NOMBRES COMPLEXES

Corrigés des exercices

Exercice 7.1.

Dans $\mathbb{R}$, on a : $\sqrt{1600} = 40$, $\sqrt{-9}$ n'existe pas, $\sqrt{-4}$ n'existe pas, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{0} = 0$.

Avec $i^2 = -1$, c'est-à-dire $i = \sqrt{-1}$, on a : $\sqrt{-9} = \sqrt{9\cdot(-1)} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} = 3i$ et
$\sqrt{-4} = \sqrt{4\cdot(-1)} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 3i$.

Dans $\mathbb{R}$: $3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$;
$x^2 + 100 = 0 \Rightarrow x^2 = -100 \Rightarrow$ pas de solution ($x^2 \geqslant 0$ si $x \in \mathbb{R}$) ;
$7x^2 + 100 = 37 \Rightarrow 7x^2 = -63 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow$ pas de solution ($x^2 \geqslant 0$ si $x \in \mathbb{R}$).

Avec $i^2 = -1$, c'est-à-dire $i = \sqrt{-1}$: $x^2 + 100 = 0 \Rightarrow x^2 = -100 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-100} = \pm\sqrt{100\cdot(-1)} =$
$= \pm\sqrt{100}\cdot\sqrt{-1} = \pm 10i$;
$7x^2 + 100 = 37 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9\cdot(-1)} =$
$= \pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} = \pm 3i$.

Avec l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$:

$x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6)(x-6)$;

$4x^6 - 81 = (2x^3)^2 - (9)^2 = (2x^3+9)(2x^3-9)$;

$x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2 = (x+i)(x-i)$ (puisque $i^2 = -1$) ;

$25x^2 + 1{,}21 = 25x^2 - (-1{,}21) = (5x)^2 - 1{,}21\cdot(-1) = (5x)^2 - 1{,}21i^2 = (5x)^2 - (1{,}1i)^2 =$
$= (5x + 1{,}1i)(5x - 1{,}1i)$.

Avec la formule de Viète :

$x^2 + 5x + 6$: $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2} = \dfrac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$
$\Rightarrow x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$;

$x^2 - x - 2$: $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$
$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$;

$14x^2 - 17x - 6$: $14x^2 - 17x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4.14.(-6)}}{2\cdot 14} = \dfrac{17 \pm 25}{2\cdot 14} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{7} \end{cases}$
$\Rightarrow 14x^2 - 17x - 6 = 14\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{2}{7}\right) =$
$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\cdot 7\left(x + \frac{2}{7}\right) = (2x-3)(7x+2)$;

x^2-4x+9: $\quad x^2-4x+9=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot9}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-20}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{-5}}{2}=$

$$=2\pm\sqrt{-5}=2\pm\sqrt{5\cdot(-1)}=2\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}=2\pm i\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x^2-4x+9=(x-2-i\sqrt{5})(x-2+i\sqrt{5});$$

$3x^2+x+1$: $\quad 3x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{11\cdot(-1)}}{6}=$

$$=\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{6}$$

$$\Rightarrow 3x^2-4x+9=3\left(x-\frac{-1+i\sqrt{11}}{6}\right)\left(x-\frac{-1-i\sqrt{11}}{6}\right)=$$

$$=3\left(x+\frac{1-i\sqrt{11}}{6}\right)\left(x+\frac{1+i\sqrt{11}}{6}\right);$$

$-x^2+17x+29$: $\quad -x^2+17x+29=0 \Rightarrow x=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\cdot(-1)\cdot29}}{2}=\frac{-17\pm\sqrt{405}}{2}=\frac{-17\pm9\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow -x^2+17x+29=-\left(x-\frac{-17+9\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-17-9\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$=-\left(x+\frac{17-9\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{17+9\sqrt{5}}{2}\right).$$

Exerciu 7.2.

a. $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \qquad (i^2 = -1).$

b. $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1.$

c. $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$

d. $i^{17} = i^{16} \cdot i = (i^4)^4 \cdot i = 1^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$

e. $-4i^5 + 3i^3 + i^2 = -4i^4 \cdot i + 3i^2 \cdot i + i^2 = -4 \cdot 1 \cdot i + 3(-1)\cdot i - 1 = -4i - 3i - 1 = -7i - 1.$

f. $(-7+3i)^2 = 49 - 42i + 9i^2 = 49 - 42i + 9\cdot(-1) = 49 - 42i - 9 = 40 - 42i.$

g. $(1+i)(1-i)(2+2i) = (1^2 - i^2)(2+2i) = (1-(-1))(2+2i) = 2(2+2i) = 4+4i.$

h. $(3+i)(3-i)^3 = (3+i)(3-i)(3-i)^2 = (3^2 - i^2)(9 - 6i + i^2) = (9+1)(9-6i-1) = 10(8-6i) =$
$= 80 - 60i$

Exercice 7.3.

Si $z = x+yi$, $\bar{z}$, le conjugué de z, est $\bar{z} = x-yi$.

a. $z+\bar{z} = x+yi+x-yi = 2x$.

b. $z\cdot\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2-(yi)^2 = x^2-y^2i^2 = x^2-y^2\cdot(-1) = x^2+y^2$.

c. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+yi} = \dfrac{1\cdot(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} = \dfrac{x-yi}{z\cdot\bar{z}} = \dfrac{x-yi}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}\cdot i$.

d. $z+\bar{z} = 1 \Rightarrow 2x = 1$ d'après a.

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2}+yi$, $y \in \mathbb{R}$ quelconque.

e. $z\cdot\bar{z} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ d'après b.

$\Rightarrow (x;y)$ est un point du cercle centré en $(0;0)$ de rayon 1

$\Rightarrow x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $\alpha \in [0;2\pi]$

$\Rightarrow z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in [0,2\pi]$ quelconque.

Exercice 7.4.

a. $\frac{3-2i}{-1+i} = \frac{(3-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{(3-2i)(-1-i)}{(-1)^2-i^2} = \frac{(3-2i)(-1-i)}{1-(-1)} = \frac{(3-2i)(-1-i)}{2} =$

$= \frac{-3-3i+2i+2i^2}{2} = \frac{-3-i-2}{2} = \frac{-5-i}{2} = -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i.$

b. $\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i} = \frac{(5+5i)(4+3i)+20(3-4i)}{(3-4i)(4+3i)} = \frac{20+15i+20i+15i^2+60-80i}{12+9i-16i-12i^2} =$

$= \frac{20+15i+20i-15+60-80i}{12+9i-16i+12} = \frac{65-45i}{24-7i} = \frac{(65-45i)(24+7i)}{(24-7i)(24+7i)} =$

$= \frac{1560+455i-1080i-315i^2}{24^2-49i^2} = \frac{1560+455i-1080i+315}{576+49} =$

$= \frac{1875-625i}{625} = 3-i.$

c. $\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} = \frac{3(i^2)^{15}-i^{18}\cdot i}{2i-1} = \frac{3(-1)^{15}-(i^2)^9\cdot i}{2i-1} = \frac{3\cdot(-1)-(-1)^9\cdot i}{2i-1} =$

$= \frac{-3-(-1)\cdot i}{2i-1} = \frac{-3+i}{2i-1} = \frac{(-3+i)(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{-6i-3+2i^2+i}{(2i)^2-1^2} =$

$= \frac{-6i-3-2+i}{4i^2-1} = \frac{-5-5i}{-4-1} = \frac{-5-5i}{-5} = 1+i.$

d. $3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = 3\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} - 2\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2} = 3\frac{1+2i+i^2}{1-2i+i^2} - 2\cdot\frac{1-2i+i^2}{1+2i+i^2} =$

