Lycée Jean-Piaget

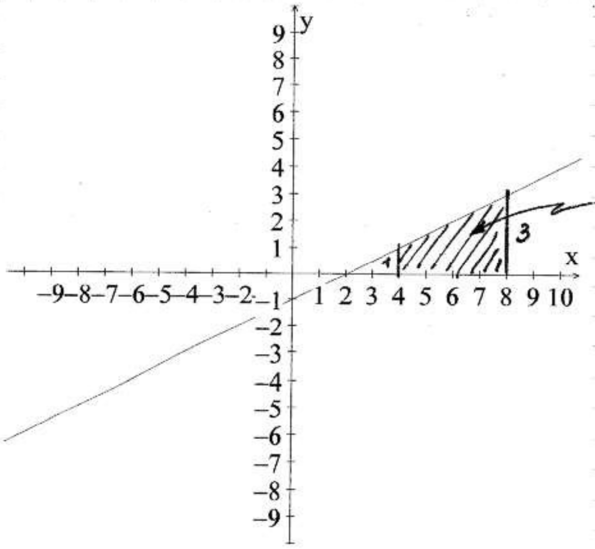
Série 3
Calcul intégral
Corrigé des exercices

Exercice 1

On a $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

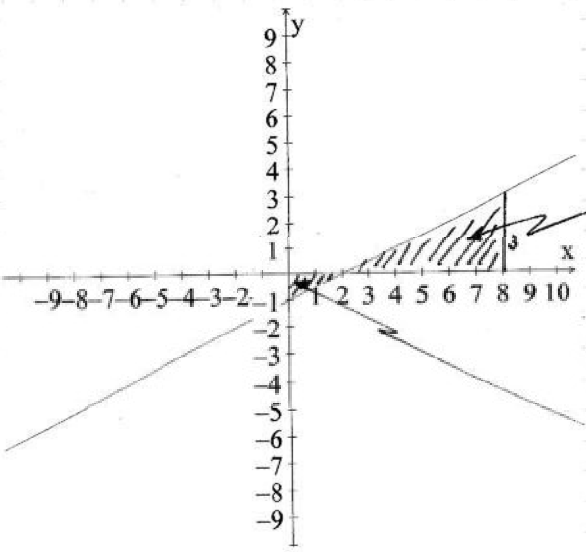
Une primitive est $F(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$.

a) $\displaystyle\int_4^8 f(x)\,dx = F(8) - F(4) = \frac{1}{4}\cdot 8^2 - 8 - \left(\frac{1}{4}\cdot 4^2 - 4\right) = 16 - 8 - (4-4) = 8.$



aire $= \frac{1+3}{2}\cdot 4 = 8.$

b) $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx = F(8) - F(0) = \frac{1}{4}\cdot 8^2 - 8 - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^2 - 0\right) = 16 - 8 = 8$ aussi.



aire $= \frac{6\cdot 3}{2} = 9$ (aire "positive")

aire $= \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ (aire "négative" car en-dessous de l'axe x)

Exercice 2

a) $f(x)=x^2$: $F(x)=\frac{1}{3}x^3+c=\frac{x^3}{3}+c$, $c\in\mathbb{R}$.

b) $f(x)=ax^2+bx+c$: $F(x)=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+d$, $d\in\mathbb{R}$.

c) $f(x)=x^n$, $n\neq-1$: $F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, $c\in\mathbb{R}$.

d) $f(x)=e^x$: $F(x)=e^x+c$, $c\in\mathbb{R}$.

e) $f(x)=e^{kx}$: $F(x)=\frac{1}{k}e^{kx}+c$, $c\in\mathbb{R}$.

f) $f(x)=\sin(x)$: $F(x)=-\cos(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

g) $f(x)=\sin(ax+b)$: $F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

h) $f(x)=\frac{k}{x}=k\cdot\frac{1}{x}$: $F(x)=k\ln(|x|)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

i) $f(x)=\frac{1}{ax+b}$: $F(x)=\frac{1}{a}\ln(|ax+b|)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

j) $f(x)=(ax+b)^n$, $n\neq-1$: $F(x)=\frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c$, $c\in\mathbb{R}$.

k) $f(x)=\sqrt{ax+b}=(ax+b)^{1/2}$: $F(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{3/2}+c=\frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}+c$, $c\in\mathbb{R}$.

l) $f(x)=\frac{ax+b}{x}=a+\frac{b}{x}$: $F(x)=ax+b\ln(|x|)+c$, $c\in\mathbb{R}$ (voir h)).

