Chapitre 2

Suites réelles et séries numériques

2.1 Suites réelles

2.1.1 Définitions

Définition 2.1 (Suite). Une **suite réelle** est une suite

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots$$

de nombres réels, l'indice parcourant tous les nombres entiers. Ce n'est donc rien d'autre qu'une fonction

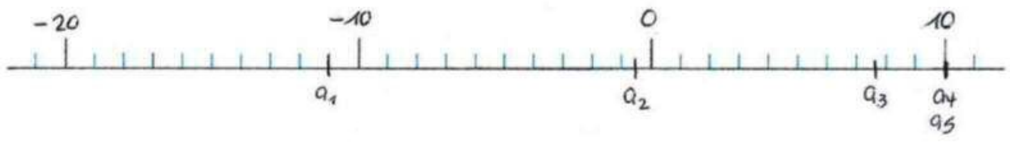
$$a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

où l'on note a_n plutôt que $a(n)$. L'élément a_n est appelé le *terme général* de la suite qui est défini en fonction de n.
La suite, c'est-à-dire l'ensemble de tous les termes, est notée $\{a_n\}$.

Exemple 2.2.

1. La formule
$$a_n = \frac{9n-20}{n^2}$$
définit une suite dont les premiers termes sont
$$a_1 = -11, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{7}{9}, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 1, \dots$$

On peut reporter les valeurs a_n sur la droite réelle. Les points obtenus sont appelés les points ou les nombres de la suite.



Définition 2.3.

1. Une suite est *constante* si le terme général ne dépend pas de n.
Par exemple la suite définie par $a_n = \sqrt{3}$ est constante.
2. Une suite $\{a_n\}$ est *bornée* si tous les points de la suite se situe dans un intervalle $[-M; M]$ pour un $M \in \mathbb{R}_+$. Autrement dit si $|a_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Exemple : La suite définie par $a_n = \frac{1}{n}$ est bornée car $|a_n| \leqslant 1$.

3. Une suite $\{a_n\}$ est <u>*croissante*</u> (resp. *décroissante*) si **à partir d'un indice** $n \geqslant N$, on a toujours
$$a_{n+1} \geqslant a_n \qquad (\text{resp. } a_{n+1} \leqslant a_n)$$
Exemple : reprenons l'exemple ci-dessus
$$a_n = \frac{9n-20}{n^2}.$$
Alors
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{9(n+1)-20}{(n+1)^2} - \frac{9n-20}{n^2} \\ &= \frac{9n^3+9n^2-20n^2-9n^3-18n^2-9n+20n^2+40n+20}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{-9n^2+31n+20}{n^2(n+1)^2} \\ &= -\frac{(n-4)(9n+5)}{n^2(n+1)^2} < 0 \qquad \text{pour tout } n \geqslant 5. \end{aligned}$$
La suite est donc *strictement* décroissante.
4. On dira "**presque tous** les points d'une suite" = "**tous** les points **sauf un nombre fini**." = "**tous** les points à partir d'un certain indice".
C'est plus fort qu'une "infinité de points" ! !
Exemples :
1) $a_n = 5 + \dfrac{1000}{n}$: presque tous les points sont < 6.
2) $a_n = \sqrt{n}$: alors presque tous les points sont $\geqslant 10^{25}$.
3) $a_n = \dfrac{n}{1253}$: on ne peut pas dire "presque tous les points sont non entiers" car il y a une infinité de n pour lesquels $a_n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Convergence d'une suite

Définition 2.4 (Voisinage)**.** Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel et $a \in \mathbb{R}$. Alors l'intervalle
$$]a-\epsilon; a+\epsilon[$$
est appelé un ϵ-voisinage de a et est noté $v_\epsilon(a)$. C'est donc l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x-a| < \epsilon$.

Définition 2.5 (<u>suite convergente</u>)**.** On dit qu'une suite $\{a_n\}$ **converge vers** a si tout ϵ-voisinage de a contient presque tous les points de la suite.
Autrement dit, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N = N_\epsilon$ dépendant de ϵ, tel que
$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \forall n > N_\epsilon.$$
On note alors
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Exemples 2.6.

1) La suite définie par $a_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0. En effet

$$|a_n - 0| < \epsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}.$$

On choisit donc $N_\epsilon = \mathrm{E}(\frac{1}{\epsilon})$ et on est assuré que dès que $n > N_\epsilon$, alors $|a_n| < \epsilon$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Remarque 2.7. Pour tout nombre réel r, $E(r)$ désigne <u>**la partie entière**</u> de r, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à r. Exemple : $E(17.432) = 17$.

2) $a_n = \dfrac{9n-20}{n^2}$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
DÉMONSTRATION : Soit $\epsilon > 0$. Alors

$$|a_n - 0| = \left|\frac{9n-20}{n^2}\right| < \frac{9n}{n^2} = \frac{9}{n} < \epsilon$$

dès que $n > \frac{9}{\epsilon}$. Il suffit donc de prendre

$$N_\epsilon = E\left(\frac{9}{\epsilon}\right) + 1.$$

3) Soit $a_n = q^n$ avec $|q| < 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

DÉMONSTRATION : On utilise l'inégalité de Bernoulli :

$$\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;\infty[.}$$

DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ DE BERNOULLI : On procède par récurrence.

