certain Ω .

Le nombre de partitions possibles dans un ensemble fini de n évènements est :

$$\text{si Card}(\Omega) = n \quad \text{alors} \quad \text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n \quad \text{Illustration}$$

2.5. Espace probabilisable

Supposons que l'ensemble des évènements constitue une classe \mathcal{C} de $\mathcal{P}(\Omega)$, telle que :

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

On appelle **espace probabilisable** (Ω, \mathcal{C}) , un objet formé de deux éléments :

- un espace d'éventualités Ω

3.□□ un espace d'évènements $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

avec :

$$(P_1) \quad A \in \mathcal{C} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{C}$$

$$(P_2) \quad A_i \in \mathcal{C} \ (\forall i \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{C}$$

$$(P_3) \quad \Omega \in \mathcal{C}$$

Ces trois axiomes ou propriétés suffisent à définir un espace probabilisable et on pourrait montrer qu'il implique que $\emptyset \in \mathcal{C}$ et $\bigcap_i A_i \in \mathcal{C}$

3. Probabilités

Le passage d'une description de type ensembliste des phénomènes aléatoires à l'élaboration d'un véritable **modèle mathématique** se fait en introduisant les mesures de probabilité.

3.1 Définitions

3.1.1 Concept mathématique

On appelle **probabilité** P toute **application** de l'ensemble des évènements Ω dans l'intervalle $[0,1]$, tel que : $P : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$

$$A \mapsto P(A)$$

satisfaisant les propriétés (ou axiomes) suivantes :

$$(P_1) \quad \forall A \in \mathcal{E}(\Omega) \quad P(A) \geq 0$$

$$(P_2) \quad P(\Omega) = 1$$

$$(P_3) \quad \forall A, B \in \mathcal{E}(\Omega) \text{ si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Remarque : Le concept mathématique de **probabilité** modélise les notions intuitives de **proportion** et de **fréquence**. Si l'on avance que la probabilité d'être immunisé contre la tuberculose est de 0,8, on modélise le fait qu'environ 80 % de la population est immunisé contre la tuberculose.

3.1.2. Probabilités combinatoires

Soit Ω un espace fondamental fini constitué de N **évènements élémentaires** sur lequel on fait l'hypothèse d'**équiprobabilité** de réalisation des N évènements élémentaires. On suppose ainsi que tous les évènements élémentaires ont « la même chance » de se réaliser. Dans ce cas la probabilité p_i d'un évènement élémentaire quelconque ω_i est telle que :

$$p_i = \frac{1}{N} \text{ avec } p_i = P(\omega_i)$$

satisfaisant $\left\| \begin{array}{l} (P_1) \quad \text{avec } \forall i \quad p_i \geq 0 \\ (P_2) \quad \sum_i p_i = 1 \end{array} \right.$

Soit A un évènement quelconque constitué de k **évènements élémentaires** de Ω , on en déduit :

$$P(A) = \frac{k}{N} \text{ avec } P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Cette formule s'énonce souvent comme :

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Cette formule permet de ramener les calculs de probabilités à des décomptes d'événements élémentaires effectués par des techniques d'analyse combinatoire qui ne sont pas des probabilités.

Exemples :

(1) En tapant 5 lettres au hasard sur une machine à écrire (possibilité de taper plusieurs fois sur la même touche), la probabilité d'obtenir le mot « lutte » est d'**une chance sur 12 millions**. En effet il y a exactement 11 881 376 mots de 5 lettres possibles (Voir Arrangement avec répétition).

(2) La probabilité d'obtenir un multiple de trois lors du lancé d'un dé à 6 faces, non pipé est : $A = \{3,6\}$ d'où $P(A) = 2/6 = 1/3$ avec $k=2$ et $p_i=1/6$

3.1.3. Loi des grands nombres

Si l'on répète N fois une expérience dans laquelle la probabilité d'apparition d'un événement A est P , la fréquence de cet événement au cours des N expériences, $\frac{k}{N}$ tend vers P lorsque N tend vers l'infini.
$$N \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{k}{N} \rightarrow P$$

Lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment, les fréquences observées tendent vers les probabilités et les distributions observées vers les lois de probabilité.

Exemple :

Lors d'un croisement entre plantes hétérozygotes Aa pour un caractère à dominance stricte (allèle A , forme sauvage et allèle a , forme mutée), on examine successivement deux échantillons de plantes résultant de ce croisement.