Exercice 3

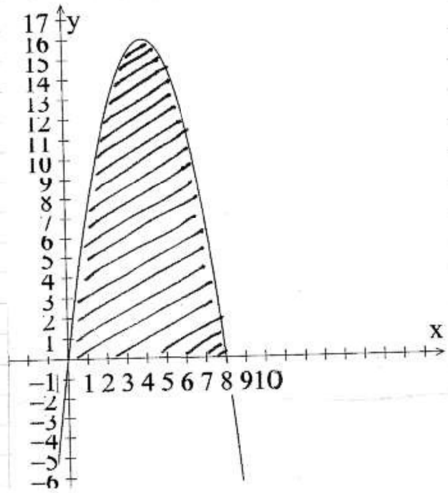
$f(x)=(2x-5)e^{-x}$: on sait qu'une primitive de f est de la forme $F(x)=(ax+b)e^{-x}+c, c\in\mathbb{R}$;
on va trouver les valeurs de a et b grâce à la relation $F'(x)=f(x)$;
$F(x)=u.v$ avec $u=ax+b$ et $v=e^{-x}$; on a $u'=a$ et $v'=-e^{-x}$;
ainsi $F'(x)=u'.v+u.v'=ae^{-x}+(ax+b)(-e^{-x})=(a-ax-b)e^{-x}=$
$=(-ax+a-b)e^{-x}$; $F'(x)=f(x) \Rightarrow (-ax+a-b)e^{-x}=(2x-5)e^{-x}$;
par identification des termes, on obtient $-a=2$ et $a-b=-5$
$\Rightarrow a=-2$ et $b=a+5=-2+5=3$; ainsi une primitive de f
est $F(x)=(-2x+3)e^{-x}+c, c\in\mathbb{R}$.

$g(x)=(-x^2+3x-5)\cdot e^{\frac{x}{2}}$: on sait qu'une primitive de g est de la forme $G(x)=(ax^2+bx+c)e^{\frac{x}{2}}+d$,
$d\in\mathbb{R}$; on va trouver les valeurs de a, b et c grâce à la relation $F'(x)=f(x)$;
$F(x)=u.v$ avec $u=ax^2+bx+c$ et $v=e^{\frac{x}{2}}$; on a $u'=2ax+b$ et $v'=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$;
ainsi $F'(x)=u'.v+u.v'=(2ax+b)e^{\frac{x}{2}}+(ax^2+bx+c)\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=$
$=(2ax+b+\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}x+\frac{c}{2})e^{\frac{x}{2}}=(\frac{a}{2}x^2+(2a+\frac{b}{2})x+\frac{c}{2})e^{\frac{x}{2}}$;
$F'(x)=f(x) \Rightarrow (\frac{a}{2}x^2+(2a+\frac{b}{2})x+\frac{c}{2})e^{\frac{x}{2}}=(-x^2+3x-5)e^{\frac{x}{2}}$;
par identification des termes on obtient $\frac{a}{2}=-1$, $2a+\frac{b}{2}=3$ et $\frac{c}{2}=-5$
$\Rightarrow a=-2$, $b=2(3-2a)=2(3+4)=14$ et $c=-10$; ainsi une
primitive de f est $F(x)=(-2x^2+14x-10)e^{\frac{x}{2}}+d, d\in\mathbb{R}$.

Exercice 4

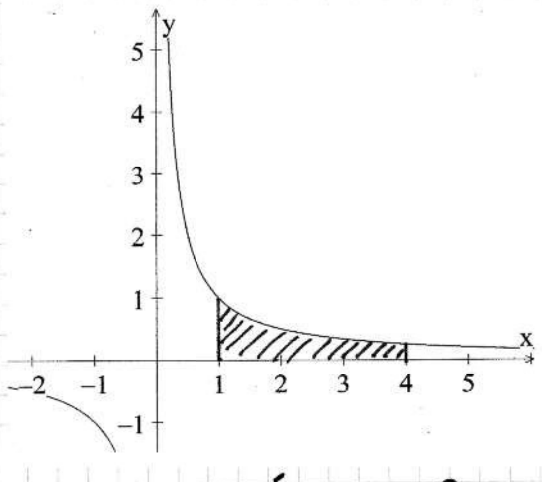
a) $\int_0^8 x(8-x)\,dx$: une primitive de $x(8-x) = 8x - x^2$ est $F(x) = 4x^2 - \frac{x^3}{3}$;

ainsi $\int_0^8 x(8-x)\,dx = F(8) - F(0) = 4.8^2 - \frac{8^3}{3} = 256 - \frac{512}{3} = \frac{256}{3}$.



b) $\int_1^4 \frac{dx}{x}$: une primitive de $\frac{1}{x}$ est $F(x) = \ln(|x|)$; ainsi $\int_1^4 \frac{dx}{x} = \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = F(4) - F(1) =$