1) Si $n = 0$, on a bien $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \cdot x = 1$.
2) Supposons que $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ et montrons l'inégalité pour $n+1$.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

□

Revenons à la suite $a_n = q^n$:
Si $q = 0$, on a $a_n = 0$ pour tout n et la suite converge donc vers 0.
Si $q \neq 0$, on écrit $|q| = \frac{1}{1+h}$ avec $h > 0$. Alors

$$|a_n| = |(\frac{1}{1+h})^n| = \frac{1}{(1+h)^n} \leqslant \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

Donc $|a_n| < \epsilon$ dès que $nh > \frac{1}{\epsilon}$ i.e. dès que $n > \frac{1}{\epsilon h}$. On pose donc $N_\epsilon = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\epsilon h}\right)$. □

4) Montrons que si la suite $\{a_n\}$ $(a_n > 0)$ converge vers a, alors $\{\sqrt{a_n}\}$ converge vers $\sqrt{a}$. On peut supposer $a \neq 0$. On a $(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}) = a_n - a$ ce qui donne

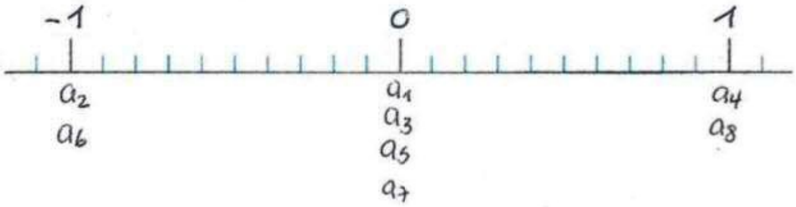
$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\epsilon'}{\sqrt{a}} = \epsilon.$$

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Exemples 2.8.

1) $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$. On a

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = -1, \quad a_7 = 0, \ldots$$



Il y a une infinité de points en -1 mais aussi en 0 et en 1. Il n'y a donc pas "presque tous les points en -1".

2) Soit
$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} = (-1)^n \frac{n+1-1}{n+1} = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$
Si n est pair, on est dans le voisinage de 1. Sinon, la suite est dans le voisinage de -1. Pas de limite. Les points 1 et -1 sont des **points d'accumulation**.

Définition 2.9 (Points d'accumulation)**.** Un point a de la droite réelle est un *point d'accumulation* de la suite $\{a_n\}$ si tout ϵ-voisinage de a contient une infinité de points de la suite.

Exemples 2.10.
Dans l'exemple 1) ci-dessus, les points -1, 0 et 1 sont des points d'accumulation.
Dans l'exemple 2) -1 et 1 le sont.

ATTENTION : contenir une infinité de points $\neq$ contenir presque tous les points (+ fort)

Limite impropre

Considérons la suite
$$a_n = \frac{n^2+1}{n+1}.$$
Après division euclidienne, on obtient que
$$a_n = n - 1 + \frac{2}{n+1}.$$
Ainsi les a_n deviennent aussi grands que l'on veut lorsque n augmente. On dit que a_n tend vers l'infini.

Définition 2.11. La suite $\{a_n\}$ **tend vers l'infini** si pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $N_r \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $a_n > r$ dès que $n > N_r$ (presque tous les points de la suite sont à droite de r). On note alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

On a une définition analogue pour la limite vers $-\infty$.

Exemple 2.12. $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$. Cette suite ne converge pas, même pas vers l'infini.

2.1.3 Propriétés de convergence des suites

(I) Toute suite convergente est bornée. En d'autres termes, si $\{a_n\} \longrightarrow a$, alors $|a_n| \leqslant M$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$.

(II) Une suite convergente n'a qu'**un seul point d'accumulation**.

(III) Si $\{a_n\} \longrightarrow a$ et $\{b_n\} \longrightarrow b$, alors

$$\{\alpha a_n + \beta b_n\} \longrightarrow \alpha a + \beta b \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(IV) Si $\{a_n\} \longrightarrow a$ et $\{b_n\} \longrightarrow b$, alors $\{a_n b_n\} \longrightarrow ab$. Autrement dit

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

si ces limites existent.

DÉMONSTRATION :

Par (I), il existe M tel que $|a_n| < M$ et $|b_n| < M$.
Soit $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2M}$. Par hypothèse,

$$|a_n - a| < \epsilon' \quad \text{pour } n > N_1(\epsilon') \qquad \textit{et} \qquad |b_n - b| < \epsilon' \quad \text{pour } n > N_2(\epsilon').$$

Posons $N = \max(N_1; N_2)$. Alors, pour tout $n > N$, on a

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leqslant |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| \\ &\leqslant |M| \cdot (|b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\leqslant M\epsilon' + M\epsilon' = 2M\epsilon' = \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite $a_n b_n$ converge vers ab. □

Exemple 1 : soit $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemple 2 : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$.
En effet,

$$\sqrt[n]{n^p} = \underbrace{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdots\sqrt[n]{n}}_{p \text{ fois}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^p = 1^p = 1.$$

(V) Si $\{a_n\} \longrightarrow a$ et $\{b_n\} \longrightarrow b$ avec $b_n \neq 0 \neq b$ alors

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow \frac{a}{b}.$$

Exemple : $a_n = \dfrac{(3n+2)(n+3)}{n^2+n+1}$. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$? $(= \frac{\infty}{\infty})$. On a

$$a_n = \frac{3n^2+11n+6}{n^2+n+1} = \frac{n^2(3+\frac{11}{n}+\frac{6}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{3+\frac{11}{n}+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{1} = 3.$$

(VI) Toute suite **monotone** et **bornée** est convergente
Si elle est croissante, elle converge vers $a = \sup\limits_n a_n$.
Si elle est décroissante, elle converge vers $a = \inf\limits_n a_n$.