$= 3\frac{1+2i-1}{1-2i-1} - 2\cdot\frac{1-2i-1}{1+2i-1} = 3\frac{2i}{-2i} - 2\cdot\frac{-2i}{2i} = 3\cdot(-1)-2\cdot(-1) =$

$= -3+2 = -1.$

e. $(2i-1)^2\left(\frac{4}{1-i}+\frac{2-i}{1+i}\right) = (4i^2-4i+1)\cdot\frac{4(1+i)+(2-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} =$

$= (-4-4i+1)\cdot\frac{4+4i+2-2i-i+i^2}{1^2-i^2} = (-3-4i)\cdot\frac{4+4i+2-2i-i-1}{1+1} =$

$= (-3-4i)\cdot\frac{5+i}{2} = \frac{(-3-4i)(5+i)}{2} = \frac{-15-3i-20i-4i^2}{2} = \frac{-15-3i-20i+4}{2} =$

$= \frac{-11-23i}{2} = -\frac{11}{2}-\frac{23}{2}i.$

f) $\frac{i^4+9}{i^7} = \frac{(i^2)^2+9}{i^6\cdot i} = \frac{(-1)^2+9}{(i^2)^3\cdot i} = \frac{1+9}{(-1)^3\cdot i} = \frac{10}{-i} = -\frac{10}{i} = -\frac{10i}{i^2} = -\frac{10i}{-1} = 10i.$

Exercice 7.5.

Si $z = a+ib$, son argument est $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ $(a \neq 0)$ et son module est $r = \sqrt{a^2+b^2}$.
On peut alors écrire $z = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi)$, ce qu'on résume en $z = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$.
Si $z = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$, alors $z = a+ib$ avec $a = r\cos(\varphi)$ et $b = r\sin(\varphi)$.

a. $z_1 = -3+4i$: on a $a=-3$ et $b=4 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-3}\right) \cong -53,13°$ ou $-53,13° + 180° =$
$= 126,87°$ et $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$;
avec $r=5$ et $\varphi \cong -53,13°$, on a $r\cos(\varphi) = 5\cdot\cos(-53,13°) = 3 \neq -3$;
ainsi $r=5$ et $\varphi \cong 126,87°$ et on peut écrire $z_1 = 5\,\mathrm{cis}(126,87°)$.

b. $z_2 = 1+i$: on a $a=1$ et $b=1 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = 45°$ ou $45° + 180° = 225°$
et $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; avec $r = \sqrt{2}$ et $\varphi = 45°$, on a $r\cos(\varphi) =$
$= \sqrt{2}\cos(45°) = 1$ et $r\sin(\varphi) = \sqrt{2}\sin(45°) = 1$;
ainsi $r = \sqrt{2}$ et $\varphi = 45°$ et on peut écrire $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}(45°)$.

c. $z_3 = z_1 + z_2 = -3+4i+1+i = -2+5i$: on a $a=-2$ et $b=5 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{5}{-2}\right) \cong -68,2°$
ou $-68,2° + 180° = 111,8°$ et $r = \sqrt{(-2)^2+5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$;
avec $\varphi \cong -68,2°$ et $r = \sqrt{29}$, on a $r\cos(\varphi) \cong \sqrt{29}\cos(-68,2°) = 2 \neq -2$;
ainsi $r = \sqrt{29}$ et $\varphi \cong 111,8°$ et on peut écrire $z_3 = \sqrt{29}\,\mathrm{cis}(111,8°)$.

d. $z_4 = z_1 \cdot z_2 = (-3+4i)(1+i) = -3-3i+4i+4i^2 = -3-3i+4i-4 = -7+i$: on a $a=-7$ et $b=1$
$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-7}\right) \cong -8,13°$ ou $-8,13° + 180° = 171,87°$ et $r = \sqrt{(-7)^2+1^2} =$
$= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; avec $\varphi = -8,13°$ et $r = 5\sqrt{2}$, on a $r\cos(\varphi) =$
$= 5\sqrt{2}\cos(-8,13) = 7 \neq -7$;
ainsi $r = 5\sqrt{2}$ et $\varphi \cong 171,87°$ et on peut écrire $z_4 = 5\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(171,87°)$.

e. $z_5 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-3+4i}{1+i} = \frac{(-3+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-3+3i+4i-4i^2}{1^2-i^2} = \frac{-3+3i+4i+4}{1+1} = \frac{1+7i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$:
on a $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{7}{2} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{7/2}{1/2}\right) = \tan^{-1}(7) \cong 81,87°$ ou
$81,87° + 180° = 261,87°$ et $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2} =$
$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$; avec $\varphi \cong 81,87°$ et $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, on a $r\cos(\varphi) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos(81,87°) =$
$= 0,5$ et $r\sin(\varphi) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\sin(81,87°) = 3,5$;
ainsi $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ et $\varphi \cong 81,87°$ et on peut écrire $z_5 = \frac{5\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cis}(81,87°)$.

f. $z_6 = \sqrt{3} - i$: on a $a = \sqrt{3}$ et $b = -1 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -30°$ ou $-30° + 180° = 150°$ et
$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$; avec $\varphi = -30°$ et $r = 2$, on a
$r\cos(\varphi) = 2\cos(-30°) = 1,73 = \sqrt{3}$ et $r\sin(\varphi) = 2\sin(-30°) = -1$;

ainsi $r = 2$ et $\varphi = -30° = 330°$ et $z_6 = 2\,\mathrm{cis}(330°)$.

g. $z_7 = z_6^2 = (\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2\sqrt{3}i + i^2 = 3 - 2\sqrt{3}i - i = 2 - 2\sqrt{3}i$: on a $a = 2$ et $b = -2\sqrt{3}$
$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) = -60°$ ou $-60° + 180° = 120°$ et $r = \sqrt{a^2 + b^2} =$
$= \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$; avec $\varphi = -60°$ et $r = 4$, on a
$r\cos(\varphi) = 4\cos(-60°) = 2$ et $r\sin(\varphi) = 4\sin(-60°) = -3{,}46 = -2\sqrt{3}$;
ainsi $r = 4$ et $\varphi = -60° = 300°$ et $z_7 = 4\,\mathrm{cis}(300°)$.

h. $z_8 = z_6^3 = z_6^2 \cdot z_6 = z_7 \cdot z_6 = (2 - 2\sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{3} - 2i - 2\sqrt{3}\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i^2 =$
$= 2\sqrt{3} - 2i - 2 \cdot 3i - 2\sqrt{3} = -2i - 6i = -8i$: on a $a = 0$ et $b = -8$;
Comme $a = 0$, on ne peut pas calculer $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$; on a cependant
$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = \sqrt{64} = 8$; on doit avoir $a = r\cos(\varphi)$
$\Rightarrow 0 = 8\cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$ ou $270°$; avec $\varphi = 90°$
et $r = 8$, on a $r\cos(\varphi) = 8\cos(90°) = 8 \cdot 0 = 0$ et $r\sin(\varphi) = 8 \cdot \sin(90°) =$
$= 8 \cdot 1 = 8 \neq -8$;
ainsi $r = 8$ et $\varphi = 270°$ et on peut écrire $z_8 = 8\,\mathrm{cis}(270°)$.

i. $z_9 =$ une racine de z_6, $z_6 = \sqrt{3} - i$:

1e méthode : on cherche $w = x + yi$ tel que $w^2 = z_6$; on a $w^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2 i^2 =$
$= x^2 + 2xyi - y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$; pour que ce dernier terme soit égal à $\sqrt{3} - i$,
les parties réelles doivent être égales : $x^2 - y^2 = \sqrt{3}$, et la partie imaginaire aussi :
$2xy = -1$; on obtient donc le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ 2xy = -1 \end{cases}$; de la 2e équation, on
obtient $x = -\frac{1}{2y}$ ($y \neq 0$ car, sinon $2xy = 0 \neq -1$) ; par substitution dans la
1e équation, on obtient $\left(-\frac{1}{2y}\right)^2 - y^2 = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{4y^2} - y^2 = \sqrt{3} \Rightarrow 1 - 4y^4 = 4\sqrt{3}y^2$
$\Rightarrow 4y^4 + 4\sqrt{3}y^2 - 1 = 0$, ce qui est une équation bicarrée ; on pose
$u = y^2$ et l'équation s'écrit $4u^2 + 4\sqrt{3}u - 1 = 0$, équation du 2e degré de la
forme $au^2 + bu + c = 0$ avec $a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$, $c = -1$; on a $\Delta = b^2 - 4ac =$
$= (4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 16 \cdot 3 + 16 = 16 \cdot 4 = 64$ et $\sqrt{\Delta} = 8$; les solutions de
$4u^2 + 4\sqrt{3}u - 1 = 0$ sont donc $u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4\sqrt{3} \pm 8}{2 \cdot 4} = \frac{-\sqrt{3} \pm 2}{2}$; comme
$u = y^2 \geq 0$, le cas $u = \frac{-\sqrt{3} - 2}{2} < 0$ est exclu ; ainsi $u = \frac{-\sqrt{3} + 2}{2}$ et on en
déduit que $y = \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$; comme $x = -\frac{1}{2y}$, on obtient $x =$
$= -\frac{1}{2 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)} = \mp \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{3}}} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2}} =$
$= \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4 - 3}} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \mp\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} = \mp\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$; on obtient donc 2
couples de solutions : $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \text{ et } y = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$; il y a donc 2 w

possibles: $w = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$ et $w = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$.

Transformons les 2w en $r\,cis(\varphi)$:

$w = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$: on a $a = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ et $b = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}} =$

$= -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} =$

$= -\sqrt{\frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3}} = -\sqrt{7-4\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right) = -15°$ ou

$-15° + 180° = 165°$; en outre $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}$;

avec $\varphi = -15°$, on a $r\cos(\varphi) = \sqrt{2}\cos(-15°) = a$ et $r\sin(\varphi) = \sqrt{2}\sin(-15°) =$

$= b$; donc $w = \sqrt{2}\,cis(-15°) = \sqrt{2}\,cis(345°)$;

$w = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$: on a $a = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ et $b = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

Comme ci-dessus $\Rightarrow \varphi = -15°$ ou $-15° + 180° = 165°$; de plus $r = \sqrt{2}$ aussi comme ci-dessus ; avec $\varphi = -15°$, on a $r\cos(\varphi) = \sqrt{2}\cos(-15°) \neq a$; donc $\varphi = -15° + 180° = 165°$; ainsi $w = \sqrt{2}\,cis(165°)$.

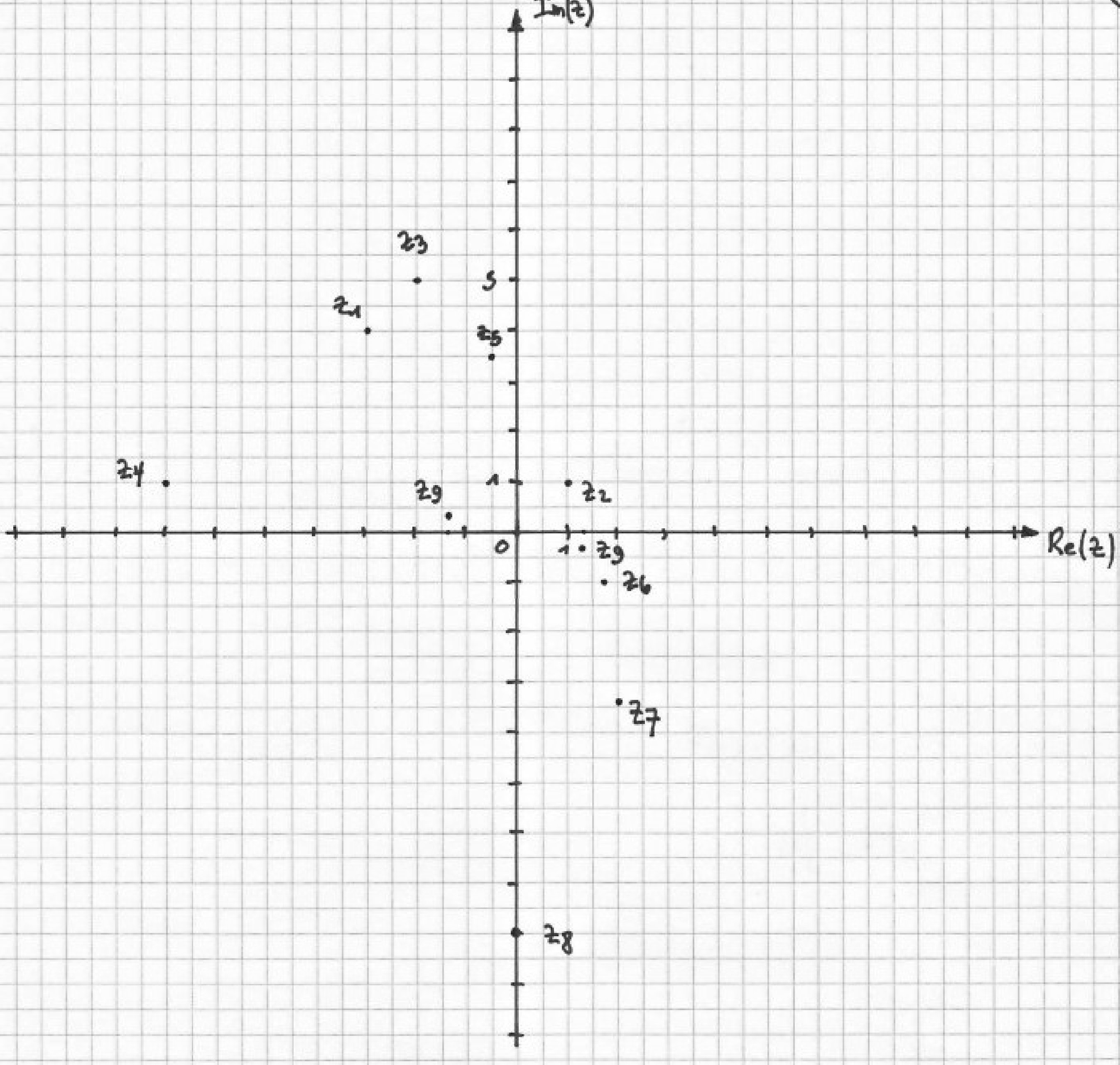
Les racines carrées de z_6 sont donc $z_9 = \sqrt{2}\,cis(165°)$ ou $\sqrt{2}\,cis(345°)$.