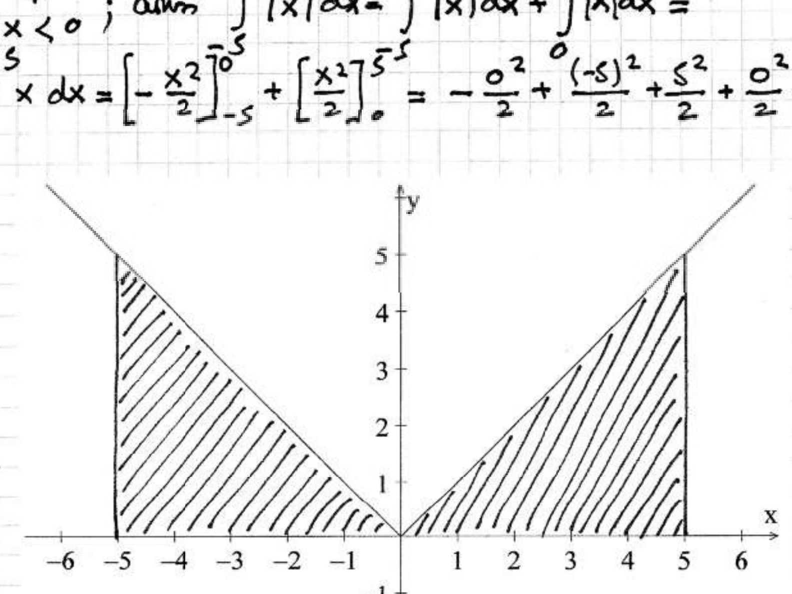
$= \ln(4) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \ln(4)$.



c) $\int_{-5}^{5} |x|\,dx$: on a $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$; ainsi $\int_{-5}^{5} |x|\,dx = \int_{-5}^{0} |x|\,dx + \int_0^5 |x|\,dx =$

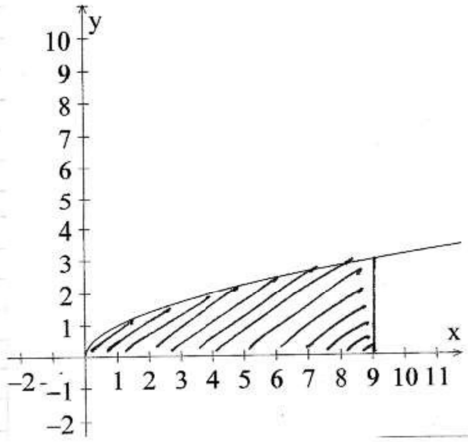
$= \int_{-5}^{0} (-x)\,dx + \int_0^5 x\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = -\frac{0^2}{2} + \frac{(-5)^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \frac{0^2}{2} =$

$= \frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 25.$



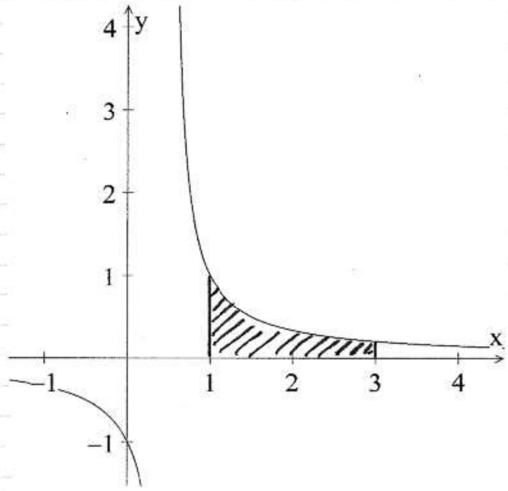
d) $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx$: une primitive de $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$; ainsi $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = F(9) - F(0) =$

$= \frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot 3^3 = 2\cdot 3^2 = 18.$



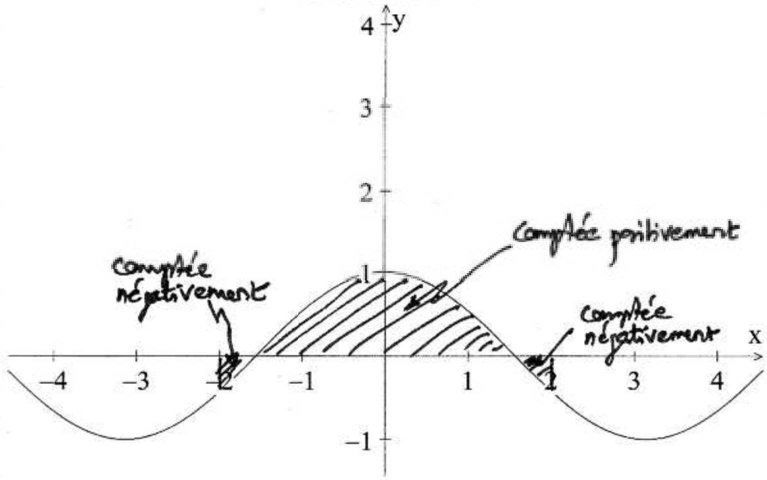
e) $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$: une primitive de $\frac{1}{2x-1}$ est $F(x) = \frac{1}{2}\ln(|2x-1|)$; ainsi $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1} = \int_1^3 \frac{1}{2x-1}\,dx =$

$= F(3) - F(1) = \frac{1}{2}\ln(|2\cdot 3-1|) - \frac{1}{2}\ln(|2\cdot 1-1|) = \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\underbrace{\ln(1)}_{0} = \frac{1}{2}\ln(5).$



f) $\int_{-2}^{2} \cos(x)\,dx$: une primitive de $\cos(x)$ est $F(x) = \sin(x)$; ainsi $\int_{-2}^{2}\cos(x)\,dx = F(2) - F(-2) =$