DÉMONSTRATION : Faisons la preuve pour $\{a_n\}$ bornée et croissante :

$\{a_n\}$ bornée implique $|a_n| \leqslant M$.

$$\Longrightarrow a = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \quad \text{existe} \qquad \text{(cf. chapitre 1)}$$
$$\text{avec } a_n \leqslant a \qquad \text{pour tout } n$$
$$\text{et il existe } n' \text{ avec } a_{n'} > a - \epsilon.$$

Mais $\{a_n\}$ est croissante. Donc

$$\Longrightarrow \forall n > n' \qquad a_n \geqslant a_{n'} > a - \epsilon$$
$$\Longrightarrow a - \epsilon < a_n \leqslant a < a + \epsilon$$
$$\Longrightarrow |a_n - a| < \epsilon \qquad \forall n > n' =: N_\epsilon$$
$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}.}$$

(VII) Soit $\{a_n\}$ une suite <u>bornée</u> et $\{b_n\}$ une suite <u>convergeant vers 0</u>.
Alors la suite $\{a_n b_n\}$ converge vers 0.
Exemple : $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot \sin n$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Théorème 2.13 (Théorème des gendarmes pour les suites). *Soient $\{a_n\}$, $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ trois suites satisfaisant les 2 propriétés suivantes :*

(i) il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ avec $u_n \leqslant a_n \leqslant v_n$ pour tout $n > N_0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = L$.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

DÉMONSTRATION : Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $-\epsilon < u_n - L < \epsilon$ pour tout $n > N_1$. De même, il existe $N_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $-\epsilon < v_n - L < \epsilon$ pour tout $n > N_2$. Alors si $N(\epsilon) = \max(N_0, N_1, N_2)$, on a pour tout $n > N$

$$-\epsilon < u_n - L \leqslant a_n - L \leqslant v_n - L < \epsilon$$

ce qui donne $|a_n - L| < \epsilon$ pour tout $n > N(\epsilon)$.

Exemple 2.14. soit $a_n = \sqrt[n]{n}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

DÉMONSTRATION :

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n} \geqslant \sqrt{n} \geqslant 1.$$

Donc

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \geqslant n \geqslant 1$$

ce qui implique, en prenant la racine n-ième :

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \geqslant \sqrt[n]{n} \geqslant 1$$

Par le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Théorème 2.15 (Critère de d'Alembert). *Soit $\{a_n\}$ une suite réelle telle que $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe. Alors*

1. si $l < 1$, la suite $\{a_n\}$ converge vers 0 ;

2. si $l > 1$, la suite $\{a_n\}$ diverge.

DÉMONSTRATION :
1. Par hypothèse, à partir d'un certain indice N, on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \rho < 1$. Donc

$$|a_{n+1}| \leqslant \rho \cdot |a_n|$$

Par récurrence, ceci implique que

$$0 \leqslant |a_{N+n}| \leqslant \rho^n \cdot |a_N|.$$

Comme $\rho < 1$ la suite ρ^n converge vers 0 (exemple ci-dessus). Le théorème des gendarmes implique que

$$\lim_{n\to\infty} |a_{N+n}| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. A partir d'un certain indice N, on a

$$|a_{n+1}| \geqslant \rho \cdot |a_n|$$

avec $\rho > 1$. Donc on a, par récurrence, $|a_{N+n}| \geqslant \rho^n \cdot |a_N|$.
Ceci montre que a_{N+n} n'est pas majorée. La suite $\{|a_n|\}$ diverge donc et à fortiori la suite $\{a_n\}$ aussi.

□

Exemple 2.16. Considérons la suite $a_n = \dfrac{1000^n}{n!}$. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{1000^n} = \frac{1000}{n+1}$$

qui converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. Donc $l = 0$. Le critère de d'Alembert implique que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.1.4 Sous-suites et points d'accumulation

Définition 2.17 (Sous-suite)**.** Soit $\{a_n\}$ une suite réelle et $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers. Alors $\{a_{n_k}\}$ est une **sous-suite** de $\{a_n\}$.

On a alors la reformulation suivante :

Un point d'accumulation = la limite d'une sous-suite convergente

Exemple 2.18.
Reprenons la suite $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.
Déjà vu : 2 points d'accumulation qui sont -1 et 1.
Sous-suite d'indice pairs : $a_{2k} = (-1)^{2k}\dfrac{2k}{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1$
Sous-suite d'indice impairs : $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1}\dfrac{2k-1}{2k} = -\dfrac{2k-1}{2k} \xrightarrow{k\to\infty} -1$

2.1.5 Suites de Cauchy

Définition 2.19. Une suite $\{a_n\}$ est une *suite de Cauchy* si $\forall\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|a_n - a_m| < \epsilon \qquad \forall\, n, m > N_\epsilon$$

Théorème 2.20. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Sans démonstration.