2e méthode: on a $z_6 = \sqrt{3} - i$; mettons-le sous la forme $r\,cis(\varphi)$: on a $a = \sqrt{3}$ et $b = -1 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -30°$ ou $-30° + 180°$ et $r =$
$= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$; avec $\varphi = -30°$, on a $r\cos(\varphi) = 2\cos(-30°) =$
$= \sqrt{3} = a$ et $r\sin(\varphi) = 2\sin(-30°) = -1$; ainsi $z_6 = 2\,cis(-30°) =$
$= 2\,cis(330°)$.

Les racines de $z_6 = 2\,cis(330°)$ sont $w = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{330°}{2}\right) = \sqrt{2}\,cis(165°)$ et $w = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{330°}{2} + \frac{360°}{2}\right) = \sqrt{2}\,cis(165° + 180°) = \sqrt{2}\,cis(345°)$.

Les racines carrées de z_6 sont donc $z_9 = \sqrt{2}\,cis(165°)$ et $\sqrt{2}\,cis(345°)$.

On peut alors représenter z_1 à z_9 dans le plan de Gauss:


Im(z)
Re(z)
z3
z1
z5
5
z4
z9
1
z2
0
1
z9
z6
z7
z8

Exercice 7.6

a. $(3-i)z+4=i+1 \Rightarrow (3-i)z=-3+i \Rightarrow z=\frac{-3+i}{3-i}=\frac{-(3-i)}{3-i}=\frac{-1}{1}=-1.$

b. $\frac{z-1}{z+i}=-2+3i \Rightarrow z-1=(-2+3i)(z+i) \Rightarrow z-1=-2z-2i+3zi\underbrace{+3i^2}_{-3}$

$\Rightarrow z-1=-2z+3zi-3-2i \Rightarrow z+2z-3zi=-3-2i+1$

$\Rightarrow 3z-3zi=-2-2i \Rightarrow (3-3i)z=-2-2i$

$\Rightarrow z=\frac{-2-2i}{3-3i}=\frac{(-2-2i)(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)}=\frac{-6-6i-6i-6i^2}{3^2-(3i)^2}=\frac{-6-12i+6}{9+9}=\frac{-12i}{18}=-\frac{2}{3}i.$

c. $(z-1)(i-2)=z \Rightarrow zi-2z-i+2=z \Rightarrow zi-3z=-2+i$

$\Rightarrow (-3+i)z=-2+i \Rightarrow z=\frac{-2+i}{-3+i}=\frac{(-2+i)(3+i)}{(-3+i)(3+i)}=\frac{-6-2i+3i+i^2}{i^2-3^2}=$

$=\frac{-6+i-1}{-1-9}=\frac{-7+i}{-10}=\frac{7}{10}-\frac{1}{10}i.$

d. $\frac{iz+2}{2z+3}=1-i \Rightarrow iz+2=(1-i)(2z+3) \Rightarrow iz+2=2z+3-2zi-3i$

$\Rightarrow iz+2zi-2z=3-3i-2 \Rightarrow 3zi-2z=1-3i$

$\Rightarrow (3i-2)z=1-3i \Rightarrow z=\frac{1-3i}{3i-2}=\frac{(1-3i)(3i+2)}{(3i-2)(3i+2)}=\frac{3i+2-9i^2-6i}{(3i)^2-2^2}=$

$=\frac{3i+2+9-6i}{9i^2-4}=\frac{11-3i}{-9-4}=\frac{11-3i}{-13}=-\frac{11}{13}+\frac{3}{13}i.$

e. $(3+5i)z=-2+4i \Rightarrow z=\frac{-2+4i}{3+5i}=\frac{(-2+4i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}=\frac{-6+10i+12i-20i^2}{3^2-(5i)^2}=$

$=\frac{-6+22i+20}{9-25i^2}=\frac{14-22i}{9+25}=\frac{14-22i}{34}=\frac{7}{17}-\frac{11}{17}i.$

f. $\frac{z}{\bar z}=\frac{-3+4i}{5}$: posons $z=a+bi$; on a $\bar z=a-bi$ et l'équation s'écrit :

$\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{-3+4i}{5} \Rightarrow 5(a+bi)=(-3+4i)(a-bi) \Rightarrow 5a+5bi=-3a+3bi+4ai-4bi^2$

$\Rightarrow 5a+5bi=-3a+3bi+4ai+4b \Rightarrow 5bi-3bi-4b=-3a+4ai-5a$

$\Rightarrow 2bi-4b=4ai-8a \Rightarrow 2b(i-2)=4a(i-2) \Rightarrow 2b=4a \Rightarrow b=2a.$

Ainsi z doit être de la forme $z=a+2ai$. Comme, dans l'équation de départ, on divise par $\bar z$, il faut que $\bar z=0 \Rightarrow z\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$.

Les solutions sont donc de la forme $z=a+2ai$, $a\in\mathbb{R}^*$.

g. $(1+i)z+(3-i)\bar z+4-2i=0$: posons $z=a+bi$; on a $\bar z=a-bi$ et l'équation s'écrit : $(1+i)(a+bi)+(3-i)(a-bi)+4-2i=0$

$\Rightarrow a+bi+ai+bi^2+3a-3bi-ai+bi^2+4-2i=0$

$\Rightarrow a+bi+\cancel{ai}-b+3a-3bi-\cancel{ai}-b+4-2i=0$

$\Rightarrow 4a-2bi-2b+4-2i=0 \Rightarrow 4a-2b+4-(2b+2)i=0$;

on doit donc avoir $4a-2b+4=0$ et $2b+2=0$;

de $2b+2=0$, on tire $2b=-2$ et, donc, $b=-1$;
par substitution dans $4a-2b+4=0$, on obtient $4a+2+4=0 \Rightarrow 4a=-6 \Rightarrow a=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$;
ainsi la solution est $z=-\frac{3}{2}-i$.

h. $\frac{1}{2}z^2+(5+3i)z+10+15i=0$: c'est une équation du 2^e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=\frac{1}{2}$, $b=5+3i$ et $c=10+15i$;
on a $\Delta=b^2-4ac=(5+3i)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(10+15i)=$
$=25+30i+9i^2-2(10+15i)=25+\cancel{30i}-9-20-\cancel{30i}=-4$;
les solutions sont donc $z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(5+3i)\pm\sqrt{-4}}{2\cdot\frac{1}{2}}=-5-3i\pm\sqrt{4\cdot(-1)}=$
$=-5-3i\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=-5-3i\pm2i=$ $-5-3i+2i=-5-i$; $-5-3i-2i=-5-5i$.
Les solutions sont donc $z=-5-i$ et $z=-5-5i$.

i. $8\bar{z}=z^5$: une première solution est $z=0$ (dans ce cas $\bar{z}=0$). Supposons $z\neq0$.
Par multiplication par z, on obtient $8z\bar{z}=z^6$.
Posons $z=a+bi=r\operatorname{cis}(\varphi)$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.
On a $\bar{z}=a-bi$ et $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=r^2$.
En outre, avec $z=r\operatorname{cis}(\varphi)$, on a $z^6=r^6\operatorname{cis}(6\varphi)$ (formule de Moivre).
L'équation $8z\bar{z}=z^6$ s'écrit $8r^2=r^6\operatorname{cis}(6\varphi)$.
Comme $z\neq0$, on a $r\neq0$ et on obtient $8=r^4\operatorname{cis}(6\varphi)$, c'est-à-dire $r^4\cos(6\varphi)+r^4\sin(\varphi)i=8$.
On doit donc avoir $r^4\cos(6\varphi)=8$ et $r^4\sin(6\varphi)=0$.
De la 2^e relation, on tire $\sin(6\varphi)=0 \Rightarrow 6\varphi=k\cdot180°, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \varphi=k\cdot30°$.
Avec $\varphi=k\cdot30°$, $k\in\mathbb{Z}$, on a $\cos(6\varphi)=\cos(k\cdot180°)$, ce qui vaut 1 si k est pair et -1 si k est impair. Comme $r^4\cos(6\varphi)=8$, on doit avoir $\cos(6\varphi)>0$.
Ainsi k est pair et $\cos(6\varphi)=1$. On obtient alors $r^4=8$, d'où $r=\sqrt[4]{8}$.
Si k est pair, on peut écrire $k=2l$, $l\in\mathbb{Z}$, et on a $\varphi=k\cdot30°=2l\cdot30°=l\cdot60°$
On obtient ainsi $z=r\operatorname{cis}(\varphi)=\sqrt[4]{8}\operatorname{cis}(l\cdot60°)$, $l\in\mathbb{Z}$.
Les solutions sont donc $z=0$ et $z=\sqrt[4]{8}\operatorname{cis}(l\cdot60°)$, $l\in\mathbb{Z}$.