$= \sin(2) - \sin(-2) = \sin(2) + \sin(2) = 2\sin(2) \cong 1,8186.$



Exercice 5

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$: on va chercher A et B tels que $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$; on a

$\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow A(x+1)+Bx=1 \Rightarrow Ax+A+Bx=1$

$\Rightarrow (A+B)x+A=1$; par identification des termes, on a $A+B=0$ et $A=1$

$\Rightarrow A=1$ et $B=-1$;

on a ainsi $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$;

une primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$ est alors $F(x)=\ln(|x|)-\ln(|x+1|)$;

ainsi $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}=F(2)-F(1)=\ln(2)-\ln(3)-(\underbrace{\ln(1)}_{0}-\ln(2))=$

$=\ln(2)-\ln(3)+\ln(2)=2\ln(2)-\ln(3)=\ln(2^2)-\ln(3)=$

$=\ln(4)-\ln(3)=\ln\left(\frac{4}{3}\right)\cong 0{,}288.$

b) $\int_4^5 \frac{3x+2}{x^2-9}dx$: Comme $x^2-9=(x+3)(x-3)$; on va chercher A et B tels que

$\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}=\frac{3x+2}{(x+3)(x-3)}$; on a $\frac{A(x-3)+B(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{3x+2}{(x+3)(x-3)}$

$\Rightarrow A(x-3)+B(x+3)=3x+2 \Rightarrow Ax-3A+Bx+3B=3x+2$

$\Rightarrow (A+B)x-3A+3B=3x+2$; par identification des termes, on a

$A+B=3$ et $-3A+3B=2 \Rightarrow 3A+3B=9$ et $-3A+3B=2$

$\Rightarrow 6B=11 \Rightarrow B=\frac{11}{6} \Rightarrow A=3-B=3-\frac{11}{6}=\frac{7}{6}$; on a ainsi

$\frac{3x+2}{x^2-9}=\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x+3}+\frac{11}{6}\cdot\frac{1}{x-3}$; une primitive de $\frac{3x+2}{x^2-9}$ est alors

$F(x)=\frac{7}{6}\ln(|x+3|)+\frac{11}{6}\ln(|x-3|)$;

ainsi $\int_4^5 \frac{3x+2}{x^2-9}dx=F(5)-F(4)=$

$=\frac{7}{6}\ln(8)+\frac{11}{6}\ln(2)-\left(\frac{7}{6}\ln(7)+\frac{11}{6}\underbrace{\ln(1)}_{0}\right)=$

$=\frac{7}{6}\ln(8)+\frac{11}{6}\ln(2)-\frac{7}{6}\ln(7)\cong 1{,}427.$

c) $\int_0^3 \frac{dx}{2x^2+7x+3}$: on a $2x^2+7x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{-7\pm 5}{4}=\begin{cases}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\\ -\frac{12}{4}=-3\end{cases}$;

ainsi $2x^2+7x+3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x+1)(x+3)$;

on va chercher A et B tels que $\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x+3}=\frac{1}{2x^2+7x+3}$;

on a $\frac{A(x+3)+B(2x+1)}{(2x+1)(x+3)}=\frac{1}{(2x+1)(x+3)} \Rightarrow A(x+3)+B(2x+1)=1$

$\Rightarrow Ax+3A+2Bx+B=1 \Rightarrow (A+2B)x+3A+B=1$; par identification des termes, on a $A+2B=0$ et $3A+B=1 \Rightarrow A=-2B$ et $-6B+B=1$

$\Rightarrow -5B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{5} \Rightarrow A = \frac{2}{5}$; on a ainsi

$\frac{1}{2x^2+7x+3} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}$; une primitive de $\frac{1}{2x^2+7x+3}$

est alors $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(|2x+1|) - \frac{1}{5}\ln(|x+3|) = \frac{1}{5}\ln(|2x+1|) - \frac{1}{5}\ln(|x+3|)$;

ainsi $\int_0^3 \frac{dx}{2x^2+7x+3} = \frac{1}{5}\ln(2\cdot3+1) - \frac{1}{5}\ln(3+3) - \left(\frac{1}{5}\underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{1}{5}\ln(3)\right) =$

$= \frac{1}{5}\ln(7) - \frac{1}{5}\ln(6) + \frac{1}{5}\ln(3) = \frac{1}{5}\left(\ln(7)+\ln(3)-\ln(6)\right) =$

$= \frac{1}{5}\left(\ln(7\cdot3)-\ln(6)\right) = \frac{1}{5}\left(\ln(21)-\ln(6)\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{21}{6}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{7}{2}\right) =$

$\cong 0{,}251.$

Exercice 6

a) Une primitive de e^{-t} est $F(t) = -e^{-t}$. Ainsi $\int_0^x e^{-t}dt = F(x) - F(0) = -e^{-x} - (-e^0) =$
$= -e^{-x}+1.$

b) On va utiliser la formule d'intégration par parties : $\int_a^b u\cdot v' dx = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b u'\cdot v\, dx.$

Avec $u = t$ et $v' = e^{-t}$, on a $u' = 1$ et $v = -e^{-t}$.