La réciproque est vraie dans $\mathbb{R}$: toute suite de Cauchy est convergente. On dit alors que $\mathbb{R}$ est **complet**.

C'est une propriété fondamentale des nombres réels que ne possède pas $\mathbb{Q}$: on peut trouver une suite $\{q_n\}$ de nombres rationnels qui soit une suite de Cauchy mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (mais bien dans $\mathbb{R}$) (cf. exemple 2.24).

2.2 Suites récurrentes

Définition 2.21. Une suite est dite récurrente si a_{n+1} est définie à partir de a_n, c'est-à-dire si

$$\boxed{a_{n+1} = g(a_n).}$$

Exemple 2.22. $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n}$. Alors

$$a_2 = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{2\cdot 4/3}{1+4/3} = \frac{8}{7} \qquad a_4 = \frac{16}{15}, \quad etc...$$

2.2.1 Méthodes pour trouver la limite d'une suite récurrente

1ère méthode

On essaie de se ramener à une suite non-récurrente en exprimant le terme général comme une fonction de n, $a_n = f(n)$, et non plus de a_{n-1}.

Exemple : Dans l'exemple ci-dessus, on constate que

$$a_n = \frac{2^n}{2^n - 1}.$$

On démontre cette formule par récurrence.
1) si $n = 1$, on a bien $a_1 = \frac{2}{1} = 2$: ok.
2) Supposons la formule vraie pour n. Alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n} &= \frac{2\cdot\frac{2^n}{2^n-1}}{1+\frac{2^n}{2^n-1}} \qquad\qquad |\cdot 2^n - 1 \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n - 1 + 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

On peut alors calculer la limite :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-2^{-n}} = 1.$$

2ème méthode

On démontre d'abord que la suite converge et le cas échéant on passe à la limite dans l'équation $a_{n+1} = g(a_n)$ ce qui donne à résoudre l'équation

$$\boxed{a = g(a).}$$

Pour démontrer que la suite converge, on peut en général essayer de démontrer que
(A) la suite est monotone
(B) la suite est bornée

Remarque 2.23. Toute suite croissante (resp. décroissante) est forcément minorée (resp. majorée).
Conclusion : pour montrer qu'une suite croissante (resp. décroissante) est convergente, il suffit de montrer qu'elle est majorée (resp. minorée).

Exemple : Reprenons la suite précédente : $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n}$.
On constate d'abord que $a_n > 0$ pour tout n.
(A) On montre, par récurrence, que $a_n > 1$ pour tout n.
1) C'est vrai pour $n = 1$.
2) Supposons $a_n > 1$. On doit montrer que $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n} > 1$. Or, puisque $1 + a_n > 0$, on a

$$\frac{2a_n}{1+a_n} > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2a_n > 1 + a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n > 1.$$

Or ceci est vrai par hypothèse de récurrence. Donc $a_{n+1} > 1$.
(B) Montrons ensuite, par récurrence, que la suite est décroissante, c'est-à-dire que $a_{n+1} < a_n$:
1) $n = 1$: on a bien $a_2 < a_1$
2) Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $a_{n+1} < a_n$ et montrons que $a_{n+2} < a_{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{2a_{n+1}}{1+a_{n+1}} - \frac{2a_n}{1+a_n} = \frac{2a_{n+1}(1+a_n) - 2a_n(1+a_{n+1})}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} \\ &= \frac{2(a_{n+1} - a_n)}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} < 0. \end{aligned}$$

La suite est donc décroissante. Comme elle est minorée, elle converge donc.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n} \quad \xrightarrow{\text{limite}} \quad a = \frac{2a}{1+a} \Longleftrightarrow a^2 + a = 2a \Longleftrightarrow a(a-1) = 0.$$

Cette équation a 2 solutions $a = 0$ et $a = 1$. Comme $a_n > 1$ pour tout n, la limite ne peut être que $a = 1$.

ATTENTION : cette 2ème méthode de calcul fonctionne parce que l'on a démontré que la limite existe.

Contre-exemple : soit $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$. On a

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = \frac{1}{2}, \quad a_5 = 2, \ldots$$

Cette suite ne converge pas (2 points d'accumulations) mais si l'on passe à la limite dans la formule de définition, on obtient

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \xrightarrow{\text{limite}} a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou} a = -1 !!!!$$

Exemple 2.24. Soit $r > 0$ un nombre réel strictement positif. Considérons la suite définie par

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n}\right)$$

et $a_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{r}.$$

Si r et a_1 sont dans $\mathbb{Q}$, on a une suite de nombres rationnels qui converge vers $\sqrt{r}$.