	N=40 fleurs		N=1000 fleurs		Probabilités attendues
	Effectifs	Fréquences	Effectifs	Fréquences	
Phénotype sauvage	29	0,725	754	0,754	0,750
Phénotype mutant	11	0,275	246	0,246	0,25

Il est aisé de vérifier que les fréquences pour les deux phénotypes possibles sont plus proches des probabilités attendues sous le modèle de croisement mendélien pour l'échantillon de très grande taille. L'écart entre les fréquences observées et les probabilités attendues peut être testé à l'aide du test du khi-deux.

3.1.4. Espace probabilisé

Nous définirons un **espace probabilisé** en utilisant l'axiomatique de Kolmogorov,

Définition 1 :

On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{C}) une application P de \mathcal{C} dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles 2 à 2, on a :

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Définition 2 :

On appelle **espace probabilisé**, le triplet (Ω, \mathcal{C}, P)

Ainsi un espace probabilisé désigne un espace fondamental et ses événements, muni d'une mesure de probabilités.

3.2 Propriétés des probabilités

Des axiomes précédents découlent les propriétés **additives** des probabilités, d'usage permanent.

3.2.1. Additivité

- **Cas d'événements incompatibles**

Si $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ sont n événements **incompatibles deux à deux**

$(A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j)$ alors : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_n) =$

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_i) + \dots + P(A_n)$$

La probabilité de la **réunion** d'un ensemble fini ou dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles est égale à la somme de leur probabilité d'où :

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

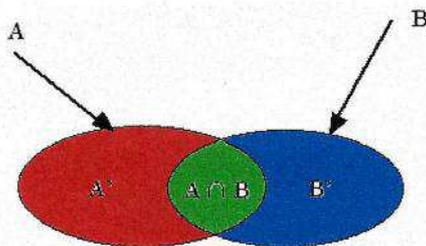
• **Cas de deux évènements quelconques**

Si A et B sont deux évènements quelconques, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Voici pourquoi :

A et B étant deux évènements quelconques, $(A \cap B) \neq \emptyset$, ces évènements peuvent se décomposer comme la réunion de deux évènements incompatibles :



Alors :

1. $A = A' \cup (A \cap B)$ avec $A' \cap (A \cap B) = \emptyset$

alors $P(A) = P(A') + P(A \cap B)$

et $P(A') = P(A) - P(A \cap B)$

2. $B = B' \cup (A \cap B)$ avec $B' \cap (A \cap B) = \emptyset$

d'où $P(B') = P(B) - P(A \cap B)$

3. $P(A \cup B) = P(A') + P(A \cap B) + P(B')$

d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple :

Dans l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces, non pipé, on considère l'évènement A « le résultat est pair » et l'évènement B « le résultat est un multiple de trois ».

On a alors :

$A = \{2,4,6\}$ et $B = \{3,6\}$ donc $A \cup B = \{2,3,4,6\}$ et $A \cap B = \{6\}$

avec $P(A) = 3/6$ $P(B) = 2/6$ $P(A \cup B) = 4/6$ $P(A \cap B) = 1/6$

on vérifie alors que : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6$

3.2.2 Evènement contraire

Si A est un évènement quelconque, alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Voici pourquoi :

Nous avons vu précédemment que

$A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ Propriétés de la **réunion** et de l'**intersection**

$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ Propriétés d'additivité des probabilités

d'où $P(\Omega) = 1 = P(A) + P(\bar{A})$ ainsi $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple :

La probabilité lors du lancer d'un dé non pipé d'obtenir « plus de 2 » se traduit par

$A = \{3,4,5,6\}$ et $\bar{A} = \{1,2\}$ d'où $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 2/6 = 4/6 = 2/3$

Remarque : L'application de cette propriété est très utile lorsque le nombre d'évènements élémentaires de A , k , est important et que le calcul des probabilités p_i est fastidieux (cas de la **loi de Poisson**).