Exercice 7.7.

A résoudre : $\begin{cases} z_1 + (2-i)z_2 = -2+i & (1) \\ (1+i)z_1 + z_2 = 1+3i & (2) \end{cases}$

$$(1)\cdot(-1-i) \longrightarrow (-1-i)z_1 + (-1-i)(2-i)z_2 = (-1-i)(-2+i)$$
$$\Longrightarrow -(1+i)z_1 + (-2+i-2i+i^2)z_2 = (2-i+2i-i^2)$$
$$\Longrightarrow -(1+i)z_1 + (-3-i)z_2 = 3+i \quad (3)$$

$$(2)+(3) \longrightarrow z_2 + (-3-i)z_2 = 1+3i+3+i$$
$$\Longrightarrow (-2-i)z_2 = 4+4i$$
$$\Longrightarrow z_2 = \frac{4+4i}{-2-i} = \frac{(4+4i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-8+4i-8i+4i^2}{(-2)^2-i^2} = \frac{-12-4i}{4+1} = -\frac{12}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Dans (1) : $z_1 = -2+i-(2-i)z_2 = -2+i-(2-i)\left(-\frac{12}{5}-\frac{4}{5}i\right) =$
$$= -2+i-\left(-\frac{24}{5}-\frac{8}{5}i+\frac{12}{5}i+\frac{4}{5}i^2\right) = -2+i-\left(-\frac{24}{5}+\frac{4}{5}i-\frac{4}{5}\right) =$$
$$= -2+i-\left(-\frac{28}{5}+\frac{4}{5}i\right) = -2+i+\frac{28}{5}-\frac{4}{5}i = \frac{18}{5}+\frac{1}{5}i.$$

La solution est donc $z_1 = \frac{18}{5}+\frac{1}{5}i$ et $z_2 = -\frac{12}{5}-\frac{4}{5}i$.

Exercice 7.8.

a. -36 : écrivons -36 sous la forme $r\text{cis}(\varphi)$ avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$;
ici $a=-36$ et $b=0$; on a $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-36)^2+0^2}=36$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\tan^{-1}(0)=$
$=k\cdot 180°$, $k\in\mathbb{Z}$; avec $k=0$, on a $\varphi=0$ et $r\cos(\varphi)=36\cos(0)=36\neq a$; on prend
donc $k=1$ et on a $\varphi=180°$; par conséquent $-36=36\text{ cis }(180°)$; on obtient
$\sqrt{-36}=\sqrt{36}\text{ cis }\left(\frac{\varphi}{2}+n\cdot 180°\right)$, $n=0$ ou 1 ;
$n=0$: $\sqrt{-36}=6\text{ cis }\left(\frac{\varphi}{2}\right)=6\text{ cis }(90°)=6\left(\cos(90°)+i\sin(90°)\right)=6i$;
$n=1$: $\sqrt{-36}=6\text{ cis }\left(\frac{\varphi}{2}+180°\right)=6\text{ cis }(90°+180°)=6\left(\cos(270°)+i\sin(270°)\right)=-6i$;
les racines de -36 sont donc $6i$ et $-6i$.

b. $-2i$: écrivons $-2i$ sous la forme $r\text{cis}(\varphi)$ avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$;
ici $a=0$ et $b=-2$; on a $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-2}{0}\right)=$
$=90°+k\cdot 180°$, $k\in\mathbb{Z}$; avec $k=0$, on a $\varphi=90°$ et $r\cos(\varphi)=2\cos(90°)=0=a$ et
$r\sin(\varphi)=2\sin(90°)=2\neq -2$; on prend donc $k=1$ et on a $\varphi=90°+180°=270°$;
par conséquent $-2i=2\text{cis }(270°)$; on obtient $\sqrt{-2i}=\sqrt{2}\text{ cis }\left(\frac{\varphi}{2}+n\cdot 180°\right)$, $n=0$ ou 1;
$n=0$: $\sqrt{-2i}=\sqrt{2}\text{ cis }\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{2}\text{ cis }(135°)=\sqrt{2}\left(\cos(135°)+i\sin(135°)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$
$=-\frac{2}{2}+i\frac{2}{2}=-1+i$;
$n=1$: $\sqrt{-2i}=\sqrt{2}\text{ cis}\left(\frac{\varphi}{2}+180°\right)=\sqrt{2}\text{ cis }(315°)=\sqrt{2}\left(\cos(315°)+i\sin(315°)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$
$=\frac{2}{2}-i\frac{2}{2}=1-i$;
les racines de $-2i$ sont donc $-1+i$ et $1-i$.

c. $5-12i$: écrivons $5-12i$ sous la forme $r\text{cis}(\varphi)$ avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$;
ici $a=5$ et $b=-12$; on a $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-12}{5}\right)=$
$\cong -67{,}38°+k\cdot 180°$, $k\in\mathbb{Z}$; avec $k=0$, on a $\varphi\cong -67{,}38°$ et $r\cos(\varphi)=13\cos(-67{,}38°)=$
$=5=a$ et $r\sin(\varphi)=13\sin(-67{,}38°)=-12=b$; ainsi $\varphi\cong -67{,}38°$; par conséquent
$5-12i=13\text{ cis }(-67{,}38°)$; on obtient $\sqrt{5-12i}=\sqrt{13}\text{ cis }\left(\frac{\varphi}{2}+n\cdot 180°\right)$, $n=0$ ou 1;
$n=0$: $\sqrt{5-12i}=\sqrt{13}\text{ cis }\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{13}\text{ cis }(-33{,}69°)=\sqrt{13}\left(\cos(-33{,}69°)+i\sin(-33{,}69°)\right)=$
$=\sqrt{13}\,(0{,}832-0{,}555\,i)=3-2i$;
$n=1$: $\sqrt{5-12i}=\sqrt{13}\text{ cis}\left(\frac{\varphi}{2}+180°\right)=\sqrt{13}\text{ cis }(-33{,}69°+180°)=\sqrt{13}\text{ cis}(146{,}31°)=$
$=\sqrt{13}\left(\cos(146{,}31°)+i\sin(146{,}31°)\right)=\sqrt{13}\left(-0{,}832+0{,}555\,i\right)=-3+2i$;
les racines de $5-12i$ sont donc $3-2i$ et $-3+2i$.