Ainsi $\int_0^x t\cdot e^{-t}dt = \int_0^x u\cdot v' dt = [u\cdot v]_0^x - \int_0^x u'\cdot v\, dt = \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x (-e^{-t})dt =$

$= -xe^{-x} + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$ (voir a)) $= -(x+1)e^{-x}+1.$

c) On utilise à nouveau la formule d'intégration par parties.

Avec $u = t^2$ et $v' = e^{-t}$, on a $u' = 2t$ et $v = -e^{-t}$.

Ainsi $\int_0^x t^2\cdot e^{-t}dt = \int_0^x u\cdot v' dt = [u\cdot v]_0^x - \int_0^x u'\cdot v\, dt = \left[-t^2e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x 2t(-e^{-t})dt =$

$= -x^2e^{-x} + 2\int_0^x te^{-t}dt = -x^2e^{-x} + 2\left(-(x+1)e^{-x}+1\right)$ (voir b)) $=$

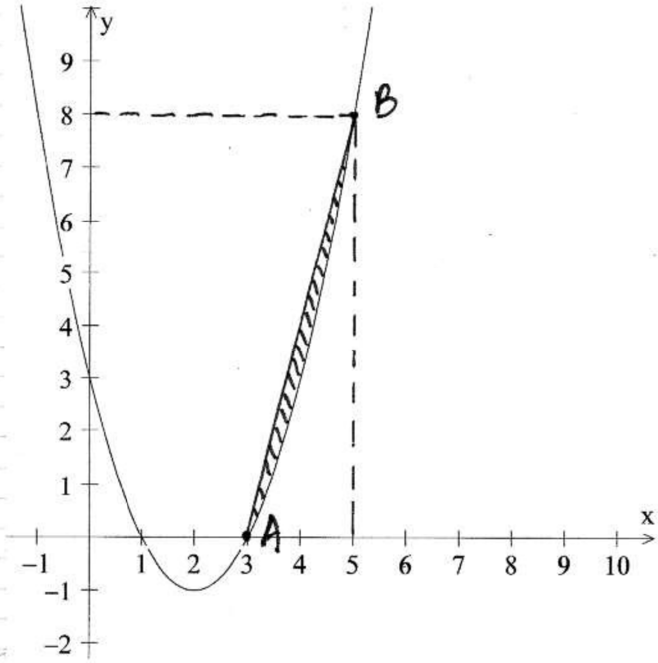
$= -x^2e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} + 2 = -(x^2+2x+2)e^{-x}+2.$

d) Une primitive de $\frac{1}{t^2} = t^{-2}$ est $F(t) = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t}$. Ainsi $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = F(x) - F(1) =$

$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{x} - 1.$

Exercice 7

On a la parabole $p: y=x^2-4x+3$.
$A(3;a)$ appartient à la parabole. Avec $x=3$ et $y=a$, on a $a=3^2-4\cdot3+3=0$.
Ainsi $A(3;0)$.
$B(5;b)$ appartient à la parabole. Avec $x=5$ et $y=b$, on a $b=5^2-4\cdot5+3=8$.
Ainsi $B(5;8)$.
On a la situation suivante:



Cherchons l'équation de la droite qui passe par A et B. Elle est de la forme $y=mx+h$, où m est sa pente. On a $m=\frac{8-0}{5-3}=\frac{8}{2}=4$. On a donc $y=4x+h$.
Avec $A(3;0)$, on a $0=4\cdot3+h \Rightarrow h=-12$.
Ainsi, l'équation de la droite AB est $y=4x-12$.
L'aire entre l'arc AB et la corde AB est alors $\int_3^5\left(4x-12-(x^2-4x+3)\right)dx=$

$$=\int_3^5\left(4x-12-x^2+4x-3\right)dx=\int_3^5\left(-x^2+8x-15\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x^2-15x\right]_3^5=$$

$$=-\frac{5^3}{3}+4\cdot5^2-15\cdot5-\left(-\frac{3^3}{3}+4\cdot3^2-15\cdot3\right)=$$

$$=-\frac{125}{3}+100-75-\left(-9+36-45\right)=-\frac{125}{3}+25+18=-\frac{125}{3}+43=\frac{4}{3}.$$

Exercice 8

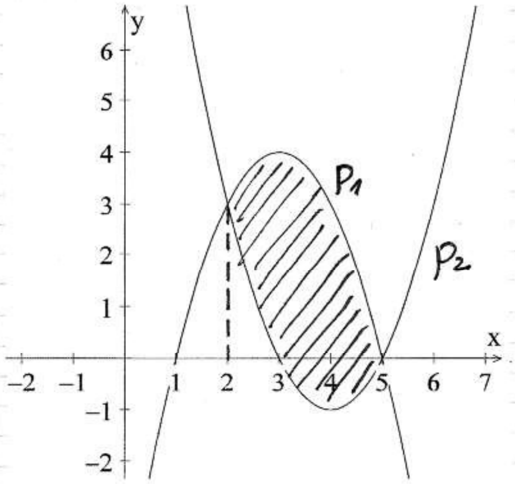
Commençons par chercher les points d'intersection de p_1 et de p_2 :

$$p_1 = p_2 \Rightarrow -x^2+6x-5 = x^2-8x+15 \Rightarrow 2x^2-14x+20=0$$

$$\Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow x = \frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2} = \frac{7\pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right. .$$

Ainsi les points d'intersection de p_1 et p_2 sont en $x=2$ et $x=5$.