3.2.3 Evènement impossible

$$P(\emptyset) = 0$$

Voici pourquoi :

Nous avons vu précédemment que

$\emptyset \cup \Omega = \Omega$ **élément neutre**

$P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$ Propriétés d'additivité des probabilités

d'où $P(\Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$ ainsi $P(\emptyset) = 0$

3.2.4 Inclusion

$$\text{Si } A \subset B \text{ alors } P(A) \leq P(B)$$

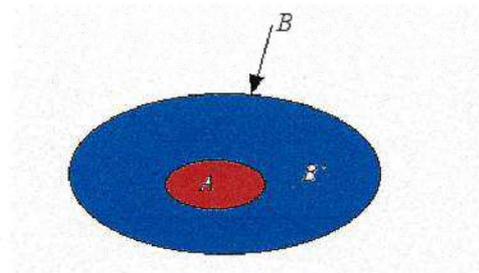
Voici pourquoi :

si $B = B' \cup A$ avec $B' \cap A = \emptyset$

alors $P(B) = P(B' \cup A) = P(B') + P(A)$

d'où $P(A) \leq P(B)$

avec $P(A) = P(B)$ lorsque $P(B') = 0$



3.3 Indépendance statistique

3.3.1 Définition

L'hypothèse d'**indépendance** entre évènements et plus généralement entre épreuves successives est un préalable lors de l'établissement des lois de probabilités

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si l'on a :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Ainsi si A et B sont deux évènements **statistiquement indépendants**, la probabilité de la réalisation conjointe de ces deux évènements est le produit de leur probabilité respective.

Remarque : Il ne faut pas confondre évènements **indépendants** et évènements **incompatibles**.

Supposons A et B à la fois indépendants et incompatibles. On a alors :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) && \text{indépendants} \\ P(A \cap B) &= P(\emptyset) = 0 && \text{incompatibles} \\ &\text{d'où nécessairement } P(A) = 0 \text{ ou } P(B) = 0 \end{aligned}$$

Exemples :

(1) Dans l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces, non pipé, les deux évènements : A « le résultat est pair » et B « le résultat est un multiple de trois » sont **statistiquement indépendants**.

En effet, soit $A = \{2,4,6\}$ $B = \{3,6\}$ $A \cap B = \{6\}$

ainsi $P(A) = 3/6$ $P(B) = 2/6$ $P(A \cap B) = 1/6$

on vérifie alors que : $P(A \cap B) = P(A) P(B) = 3/6 \times 2/6 = 6/36 = 1/6$

(2) Si l'on considère une famille de deux enfants, les deux évènements : A « enfants de sexe différent » et B « au plus une fille » **ne sont pas statistiquement indépendants**.

En effet, l'espace probabilisé Ω , contient 4 évènements élémentaires (si l'on considère une famille ordonnée),

$$\Omega = A \cup B = \{GG, GF, FG, FF\}$$

$$\text{avec } A = \{GF, FG\}, \quad B = \{GG, GF, FG\} \text{ et } A \cap B = \{GF, FG\}$$

d'où sous l'hypothèse d'équiprobabilité : $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$ et $P(A \cap B) = 1/2$

On vérifie alors que : $P(A \cap B) \neq P(A) P(B) = 1/2 \times 3/4 = 3/8 \neq 1/2$

3.3.2 Propriétés

Les propriétés associées à l'indépendance sont :

(1) si A est un évènement **quelconque**,

A et Ω sont indépendants : $A \cap \Omega = A$ **élément neutre**

$$P(A \cap \Omega) = P(A)P(\Omega) = P(A) \quad \text{car } P(\Omega) = 1$$

A et \emptyset sont indépendants : $A \cap \emptyset = \emptyset$ **élément absorbant**

$$P(A \cap \emptyset) = P(A)P(\emptyset) = P(\emptyset) \quad \text{car } P(\emptyset) = 0$$

(2) si A et B sont deux évènements **quelconques**,

A et B sont indépendants si et seulement si A et \bar{B} (\bar{A} et B) ou sont indépendants

A et B sont indépendants si et seulement si \bar{A} et \bar{B} le sont.

3.3.3 Généralisation à n évènements

n évènements ($n \geq 2$), $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ sont dit **indépendants** dans leur ensemble (ou mutuellement indépendants) si on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_i) \times \dots \times P(A_n)$$

$$P\left(\bigcap_i A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Remarque : n évènements peuvent être indépendants deux à deux,

$[P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)]$ avec $i \neq j$ sans être indépendants au sens de la définition ci-dessus.