d. $-15+8i$: écrivons $-15+8i$ sous la forme $r\text{cis}(\varphi)$ avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$;
ici $a=-15$ et $b=8$; on a $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-15)^2+8^2}=17$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{8}{-15}\right)=$
$\cong -28{,}07°+k\cdot 180°$, $k\in\mathbb{Z}$; avec $k=0$, on a $\varphi\cong -28{,}07°$ et $r\cos(\varphi)=17\cos(-28{,}07°)=$

$= 15 \neq a$; on prend donc $k=1$ et on a $\varphi \cong -28,07° + 180° = 151,93°$; par conséquent $-15+8i = 17 \operatorname{cis}(151,93°)$; on obtient $\sqrt{-15+8i} = \sqrt{17} \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{2} + n \cdot 180°\right)$, $n=0$ ou 1 ;

$n=0$: $\sqrt{-15+8i} = \sqrt{17} \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{17} \operatorname{cis}(75,96°) = \sqrt{17}\left(\cos(75,96°) + i\sin(75,96°)\right) =$
$= \sqrt{17}(0,243 + 0,97i) = 1 + 4i$;

$n=1$: $\sqrt{-15+8i} = \sqrt{17} \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\right) = \sqrt{17} \operatorname{cis}(75,96° + 180°) = \sqrt{17} \operatorname{cis}(255,96°) =$
$= \sqrt{17}\left(\cos(255,96°) + i\sin(255,96°)\right) = \sqrt{17}(-0,242 - 0,97i) = -1 - 4i$;

les racines de $-15+8i$ sont donc $1+4i$ et $-1-4i$.

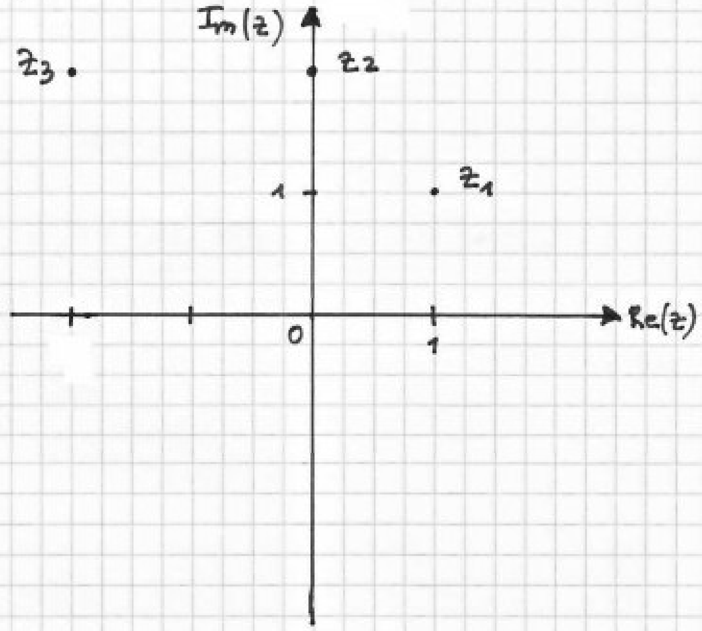
On remarque que les racines carrées w_1 et w_2 d'un nombre complexe z sont opposées l'une de l'autre : $w_2 = -w_1$.

Exercice 7.9.

On a $z_1 = 1+i$, $z_2 = (1+i)^2$ et $z_3 = (1+i)^3$.

$z_2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$

$z_3 = (1+i)^3 = (1+i)^2 \cdot (1+i) = 2i(1+i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2 = -2 + 2i$



$z_1 = 1+i$: module $= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$;

argument $= \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = 45° + k.180°, k \in \mathbb{Z}$; d'après le dessin, on voit que $k=0$ et, ainsi, argument $= 45°$;

$z_2 = 2i$: module $= \sqrt{0^2+2^2} = 2$;

argument $= \tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right) = 90° + k.180°, k \in \mathbb{Z}$; d'après le dessin, on voit que $k=0$ et, ainsi, argument $= 90°$;

$z_3 = -2+2i$: module $= \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

argument $= \tan^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right) = \tan^{-1}(-1) = -45° + k.180°, k \in \mathbb{Z}$; d'après le dessin, on voit que $k=1$ et, ainsi, argument $= -45° + 180° = 135°$.

On remarque que: module de z_2 = (module de z_1)^2;

module de z_3 = (module de z_1)^3;

argument de z_2 = 2 · argument de z_1;

argument de z_3 = 3 · argument de z_1.

Exercice 7.10.

On a $z_1 = r_1 \operatorname{cis}(\varphi_1)$ et $z_2 = r_2 \operatorname{cis}(\varphi_2)$.

a. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \operatorname{cis}(\varphi_1) \cdot r_2 \operatorname{cis}(\varphi_2) = r_1\big(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big)\big(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)\big) =$

$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + i^2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\big) =$

$= r_1 r_2 \Big(\underbrace{\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\big(\underbrace{\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\big)\Big) =$

$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1+\varphi_2)$.

Ainsi $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1+\varphi_2)$.

b. $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{r_1 \operatorname{cis}(\varphi_1)} = \dfrac{1}{r_1} \cdot \dfrac{1}{\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)} = \dfrac{1}{r_1} \cdot \dfrac{\cos(\varphi_1) - i\sin(\varphi_1)}{(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_1)-i\sin(\varphi_1))} =$

$= \dfrac{1}{r_1} \cdot \dfrac{\cos(\varphi_1) - i\sin(\varphi_1)}{\cos^2(\varphi_1) - i^2\sin^2(\varphi_1)} = \dfrac{\cos(\varphi_1) - i\sin(\varphi_1)}{\cos^2(\varphi_1)+\sin^2(\varphi_1)} = \dfrac{1}{r_1}\big(\cos(\varphi_1) - i\sin(\varphi_1)\big)$ $\quad$ (car $\cos^2(\varphi_1)+\sin^2(\varphi_1) = 1$)

$= \dfrac{1}{r_1}\big(\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)\big)$ $\quad$ (car $\cos(-\varphi_1) = \cos(\varphi_1)$ et $\sin(-\varphi_1) = -\sin(\varphi_1)$)

$= \dfrac{1}{r_1} \operatorname{cis}(-\varphi_1)$.

Ainsi $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{r_1} \operatorname{cis}(-\varphi_1)$.

c. $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2} = r_1 \operatorname{cis}(\varphi_1) \cdot \dfrac{1}{r_2} \operatorname{cis}(-\varphi_2)$ $\quad$ (par b.)

$= r_1 \cdot \dfrac{1}{r_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 + (-\varphi_2))$ $\quad$ (par a.)

$= \dfrac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Ainsi $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$.

d. $z_1^n = \underbrace{r_1 \operatorname{cis}(\varphi_1) \cdot r_1 \operatorname{cis}(\varphi_1) \cdot \ldots \cdot r_1 \operatorname{cis}(\varphi_1)}_{n \text{ fois}} = r_1^n \operatorname{cis}(\underbrace{\varphi_1 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_1}_{n \text{ fois}})$ $\quad$ (par a.)

$= r_1^n \operatorname{cis}(n\varphi_1)$.