On a la situation suivante :



L'aire délimitée par p_1 et p_2 (aire hachurée) est

$$\int_2^5 (p_1-p_2)\,dx = \int_2^5 \left(-x^2+6x-5-(x^2-8x+15)\right)dx =$$

$$= \int_2^5 \left(-x^2+6x-5-x^2+8x-15\right)dx = \int_2^5 \left(-2x^2+14x-20\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3}+7x^2-20x\right]_2^5 = -\frac{2.5^3}{3}+7.3^2-20.3-\left(-\frac{2.2^3}{3}+7.2^2-20.2\right) =$$

$$= -\frac{250}{3}+175-100-\left(-\frac{16}{3}+28-40\right) = -\frac{250}{3}+75+\frac{16}{3}+12 = -\frac{234}{3}+87 =$$

$$= -78+87 = 9.$$

Exercice 9

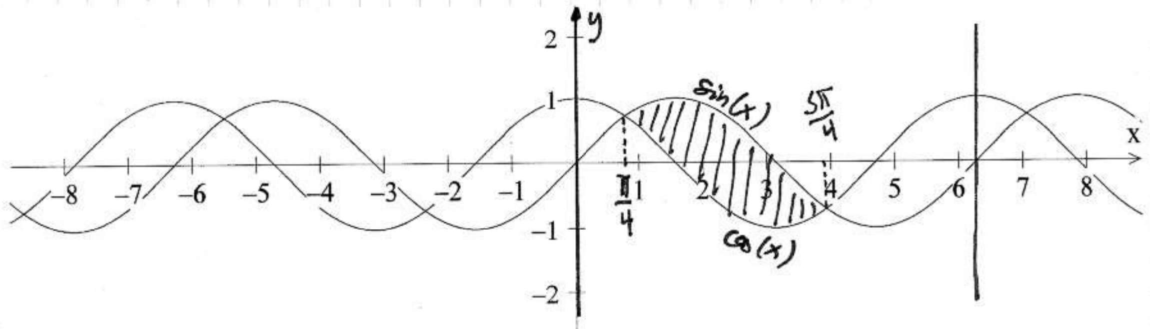
Commençons par chercher les intersections de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sur $[0; 2\pi]$.

On a $\sin(x) = \cos(x) \Longrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \Longrightarrow \tan(x) = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{5\pi}{4}$.

Ainsi, les points d'intersection de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sur $[0; 2\pi]$ sont en $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{5\pi}{4}$.

On a la situation suivante:

a)



b) L'aire de la surface fermée délimitée par les graphes de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sur $[0; 2\pi]$ (surface hachurée) est :

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(x) - \cos(x))\, dx = \Big[-\cos(x) - \sin(x) \Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} =$$

$$= -\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cong 2{,}83.$$

Exercice 10

a) $y = \dfrac{2x-5}{x+3}$: on a $y = \dfrac{2x+6-11}{x+3} = 2 - \dfrac{11}{x+3}$; ainsi, une primitive est

$$F(x) = 2x - 11\ln(|x+3|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

b) $y = \dfrac{x^2-4x+3}{2x-5}$: effectuons la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+3 & 2x-5 \\ \cline{2-2} -\left(x^2-\frac{5}{2}x\right) & \frac{x}{2}-\frac{3}{4} \\ \cline{1-1} -\frac{3}{2}x+3 & \\ -\left(-\frac{3}{2}x+\frac{15}{4}\right) & \\ \cline{1-1} -\frac{3}{4} & \end{array}$$

on a alors $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2x-5}$; ainsi, une primitive est
$F(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3x}{4} - \dfrac{3}{4}\ln(|2x-5|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

c) $y = \dfrac{3x^3-4x^2+7x-5}{2x-1}$: effectuons la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-4x^2+7x-5 & 2x-1 \\ \cline{2-2} -\left(3x^3-\frac{3}{2}x^2\right) & \frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{23}{8} \\ \cline{1-1} -\frac{5}{2}x^2+7x-5 & \\ -\left(-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{4}x\right) & \\ \cline{1-1} \frac{23}{4}x-5 & \\ -\left(\frac{23}{4}x-\frac{23}{8}\right) & \\ \cline{1-1} -\frac{17}{8} & \end{array}$$

on a alors $y = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{5}{4}x + \dfrac{23}{8} - \dfrac{17}{8}\cdot\dfrac{1}{2x-1}$; ainsi, une primitive
est $F(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{5}{8}x^2 + \dfrac{23}{8}x - \dfrac{17}{8}\ln(|2x-1|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

d) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$: Comme $x^2-4 = (x+2)(x-2)$, on va chercher A et B tels que $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2} = \dfrac{1}{x^2-4}$;
on a $\dfrac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow A(x-2)+B(x+2) = 1$
$\Rightarrow Ax - 2A + Bx + 2B = 1 \Rightarrow (A+B)x - 2A + 2B = 1$; par identification des termes, on a $A+B=0$ et $-2A+2B=1 \Rightarrow B=-A$ et $-2A-2A=1$
$\Rightarrow A = -\dfrac{1}{4}$ et $B = \dfrac{1}{4}$;

on a ainsi $y = \dfrac{1}{x^2-4} = -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x-2}$; une primitive est alors
$F(x) = -\dfrac{1}{4}\ln(|x+2|) + \dfrac{1}{4}\ln(|x-2|) = \dfrac{1}{4}\left(\ln(|x-2|) - \ln(|x+2|)\right) =$
$= \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{|x-2|}{|x+2|}\right) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

e) $y=\frac{1}{x^2+1}$: d'après Formulaire et Tables p. 78, on sait qu'une primitive de $\frac{1}{x^2+a^2}$ est $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$; ici $a=1$ et, donc, une primitive de $y=\frac{1}{x^2+1}$ est $\arctan(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

f) $y=\frac{1}{x^2-6x+9}$: Comme $x^2-6x+3=(x-3)^2$, on a $y=\frac{1}{(x-3)^2}=(x-3)^{-2}$; une primitive est alors $F(x)=\frac{(x-3)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x-3}+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Exercice 11

La formule d'intégration par parties est : $\int u\cdot v'dx = uv-\int u'\cdot v\,dx$.

a) $y=x\cdot\cos(x)$: on pose $u=x$ et $v'=\cos(x)$; on a $u'=1$ et $v=\sin(x)$; ainsi

$$\int x\cos(x)dx=\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx = x\sin(x)-\int 1\cdot\sin(x)dx=$$
$$=x\sin(x)-(-\cos(x))=x\sin(x)+\cos(x)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

b) $y=x.\ln(x)$: on pose $u=\ln(x)$ et $v'=x$; on a $u'=\frac{1}{x}$ et $v=\frac{x^2}{2}$; ainsi

$$\int x\ln(x)dx=\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

c) $y=\ln(x)=\ln(x)\cdot 1$: on pose $u=\ln(x)$ et $v'=1$; on a $u'=\frac{1}{x}$ et $v=x$; ainsi

$$\int\ln(x)dx=\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx=x\ln(x)-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=$$
$$=x\ln(x)-\int 1dx=x\ln(x)-x=x(\ln(x)-1)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

d) $y=\frac{\ln(x)}{x}=\ln(x)\cdot\frac{1}{x}$: on pose $u=\ln(x)$ et $v'=\frac{1}{x}$; on a $u'=\frac{1}{x}$ et $v=\ln(x)$; ainsi

$$\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx=\ln^2(x)-\int\frac{\ln(x)}{x}dx$$
$$\Rightarrow 2\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\ln^2(x)\Rightarrow\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\frac{\ln^2(x)}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

e) $y=x\cdot e^{-x}$: on pose $u=x$ et $v'=e^{-x}$; on a $u'=1$ et $v=-e^{-x}$; ainsi

$$\int x.e^{-x}dx=\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx=-xe^{-x}-\int 1\cdot(-e^{-x})dx=$$
$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}=-(x+1)e^{-x}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

f) $y=x^2\cdot e^{-x}$: on pose $u=x^2$ et $v'=e^{-x}$; on a $u'=2x$ et $v=-e^{-x}$; ainsi

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx=\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx=-x^2e^{-x}-\int 2x(-e^{-x})dx=$$
$$=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\left(-(x+1)e^{-x}\right)\quad\text{(d'après e))}$$
$$=(-x^2-2x-2)e^{-x}=-(x^2+2x+2)e^{-x}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

g) $y=e^x\cdot\sin(x)$: on pose $u=e^x$ et $v'=\sin(x)$; on a $u'=e^x$ et $v=-\cos(x)$; ainsi

$$\int e^x\cdot\sin(x)=\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx=-e^x\cos(x)+\int e^x\cos(x)dx\ ;$$

on intègre par parties une 2e fois : on pose $u = e^x$ et $v' = \cos(x)$; on a $u' = e^x$ et $v = \sin(x)$; ainsi $\int e^x \cos(x)\,dx = \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx =$
$= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$; on obtient alors :

$$\int e^x \cdot \sin(x) = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow 2\int e^x \cdot \sin(x) = (\sin(x) - \cos(x))e^x \Longrightarrow \int e^x \sin(x) = \frac{(\sin(x) - \cos(x))e^x}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

h) $y = e^x \cdot \cos(x)$: d'après g), $\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$ et $\int e^x \sin(x)\,dx =$
$= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx$; on obtient donc :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow 2\int e^x \cos(x) = (\sin(x) + \cos(x))e^x \Longrightarrow \int e^x \cos(x) = \frac{(\sin(x) + \cos(x))e^x}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

i) $y = \cos(x) \cdot \sin(x)$: on pose $u = \sin(x)$ et $v' = \cos(x)$; on a $u' = \cos(x)$ et $v = \sin(x)$; ainsi