Exemple :

On jette deux dés non pipés et on considère les évènements suivants :

A_1 « le premier dé donne un nombre pair »

A_2 « le deuxième dé donne un nombre pair »

A_3 « la somme des deux lancers est paire »

Le nombre d'évènements élémentaires est :

$\text{card}(\Omega) = 36$ (voir **arrangements avec répétitions** avec $p = 2$ et $n = 6$)

Les 3 évènements A_1 , A_2 et A_3 sont 2 à 2 indépendants mais ne sont pas indépendants dans leur ensemble. En effet :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les probabilités associées aux 3 évènements sont :

$$P(A_1) = 1/2 ; P(A_2) = 1/2 ; P(A_3) = 1/2$$

$$P(A_1 \cap A_2) = 9/36 = 1/4 = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = 9/36 = 1/4 = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = 9/36 = 1/4 = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 9/36 = 1/4$$

$$\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1/8$$

Les cases grisées représentent les évènements élémentaires réalisés dans le cadre soit $A_1 \cap A_2$ ou $A_1 \cap A_3$ ou $A_2 \cap A_3$ ou $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

4. Probabilités conditionnelles

4.1. Définition

Soit deux évènements A et B d'un espace probabilisé Ω avec $P(B) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de l'évènement « A si B » (ou « A sachant B »), le quotient

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ notée } P_B(A)$$

On définit ainsi une probabilité sur Ω au sens de la **définition** donnée précédemment.

Théorème :

Soit B un évènement de probabilité non nulle, alors :

$$P_B : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ est une probabilité sur } \Omega$$

Voici pourquoi :

(P₁) $\forall A \in \mathcal{E}(\Omega) \quad P(A/B) \geq 0$ (quotient de deux réels positifs)

(P₂) $P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ car $\Omega \cap B = B$ car Ω **élément neutre**

(P₃) si $(A_1 \cap A_2) = \emptyset$, $P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} =$
 $\frac{P[(A_1 \cap B) + (A_2 \cap B)]}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$ **additivité**

Remarque : La probabilité $P(A)$ est appelée la probabilité *a priori* et $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ la probabilité *a posteriori* car sa réalisation dépend de la réalisation de B .

On observe les relations suivantes :

$$\left\| \begin{array}{l} P(A/A) = 1 \\ \text{Si } B \subset A, \text{ alors } A \cap B = B \text{ et donc } P(B/A) = \frac{P(B)}{P(A)} \end{array} \right.$$

Exemple :

Soit un croisement entre hétérozygotes Aa pour un caractère à dominance stricte, quelle est la probabilité d'obtenir à la génération suivante parmi les individus de phénotype A , un individu homozygote ?

L'ensemble des événements élémentaires est : $\Omega = \{AA, Aa, aA, aa\}$

Si h = homozygote et \bar{h} = hétérozygote

$$P(h/A) = \frac{P(h \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3 \quad \text{probabilité a posteriori}$$

La probabilité *a priori* d'obtenir un homozygote est $1/4$.

4.2. Probabilités composées

Théorème :

Soit deux événements A et B d'un espace probabilisé Ω . Alors,

$$P(A \cap B) = P(B/A) P(A) = P(A/B) P(B) \quad \text{Formule des probabilités composées}$$

Voici pourquoi :

Par définition, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ d'où $P(A \cap B) = P(A/B) P(B)$

Par symétrie, $P(A \cap B) = P(A/B) P(B) = P(B/A) P(A)$

Si A et B sont deux évènements **indépendants** et que $P(B) \neq 0$ alors ceci équivaut à affirmer que $P_B(A) = P(A/B) = P(A)$.

Lorsque deux évènements sont **indépendants**, le fait que l'un des évènements soit réalisé, n'apporte aucune information sur la réalisation de l'autre. Dans ce cas la probabilité conditionnelle $P_B(A)$ (*a posteriori*) est égale à la probabilité $P(A)$ (*a priori*).

Voici pourquoi :

La formule des probabilités composées donne $P(A \cap B) = P(A/B) P(B)$.

L'indépendance statistique entre A et B équivaut à $P(A \cap B) = P(A) P(B)$
d'où la relation $P(A/B) = P(A)$

Si A et B sont deux évènements **indépendants** alors ceci équivaut à affirmer que $P_B(A) = P_{\bar{B}}(A) = P(A)$.