Ainsi $z_1^n = r_1^n \operatorname{cis}(n\varphi_1)$.

e. $\sqrt[n]{z_1}$: posons $w = \sqrt[n]{z_1}$; on a alors $z_1 = w^n$;

avec $w = r_w \operatorname{cis}(\varphi_w)$ et $z_1 = r_1 \operatorname{cis}(\varphi_1)$, on a

$w^n = r_w^n \operatorname{cis}(n\varphi_w)$ (par c.) et, donc $r_1 \operatorname{cis}(\varphi_1) = r_w^n \operatorname{cis}(n\varphi_w)$;

ainsi $r_1 = r_w^n$ et $\varphi_1 = n\varphi_w + k \cdot 360°$ et, donc ; $r_w = \sqrt[n]{r_1}$ et

$\varphi_w = \dfrac{\varphi_1}{n} + \dfrac{k \cdot 360°}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\varphi_1}{n} + \dfrac{k \cdot 360°}{n}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7.11.

On a $z = a+bi$.

a. $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ = distance de l'origine au point $z = 3 \Rightarrow |z| = 3$ est un cercle centré à l'origine et de rayon 3.

b. $z - \bar{z} = 10i \Rightarrow (a+bi)-(a-bi) = 10i \Rightarrow a+bi-a+bi = 10i \Rightarrow 2bi = 10i \Rightarrow b = 5$, a quelconque $\Rightarrow z = a+5i \Rightarrow z-\bar{z} = 10i$ est une droite horizontale d'ordonnée 5 $(y=5)$.

c. $Re(z)+Im(z)=1 \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow b = 1-a \Rightarrow Re(z)+Im(z)=1$ est une droite affine de la forme $y = -x+1$.

d. $z\cdot\bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 32 \Rightarrow z\cdot\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 = 36 \Rightarrow (z-2)(\bar{z}-2) = 36$

$\Rightarrow (a+bi-2)(a-bi-2) = 36 \Rightarrow (a-2+bi)(a-2-bi) = 36$

$\Rightarrow (a-2)^2 - (bi)^2 = 36 \Rightarrow (a-2)^2 + b^2 = 6^2$

$\Rightarrow z\cdot\bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 32$ est un cercle centré en $z = 2$ $(a=2$ et $b=0)$ et de rayon 6.

e. $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2 \Rightarrow (1+i)(a+bi) + (1-i)(a-bi) = 2$

$\Rightarrow a + \cancel{bi} + \cancel{ai} + bi^2 + a - \cancel{bi} - \cancel{ai} + bi^2 = 2 \Rightarrow 2a + 2bi^2 = 2 \Rightarrow 2a - 2b = 2$

$\Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow b = a-1$

$\Rightarrow (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2$ est une droite affine de la forme $y = x-1$.

f. $(z+\bar{z})^2 + 2i(z-\bar{z}) + 4 = 0 \Rightarrow (a+\cancel{bi}+a-\cancel{bi})^2 + 2i(\cancel{a}+bi-\cancel{a}+bi) + 4 = 0$

$\Rightarrow (2a)^2 + 2i\cdot 2bi + 4 = 0 \Rightarrow 4a^2 - 4b + 4 = 0 \Rightarrow a^2 - b + 1 = 0$

$\Rightarrow b = a^2+1$

$\Rightarrow (z+\bar{z})^2 + 2i(z-\bar{z}) + 4 = 0$ est une parabole de la forme $y = x^2+1$.

Exercice 7.12.

Posons $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$.

a. $\overline{z_1+z_2} = \overline{a_1+b_1 i + a_2 + b_2 i} = \overline{a_1+a_2+(b_1+b_2)i} = a_1+a_2-(b_1+b_2)i = a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i =$
$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Ainsi $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

b. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)} = \overline{a_1a_2 + a_1b_2 i + a_2b_1 i + b_1b_2 i^2} = \overline{a_1a_2 + a_1b_2 i + a_2b_1 i - b_1b_2} =$
$= \overline{a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i} = a_1a_2 - b_1b_2 - (a_1b_2+a_2b_1)i =$
$= a_1a_2 - b_1b_2 - a_1b_2 i - a_2b_1 i = a_1a_2 - a_1b_2 i - a_2b_1 i - b_1b_2 =$
$= a_1a_2 - a_1b_2 i - a_2b_1 i + b_1b_2 i^2 = (a_1-b_1 i)(a_2-b_2)i = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

Ainsi $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

c. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}\right)} = \overline{\left(\frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)}\right)} = \overline{\left(\frac{a_1a_2 - a_1b_2 i + a_2b_1 i - b_1b_2 i^2}{a_2^2 - b_2^2 i^2}\right)} =$

$$= \overline{\left(\frac{a_1a_2 - a_1b_2 i + a_2b_1 i + b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)} = \overline{\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{-a_1b_2 i + a_2b_1 i}{a_2^2+b_2^2}} =$$

$$= \overline{\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{-a_1b_2+a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} - \frac{-a_1b_2+a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}i =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2+a_1b_2 i - a_2b_1 i}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1a_2+a_1b_2 i - a_2b_1 i + b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2+a_1b_2 i - a_2b_1 i - b_1b_2 i^2}{a_2^2 - b_2^2 i^2} = \frac{(a_1-b_1 i)(a_2+b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{a_1-b_1 i}{a_2-b_2 i} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Ainsi $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Exercice 7.13.

a. $2z^2+mz+n=0$, $m,n\in\mathbb{R}$, est une équation du 2^e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=2$, $b=m$, $c=n$; on a $\Delta=b^2-4ac=m^2-4\cdot2\cdot n=m^2-8n$. Les solutions sont ainsi $z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-8n}}{2\cdot2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-8n}}{4}$. On doit donc trouver $m,n\in\mathbb{R}$ tels que $\frac{-m\pm\sqrt{m^2-8n}}{4}=-5-12i$. Comme on obtient un nombre complexe, on doit avoir $m^2-8n<0$ (sinon $\frac{-m\pm\sqrt{m^2-8n}}{4}\in\mathbb{R}$). On obtient ainsi :

$$\frac{-m\pm\sqrt{(8n-m^2)(-1)}}{4}=-5-12i \Rightarrow \frac{-m\pm\sqrt{8n-m^2}\cdot i}{4}=-5-12i$$

$$\Rightarrow \frac{-m}{4}=-5 \text{ et } \frac{\pm\sqrt{8n-m^2}}{4}=-12.$$

De la première de ces relations, on tire $m=20$.
Par substitution dans la seconde, on obtient $\frac{\pm\sqrt{8n-20^2}}{4}=-12$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{8n-400}=-48 \Rightarrow \left(\pm\sqrt{8n-400}\right)^2=(-48)^2 \Rightarrow 8n-400=2304$$

$$\Rightarrow 8n=2704 \Rightarrow n=338.$$

On doit donc avoir $n=338$ et $m=20$.