DÉMONSTRATION : On a clairement que $a_n > 0$ pour tout n car $a_1 > 0$. De plus
1. $a_{n+1}^2 \geqslant r$ car

$$a_{n+1}^2 - r = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \frac{r^2}{a_n^2} + 2r\right) - r = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{r}{a_n}\right)^2 \geqslant 0.$$

2. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{r}{a_n}) - a_n = \dfrac{1}{2}(\dfrac{r}{a_n} - a_n) = \dfrac{1}{2a_n}(r - a_n^2) \leqslant 0$ pour $n \geqslant 2$.
La suite est donc décroissante.
Comme $a_n \geqslant 0$, elle est aussi bornée. La suite converge donc et on peut passer à la limite dans la définition :

$$a = \frac{1}{2}(a + \frac{r}{a}).$$

Ceci donne $2a^2 = a^2 + r$ et donc $a = \sqrt{r}$. □

Application numérique : pour $r = 2$ et $a_1 = 1$, on trouve

$$a_2 = \frac{3}{2} \quad a_3 = \frac{17}{12} \quad a_4 = \frac{577}{408} \quad a_5 = \frac{665857}{470832} = 1.414213562 \quad \text{(8 décimales correctes).}$$

Exemple 2.25. Soit la suite définie par

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 4)$$

et $a_1 = 1$. Montrons d'abord que la suite est bornée et croissante.

(A) On a $a_1 < 2$ et par récurrence $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{4} < 1 + 1/2 < 2$. De plus, on a clairement $a_n > 0$. Donc la suite est bornée.

(B) Montrons, par récurrence, qu'elle est croissante :
1) on a $1 = a_1 < a_2 = \dfrac{5}{4}$.
2) supposons $a_n < a_{n+1}$. Alors $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 4) - \frac{1}{4}(a_n + 4) = \frac{1}{4}(a_{n+1} - a_n) > 0$.

La suite est donc croissante et bornée $\Longrightarrow$ la limite existe. Notons a cette limite. Alors $a = \dfrac{1}{4}(a + 4)$ devient $4a = a + 4$ donc $a = \frac{4}{3}$.

2.3 Séries

Définition 2.26. Soit $\{b_n\}$ une suite réelle. On note

$$\sum_{k=1}^{n} b_k := b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Si l'indice k parcourt tout $\mathbb{N}^*$ (ou $\mathbb{N}$) alors la somme est infinie et on parle de **série** :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

b_k est le *terme général* de la série.

2.3.1 Convergence d'une série

Définition 2.27. Posons

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

On a $s_{n+1} = s_n + b_{n+1}$.

La suite $\{s_n\}$ est une suite récurrente, appelée la suite des sommes partielles.

On dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **converge vers** s si la suite $\{s_n\}$ converge vers s. On note alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Sinon on dit que la **série diverge**.

Condition nécessaire de convergence

Pour que la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, il faut que $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. En effet si la suite $\{s_n\}$ converge vers s, alors

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_n + b_{n+1}) = s + \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

On doit donc avoir

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = 0.}$$

Mais **cette condition n'est pas suffisante** comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.28 (Série harmonique)**.** Posons $b_k = \frac{1}{k}$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ est appelée la **série harmonique**. La suite des sommes partielles est

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On a bien $b_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Mais la suite $\{s_n\}$ diverge.

DÉMONSTRATION :
1) La suite $\{s_n\}$ est croissante.
2) Considérons les termes s_1, s_2, s_4, s_8, …, s_{2^k}.

$$s_1 = 1 \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \qquad s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8}.$$

Alors

$$s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_4 + \underbrace{(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})}_{=\frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}.$$

De manière générale, on a

$$s_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \infty.$$

La suite s_{2^k} n'est pas majorée ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) = \infty.$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ est donc divergente.}}$$

Exemple 2.29 (La série géométrique)**.** Soit $r \in \mathbb{R}$. Posons $b_k = r^k$ et considérons la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots \qquad \text{(ici, on débute à } k = 0\text{)}$$

Alors

$$s_0 = 1 \qquad s_1 = 1 + r \qquad s_2 = 1 + r + r^2 \qquad s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

On sait que

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad \text{car} \qquad (1 - r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = 1 - r^{n+1}$$

Quelle est alors la limite ?

Si $|r| \geqslant 1$ alors la suite s_n diverge car $|r^{n+1}| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

En revanche, pour $|r| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ (voir exemple 3 sous 2.6) et donc

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

En conclusion, la série géométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \quad \begin{cases} \text{diverge si } |r| \geqslant 1 \\ \text{converge vers } \dfrac{1}{1-r} \text{ si } |r| < 1 \end{cases}$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la série géométrique.

Exemple 2.30. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

diverge (et ne converge donc pas vers 0) car la suite des sommes partielles est $1\,;\,0\,;\,1\,;\,0\,;\,1\,;\ldots$

2.3.2 Propriétés des séries

(I) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} cb_k = cs$.

(II) Si $s = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ et $s' = \sum_{k=1}^{\infty} b'_k$ alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha b_k + \beta b'_k = \alpha s + \beta s'$$

(linéarité de la convergence.)

(III) La propriété de convergence ou de divergence n'est pas modifiée si l'on ajoute (ou retranche) un nombre fini de termes. Par exemple, la série

$$\sum_{k=100}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots$$

diverge encore (série harmonique).

2.3.3 Séries à termes positifs

Notons $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ les séries avec $u_k \geqslant 0 \quad \forall k$.

(A) Critères de comparaison

Supposons que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n > N$.