Lorsque deux évènements sont **indépendants**, la probabilité conditionnelle de A est la même que ce soit B ou \bar{B} qui est réalisé

Exemple :

Dans l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces, non pipé, les deux évènements : A « le résultat est pair » et B « le résultat est un multiple de trois » sont **indépendants** (**voir exemple**).

Ainsi la probabilité que la face soit paire sachant que c'est un multiple de 3 est :

si $A = \{2,4,6\}$ $B = \{3,6\}$ $A \cap B = \{6\}$

et $P(A) = 3/6$ $P(B) = 2/6$ $P(A \cap B) = 1/6$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/3} = 1/2 = P(A)$ d'où la relation $P(A/B) = P(A)$

4.3. Probabilités totales

Théorème :

Si $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$ est un **système complet d'évènements**, quel que soit l'évènement B , alors :

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \dots + P(B/A_n)P(A_n)$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i)P(A_i) \quad \text{Formule des probabilités totales}$$

Voici pourquoi :

Si $i \neq j$, alors $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = (A_i \cap A_j) \cap B = \emptyset$

Grâce à la **distributivité**, on a :

$$(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B = \Omega \cap B = B$$

Grâce à l'**additivité**, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Grâce à la formule des **probabilités composées**, on a :

$$P(A_i \cap B) = P(B/A_i)P(A_i)$$

d'où $P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \dots + P(B/A_n)P(A_n)$

Exemple :

Une population animale comporte 1/3 de mâles et 2/3 de femelles. L'albinisme frappe 6 % des mâles et 0,36 % des femelles. La probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos est :

Si $A = \{\text{mâle}\}$ et $\bar{A} = \{\text{femelle}\}$ constitue un système complet d'évènements

$B = \{\text{albinos}\}$ et $\bar{B} = \{\text{non albinos}\}$

sachant que $P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})$

alors $P(B) = (0,06 \times 1/3) + (0,0036 \times 2/3) = \mathbf{0,0224}$
soit **2,24% d'albinos** dans cette population.

4.4. Le théorème de **Bayes**

Un corollaire au théorème des probabilités totales est connu sous le nom de **formule de Bayes**.

Théorème :

Si $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$ est un **système complet d'évènements**, et quel que soit l'évènement B tel que $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i)P(A_i)}{P(B / A_1)P(A_1) + \dots + P(B / A_i)P(A_i) + \dots + P(B / A_n)P(A_n)}$$
$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B / A_i)P(A_i)} \quad \text{Formule de Bayes}$$

Voici pourquoi :

D'après la formule des **probabilités composées**,

$$P(A_i \cap B) = P(A_i / B)P(B) = P(B / A_i)P(A_i)$$

D'après la formule des **probabilités totales**,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B / A_i)P(A_i)$$

D'après la formule des **probabilités conditionnelles**

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{d'où } P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B / A_i)P(A_i)}$$

Remarque : La formule de Bayes est utilisée de façon classique pour calculer des **probabilités de causes** dans des diagnostics (maladies, pannes, etc.). L'application du théorème de Bayes est à la base de toute une branche de la statistique appelée **statistique bayésienne**.

Exemple :

Dans une population pour laquelle 1 habitant sur 100 est atteint d'une maladie génétique A , on a mis au point un test de dépistage. Le résultat du test est soit positif (T) soit négatif (\bar{T}). On sait que : $P(T / A) = 0,8$ et $P(\bar{T} / \bar{A}) = 0,9$

On soumet un patient au test. Celui-ci est positif. Quelle est la probabilité que ce patient soit atteint de la maladie A soit $P_T(A)$ ou $P(A/T)$?

D'après la formule de Bayes :

$$P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T / A)P(A)}{P(T / A)P(A) + P(T / \bar{A})P(\bar{A})}$$

$$\text{d'où } P(A/T) = \frac{0,01 \times 0,8}{0,8 \times 0,01 + 0,1 \times 0,99} = \mathbf{0,075}$$

Ainsi **avant le test**, la probabilité d'**être malade** était de $P(A) = \mathbf{0,01}$ (probabilité *a priori*)

et **après le test** la probabilité d'**être malade** est de $P(A/T) = 0,075$ (probabilité *a posteriori*).
Ainsi le test apporte un supplément d'information.