$$\int \cos(x) \cdot \sin(x)\,dx = \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx =$$
$$= \sin^2(x) - \int \cos(x) \sin(x)\,dx$$
$$\Longrightarrow 2\int \cos(x) \cdot \sin(x)\,dx = \sin^2(x) \Longrightarrow \int \cos(x) \sin(x)\,dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R};$$

si on avait posé $u = \cos(x)$ et $v' = \sin(x)$, on aurait eu $u' = -\sin(x)$ et $v = -\cos(x)$; ainsi $\int \cos(x) \cdot \sin(x)\,dx = \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx =$

$$= -\cos^2(x) - \int \cos(x) \sin(x)\,dx$$
$$\Longrightarrow 2\int \cos(x) \sin(x)\,dx = -\cos^2(x) \Longrightarrow \int \cos(x) \sin(x)\,dx = -\frac{\cos^2(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R};$$

or $\frac{\sin^2(x)}{2} + c = \frac{1 - \cos^2(x)}{2} + c = -\frac{\cos^2(x)}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + c}_{c'} = -\frac{\cos^2(x)}{2} + c'$;

ce sont donc bien les mêmes primitives.

Exercice 12

$y = \sin^2(x)$: en posant $u = \sin(x)$ et $v' = \sin(x)$; on a $u' = \cos(x)$ et $v = -\cos(x)$; avec la formule d'intégration par parties, on a alors :

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx ;$$

Comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on a $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$; ainsi :

$$\int \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \left(1 - \sin^2(x)\right) dx =$$

$$= -\sin(x)\cos(x) + \underbrace{\int 1\,dx}_{x} - \int \sin^2(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow 2\int \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + x$$

$$\Longrightarrow \int \sin^2(x)\,dx = \frac{-\sin(x)\cos(x) + x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$y = \cos^2(x)$: comme $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ et $\int \sin^2(x) = \frac{-\sin(x)\cos(x) + x}{2}$ (voir ci-dessus),

on a $\int \cos^2(x)\,dx = \int \left(1 - \sin^2(x)\right) dx = \int 1\,dx - \int \sin^2(x)\,dx =$

$$= x - \frac{-\sin(x)\cos(x) + x}{2} = \frac{\sin(x)\cos(x) + x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13

a) $y = 3x \cdot e^{-x^2}$: la dérivée de e^{-x^2} est $-2xe^{-x^2}$;
ainsi la dérivée de $-\frac{3}{2}e^{-x^2}$ est $-\frac{3}{2}\cdot(-2xe^{-x^2}) = 3xe^{-x^2}$;
par conséquent une primitive de $3xe^{-x^2}$ est $-\frac{3}{2}e^{-x^2}+c$, $c \in \mathbb{R}$.

b) $y = \sin(3x-5)$: une primitive est $-\frac{1}{3}\cos(3x-5)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

c) $y = 5x\cos(x^2-1)$: la dérivée de $\sin(x^2-1)$ est $2x\cos(x^2-1)$;
ainsi la dérivée de $\frac{5}{2}\sin(x^2-1)$ est $\frac{5}{2}\cdot 2x\cos(x^2-1) = 5x\cos(x^2-1)$;
par conséquent une primitive de $5x\cos(x^2-1)$ est $\frac{5}{2}\sin(x^2-1)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

d) $y = \frac{3x}{x^2+5}$: la dérivée de $\ln(x^2+5)$ est $\frac{1}{x^2+5}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+5}$;
ainsi la dérivée de $\frac{3}{2}\ln(x^2+5)$ est $\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+5} = \frac{3x}{x^2+5}$;
par conséquent une primitive de $\frac{3x}{x^2+5}$ est $\frac{3}{2}\ln(x^2+5)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

e) $y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$: la dérivée de $\ln(|\cos(x)|)$ est $\frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\sin(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$;
ainsi la dérivée de $-\ln(|\cos(x)|)$ est $\tan(x)$;
par conséquent une primitive de $\tan(x)$ est $-\ln(|\cos(x)|)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

f) $y = \frac{3x-6}{x^2-4x+9}$: la dérivée de $\ln(|x^2-4x+9|)$ est $\frac{1}{x^2-4x+9}\cdot(2x-4)$;
ainsi la dérivée de $\frac{3}{2}\ln(|x^2-4x+9|)$ est $\frac{3}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} = \frac{3x-6}{x^2-4x+9}$;
par conséquent une primitive de $\frac{3x-6}{x^2-4x+9}$ est $\frac{3}{2}\ln(|x^2-4x+9|)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

g) $y = x^2 \cdot e^{-2x^3}$: la dérivée de $e^{-2x^3} = -6x^2e^{-2x^3}$;
ainsi la dérivée de $-\frac{1}{6}e^{-2x^3}$ est $-\frac{1}{6}(-6x^2e^{-2x^3}) = x^2e^{-2x^3}$;
par conséquent une primitive de $x^2e^{-2x^3}$ est $-\frac{1}{6}e^{-2x^3}+c$, $c \in \mathbb{R}$.