(a) Si $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge également ; ($\{s_n\}$ = suite croissante majorée) ;

(b) si $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ diverge aussi. (suite croissante non majorée).

Exemple 2.31.
La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha \leqslant 1$ diverge.
En effet, on a $k^\alpha = k^{1-\delta}$ avec $\delta \geqslant 0$ et donc $k^\alpha \leqslant k$ ce qui implique que

$$\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{k}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge, le critère de comparaison nous permet de conclure à la divergence de la série considérée. □

(B) Critère de la racine (ou de Cauchy)

Si pour tout $n \geqslant N$, on a $\boxed{\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1}$ (q fixé) alors la série $\sum u_k$ converge.

Si $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$, la série diverge car $u_n \not\to 0$.

DÉMONSTRATION :
On a $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1$ donc $u_n \leqslant q^n$. Or la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

converge (série géométrique) puisque $q < 1$. Par le critère de comparaison, la série $\sum u_k$ converge également.

$\square$

(C) Critère du quotient (ou de d'Alembert)

Si pour tout $n \geqslant N$, on a $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1}$ (q fixé) alors la série $\sum u_k$ converge.

Si on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la série diverge.

DÉMONSTRATION :
On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q \qquad \text{et} \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant q$$

et donc

$$u_{n+1} \leqslant u_n \cdot q \leqslant u_{n-1} \cdot q^2 \leqslant \cdots \leqslant q^n \cdot u_1.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_1 \cdot q^k$ converge. Par le critère de comparaison, il en est de même de la série $\sum u_k$.

Corollaire 2.32 (Résumé-corollaire). *Soient*

$$q_1 := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \qquad \textit{et} \qquad q_2 := \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\textit{Alors la série } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \begin{cases} \textit{converge si } q_i < 1 \\ \textit{diverge si } q_i > 1 \\ \textit{on ne peut rien dire si } q_i = 1. \end{cases}$$

Exemples 2.33.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{3^k}$

   On a $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n^{10}}{3^n}} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt[n]{n^{10}} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \dfrac{1}{3} < 1$. La série converge.

2. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ $\quad (a > 0)$ converge. En effet, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} < q < 1$$

   si n est assez grand. (On verra plus tard qu'elle converge vers e^a).

Exemples 2.34 (Autres exemples).

(a) Considérons la série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$.

Alors on a $b_k = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 2$ et donc

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} b_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Alors $\lim_{n \to \infty} s_n = 1$ ce qui démontre que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$.

(b) Considérons maintenant la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. On a $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour tout $k \geqslant 2$.

Le critère de comparaison et l'exemple (a) ci-dessus permet de conclure que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. On a de plus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2.$$

Corollaire 2.35. *La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha \geqslant 2$ converge car $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^2}$ (critère de comparaison).*

Pour $1 < \alpha \leqslant 2$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge également.

Remarque 2.36. Dans l'exemple (b) ci-dessus, les critères de la racine et du quotient ne donnent rien. En effet, on a

$$q_1 = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$

et

$$q_2 = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1.$$

De même, pour la série harmonique, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, ces critères ne donnent rien. On a

$$q_1 = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

De même pour le critère du quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

ATTENTION : on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ mais PAS $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1$ car $q_2 = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Et la série harmonique diverge.

2.3.4 Séries alternées

Soit u_n de signe constant. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

est dite *série alternée.*

Théorème 2.37 (<u>**Critère de Leibniz**</u>). *Si*

(i) $|u_{n+1}| < |u_n|$ *et*

(ii) $|u_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

alors la série alternée converge.

De plus elle converge vers S avec $|S| \leqslant |u_1|$.

DÉMONSTRATION : On peut supposer tous les u_k positifs. L'hypothèse devient alors $u_k > u_{k+1}$ et donc $u_k - u_{k+1} > 0$. D'où

$$s_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + u_{2n-1} - u_{2n} \qquad \text{et}$$
$$s_{2n+2} = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + \underbrace{u_{2n+1} - u_{2n+2}}_{>0} > s_{2n}.$$

Ainsi la suite $\{s_{2n}\}$ est croissante. Par ailleurs, on a

$$s_{2n} = u_1 - (\underbrace{u_2 - u_3}_{>0}) - \dots - (\underbrace{u_{2n-2} - u_{2n-1}}_{>0}) - u_{2n} < u_1.$$

La suite $\{s_{2n}\}$ est donc aussi bornée. Elle converge donc. Posons

$$S = \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

On a alors

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} S + 0 = s.$$

La suite $\{s_{2n+1}\}$ converge également vers S ce qui montre que $\{s_n\}$ converge vers S.
Comme $s_{2n} < u_1$, on a bien $S < u_1$. □

Exemples 2.38.

1. La **série harmonique alternée** (ou **série de Leibniz**)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\dots$$

converge. (On verra que c'est vers $\ln 2$.)

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{2+\sqrt{k}}{k}$$

On a

$$u_n = \frac{2+\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

et

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{n+1} = u_{n+1}.$$

Les hypothèses (i) et (ii) du théorème sont remplies : la série converge.

Remarque 2.39. La condition (ii) $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ne suffit pas.
Exemple : la série alternée

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \frac{1}{36} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k$$

avec

$$u_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{1}{k^2} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

satisfait bien la condition (ii) ($u_k \longrightarrow 0$) mais ne converge pas. En effet, soit n pair. Alors

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{n^2} \\ &= \underbrace{(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1})}_{s_n^+} - \underbrace{(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{n^2})}_{s_n^-}. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, le terme s_n^- est majoré par un nombre $M \in \mathbb{R}$ indépendant de n.
Comme la série harmonique diverge, le terme s_n^+ est plus grand que tout $r \in \mathbb{R}$ pour n assez grand. Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $N_r \in \mathbb{N}$ tel que $s_n^+ > r$ dès que $n > N_r$.
Ceci implique que $s_n = s_n^+ - s_n^- > r - M$. Ainsi la sous-suite s_n (n pair) est non majorée et donc non convergente. □

2.3.5 Série absolument convergente

Définition 2.40. Soit $\sum b_k$ une série σ donnée. Si la série

$$|\sigma| := \sum |b_k|$$

converge, on dit que σ est <u>absolument convergente</u>.

Théorème 2.41. *Si $|\sigma|$ converge, alors σ converge également.*

Conclusion : les critères pour les séries à termes positifs (cf. 2.3.3) sont applicables aux séries absolument convergentes.

Exemple : la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente pour tout $a \in \mathbb{R}$. En effet, on a

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{|a|}{n} \longrightarrow 0 \qquad \text{(critère du quotient)}$$

Définition 2.42 (Série semi-convergente)**.** Une série $\sum b_k$ convergente mais dont la série $\sum |b_k|$ diverge est appelée **semi-convergente**.

Exemple : La série harmonique alternée $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ est convergente mais pas absolument convergente puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Elle est donc semi-convergente.

Théorème 2.43.
1) La somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre de ses termes.
2) En revanche, dans le cas d'une série semi-convergente, on peut faire converger la somme de la série vers n'importe quel nombre réel en regroupant les termes de la série d'une façon bien choisie.

Sans démonstration.

Corollaire 2.44. *Si $\sum_k a_k$ est absolument convergente alors*

$$\sum_l a_l + \sum_m a_m$$

(où les a_l et a_m forment l'ensemble de tous les a_k) sont séparément absolument convergentes.

Exemple : Calculons

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k(k+2)} \qquad \text{(série alternée).}$$

Cette série est absolument convergente car

$$|u_k| = \frac{1}{k(k+2)} < \frac{1}{k^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.
On peut alors séparer les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs :

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{k=1,\ \text{impairs}}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} + \sum_{k=2,\ \text{pairs}}^{\infty} (-1) \cdot \frac{1}{k(k+2)} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)(2l+1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m(2m+2)} \\
&= \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l+1} \right)}_{s_l^+} - \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)}}_{s_m^-} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

car

$$s_l^+ = \frac{1}{2} \left[(1 - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l+1}) \right] = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2l+1}) \xrightarrow{l \to \infty} \frac{1}{2}$$

$$s_m^- = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} \xrightarrow{m \to \infty} 1$$

Exemple 2.45. La série harmonique alternée est semi-convergente. On ne peut pas changer l'ordre des termes sans changer la valeur de la somme (infinie).

$$\begin{aligned}
ln(2) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \sum_k (-1)^{k+1}\frac{1}{k} \qquad | \cdot 2 \\
2ln(2) &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{2}{10} + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots \\
&= ln(2).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$2ln(2) = ln(2)!!!!!!!!!!$$

2.4 Définition du nombre e

Soit $b_0 = 1$ et $b_k = \frac{1}{k!}$. (Nous démarrons ici avec $k = 0$.)

Considérons la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ et notons $\{e_n\}$ la suite des sommes partielles, c'est-à-dire

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Nous avons vu dans l'exemple 2.33 que cette série est absolument convergente. Sa limite est notée e :

$$\boxed{e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} (1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}).}$$

Numériquement : $e = 2,718281828$.

Théorème 2.46. *Le nombre e est irrationnel.*

DÉMONSTRATION :
Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
e &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right)}_{<1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots = \frac{1}{1-1/n} = \frac{n}{n-1} \leqslant 2}
\end{aligned}$$

Donc

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \cdot \beta_n \qquad \text{avec } 1 < \beta_n < 2. \quad (*)$$

Supposons maintenant que e soit rationnel c'est-à-dire que $e = \frac{M}{N}$. Si l'on pose $n = N + 1$ dans (*), on obtient

$$\frac{M}{N} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N!} + \frac{1}{(N+1)!} \cdot \beta_{N+1} \qquad | \cdot (N+1)!$$

$$\underbrace{M(N+1)(N-1)!}_{\in\mathbb{N}} = \underbrace{(N+1)! + (N+1)! + (N+1)N(N-1)\cdots 3 + \cdots + (N+1)}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\beta_{N+1}}_{\notin\mathbb{N}}.$$

On aboutit ainsi à une contradiction. $\square$

Autre définition de e

Considérons la suite $\{e'_n\}$ définie par

$$\boxed{e'_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

Proposition 2.47. $\lim_{n\to\infty} e'_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

> ATTENTION : une limite de la forme 1^∞ est une forme indéterminée. Elle ne vaut pas 1 mais peut prendre, a priori, toutes les valeurs possibles comme une limite de la forme $\frac{0}{0}$

DÉMONSTRATION : Par la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}
e'_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} \\
&= 1+1+\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\leqslant 1}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\leqslant 1}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\leqslant 1} \qquad (*) \\
&\leqslant 1+1+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e_n
\end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\boxed{e'_n \leqslant e_n}$ pour tout n. Reprenons le calcul précédent à la ligne (*) :

$$\begin{aligned}
e'_n &= 1+1+\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\geqslant 1-\frac{k-1}{n}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\geqslant 1-\frac{k-1}{n}}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\geqslant 1-\frac{k-1}{n}} \\
&\geqslant 1+1+\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^k
\end{aligned}$$

L'inégalité de Bernoulli donne

$$\begin{aligned}
&\geqslant 1+1+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{n}\right) = \underbrace{1+1+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k!}}_{=e_n} - \frac{1}{n}\sum_{k=2}^n\frac{k(k-1)}{k!} \\
&= e_n - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=2}^n\frac{1}{(k-2)!} \\
&= e_n - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{j!} = e_n - \frac{1}{n}e_{n-2}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$e_n - \frac{1}{n}e_{n-2} \leqslant e'_n \leqslant e_n.$$

Les suites e_n et $e_n - \dfrac{1}{n}e_{n-2}$ convergent toutes les deux vers e. Ainsi, par le théorème des gendarmes, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} e'_n = e$. □

La convergence de cette suite $\{e'_n\}$ est beaucoup plus lente que la précédente.
Pour avoir $e = 2.7180..$, il faut $n = 6$ dans e_n mais $n = 4819$ dans e'_n.

Remarque 2.48. On peut généraliser cette démonstration pour montrer que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriétés

1.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}.}$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}\\ &= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{-1} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} (e\cdot 1)^{-1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

□

2. Si $\{a_n\}$, $a_n > 0$ est une suite rationnelle nulle (c'est-à-dire qui converge vers 0) alors

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.}$$

Démonstration : En posant $N = E(\frac{1}{a_n})$, on a $N \leqslant \frac{1}{a_n} < N+1$ et alors

$$\underbrace{(1+\frac{1}{N+1})^N}_{(1+\frac{1}{N+1})^{N+1}\cdot(1+\frac{1}{N+1})^{-1}} < (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} < \underbrace{(1+\frac{1}{N})^{N+1}}_{(1+\frac{1}{N})^N(1+\frac{1}{N})}.$$

Si on prend la limite quand $N \longrightarrow \infty$ (alors $a_n \longrightarrow 0$) on a

$$e\cdot 1 \leqslant (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \leqslant e\cdot 1.$$

3. On a

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{q}{n})^n = e^q \qquad \forall q \in \mathbb{Q}.}$$

C'est la définition numérique de e^q.

DÉMONSTRATION :
Si $q = 0$ c'est trivial. Si $q > 0$ on applique le point 2. avec $a_n = \frac{q}{n}$. On a alors

$$(1+\frac{q}{n})^n = \left((1+\frac{q}{n})^{n/q}\right)^q \xrightarrow{n\to\infty} e^q.$$

Si $q < 0$, l'argument est analogue à celui du point 1.

Exemple : Calculons

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n.$$

On a

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}.$$

La fonction e^x

Nous avons démontré que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{q}{n}\right)^n = e^q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Nous avons aussi vu que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On peut donc étendre la fonction e^x à tout $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.}$$

On peut même étendre cette définition aux **nombres complexes** en posant

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Le module remplace alors la valeur absolue et cette suite est encore **absolument convergente** pour tout $z \in \mathbb{C}$..

On peut montrer les résultats suivants :

- $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$
- Donc $|e^z|^2 = e^z \cdot \overline{e^z} = e^z \cdot e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\mathcal{R}e(z)} \Longrightarrow \quad |e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)}$.
- En particulier, si $z = i\alpha$ alors $\left|e^{i\alpha}\right| = e^0 = 1$. L'exponentielle complexe envoie l'axe imaginaire sur le cercle trigonométrique.
- Chapitre 4 $\Longrightarrow \quad \arg(e^{i\alpha}) = \alpha$. On obtient les formules suivantes :

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha = [1;\alpha]}$$

et donc le nombre complexe $[r;\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'écrit aussi

$$\boxed{[r;\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.}$$

C'est la **notation d'Euler**. En particulier, en posant $\theta = \pi$ et $r = 1$ on obtient

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

2.5 Un petit résumé de quelques séries

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique)
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ est semi-convergente (série harmonique alternée)
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \begin{cases} \text{diverge si} & 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \\ \text{converge si} & \alpha > 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \begin{cases} = \frac{1}{1-q} & \text{si } |q| < 1 \\ \text{diverge si} & |q| \geqslant 1 \end{cases}$ série géométrique
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \quad \begin{cases} = \frac{1}{(1-q)^2} & \text{si } |q| < 1 \\ \text{diverge si} & |q| \geqslant 1 \end{cases}$ dérivée de la série géométrique
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ converge absolument $\forall a \in \mathbb{R}$ et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n}\right)^n.$$