b. Avec $m=20$ et $n=338$, l'équation s'écrit $2z^5+20z^3+338z=0$

$$\Rightarrow z^5+10z^3+169z=0 \Rightarrow (z^4+10z^2+169)z=0.$$

Ainsi, soit $z=0$, soit $z^4+10z^2+169=0$.
Posons $w=z^2$; la dernière relation s'écrit alors $w^2+10w+169=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $aw^2+bw+c=0$ avec $a=1$, $b=10$ et $c=169$.
On a $\Delta=b^2-4ac=10^2-4\cdot1\cdot169=100-676=-576$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-576}=24i$.
Les solutions sont ainsi $w=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-10\pm24i}{2\cdot1}=-5\pm12i$ (ce qui est cohérent avec la partie a. Notons $w_1=-5+12i$ et $w_2=-5-12i$. On doit chercher les z égaux à $\sqrt{w_1}$ et $\sqrt{w_2}$.
Commençons par écrire w_1 et w_2 sous forme trigonométrique $r\operatorname{cis}(\varphi)$.
Pour w_1, on a $r=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{12}{-5}\right)=-67{,}38°+$ $+k\cdot180°$; avec $k=0$, on a $r\cos(\varphi)=13\cos(-67{,}38°)=5\neq-5$; on prend donc $k=1$ et $\varphi=112{,}62°$; on a ainsi $w_1=13\operatorname{cis}(112{,}62°)$; par conséquent, on a $z_1=\sqrt{w_1}=\sqrt{13}\operatorname{cis}\left(\frac{112{,}62°}{2}\right)=\sqrt{13}\operatorname{cis}(56{,}31°)$ et $z_2=\sqrt{w_1}=\sqrt{13}\operatorname{cis}\left(\frac{112{,}62°}{2}+180°\right)=$ $=\sqrt{13}\operatorname{cis}(236{,}31°)$; ainsi $z_1=\sqrt{13}\left(\cos(56{,}31°)+i\sin(56{,}31°)\right)=2+3i$ et $z_2=\sqrt{13}\left(\cos(236{,}31°)+i\sin(236{,}31°)\right)=-2-3i$.
Pour $w_2=-5-12i$, on a $r=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=13$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{-12}{-5}\right)=67{,}38°+$

$+ k\cdot 180°$; avec $k=0$, on a $r\cos(\varphi) = 13\cos(67{,}38°) = 5 \neq -5$; on prend donc $k=1$ et $\varphi = 247{,}38°$; on a ainsi $w_2 = 13 \operatorname{cis}(247{,}38°)$; par conséquent, on a $z_3 = \sqrt{w_2} = \sqrt{13}\operatorname{cis}\left(\frac{247{,}38°}{2}\right) = \sqrt{13}\operatorname{cis}(123{,}69°)$ et $z_4 = \sqrt{w_2} = \sqrt{13}\operatorname{cis}\left(\frac{247{,}38°}{2} + 180°\right) =$
$= \sqrt{13}\operatorname{cis}(303{,}69°)$; ainsi $z_3 = \sqrt{13}\left(\cos(123{,}69°) + i\sin(123{,}69°)\right) = -2+3i$ et $z_4 = \sqrt{13}\left(\cos(303{,}69°) + i\sin(303{,}69°)\right) = 2-3i$.

Les cinq racines sont $z=0$, $z=2+3i$, $z=-2-3i$, $z=-2+3i$ et $z=2-3i$.

Exercice 7.14.

a. On a $5(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ) = 5\operatorname{cis}(15^\circ)$ et $\left(5(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)\right)^7 =$
$= (5\cdot\operatorname{cis}(15^\circ))^7 = 5^7\cdot\operatorname{cis}(7\cdot 15^\circ) = 5^7\operatorname{cis}(105^\circ) = 5^7(\cos(105^\circ) + i\sin(105^\circ)) =$
$= 78'125\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{78'125(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} + \frac{78'125(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}i$;
(on a $\cos(105^\circ) = -\cos(75^\circ) = -\sin(15^\circ) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(105^\circ) = \sin(75^\circ) = \cos(15^\circ) =$
$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$).

De plus $4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 4\operatorname{cis}(45^\circ)$ et $\left(4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\right)^3 =$
$= (4\operatorname{cis}(45^\circ))^3 = 4^3\cdot\operatorname{cis}(3\cdot 45^\circ) = 4^3\operatorname{cis}(135^\circ) = 4^3(\cos(135^\circ) + i\sin(135^\circ)) =$
$= 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -32\sqrt{2} + 32\sqrt{2}i$.
(on a $\cos(135^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(135^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

Ainsi $\frac{(5(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ))^7}{(4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ))^3} = \frac{-\frac{78'125(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} + \frac{78'125(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}i}{-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i} =$

$$= \frac{78'125}{4}\cdot\frac{1}{32\sqrt{2}}\cdot\frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + (\sqrt{6}+\sqrt{2})i}{-1+i} = \frac{78'125}{128\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i}{-1+i} =$$
$$= \frac{78'125}{128\sqrt{2}}\cdot\frac{(-\sqrt{6}+\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} =$$
$$= \frac{78'125}{128\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-(\sqrt{6}+\sqrt{2})i+\sqrt{6}i-\sqrt{2}i-(\sqrt{6}+\sqrt{2})i^2}{(-1)^2-i^2} =$$
$$= \frac{78'125}{128\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}\cancel{-\sqrt{2}}\cancel{-\sqrt{6}i}-\sqrt{2}i\cancel{+\sqrt{6}i}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}\cancel{+\sqrt{2}}}{1+1} =$$
$$= \frac{78'125}{128\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}i}{2} = \frac{78'125}{128\sqrt{2}}(\sqrt{6}-\sqrt{2}i) = \frac{78'125\sqrt{6}}{128\sqrt{2}} - \frac{78'125\sqrt{2}}{128\sqrt{2}}i =$$
$$= \frac{78'125\sqrt{3}}{128} - \frac{78'125}{128}i \cong 1057{,}16 - 610{,}35i.$$

b. On a $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{1^2-3i^2} = \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{1+3} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ecrivons ce résultat sous la forme $r\operatorname{cis}(\varphi)$: on a $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$
et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = 120^\circ$ (on a
$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\tan^{-1}(\sqrt{3}) = -60^\circ + k\cdot 180^\circ = 120^\circ$ avec $k=1$).

On a donc $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \operatorname{cis}(120^\circ)$ et, ainsi $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = (\operatorname{cis}(120^\circ))^{10} = \operatorname{cis}(10\cdot 120^\circ) =$
$= \operatorname{cis}(1200^\circ) = \operatorname{cis}(120^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \operatorname{cis}(120^\circ) = \cos(120^\circ) + i\sin(120^\circ) =$
$= -0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ainsi $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exercice 7.15.

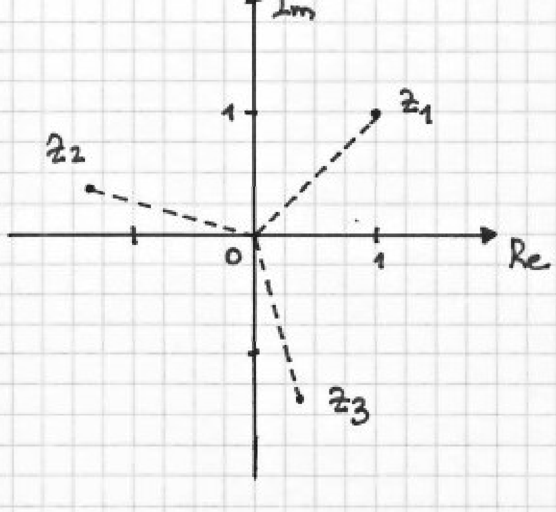
a. $n=3$ et $w=-2+2i$: on écrit w sous la forme $r\,\mathrm{cis}(\varphi)$: on a $r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{4+4}=$ $=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right)=\tan^{-1}(-1)=135^\circ$; les racines cubiques de w sont alors données par:

$$z_1=\sqrt[3]{r}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\varphi}{3}\right)=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\,\mathrm{cis}\left(\frac{135^\circ}{3}\right)=\sqrt[3]{\sqrt{8}}\,\mathrm{cis}(45^\circ)=$$
$$=\left(8^{1/2}\right)^{1/3}\left(\cos(45^\circ)+i\sin(45^\circ)\right)=8^{1/6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=$$
$$=\sqrt[6]{8}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\sqrt[6]{8\,\frac{(\sqrt{2})^6}{2^6}}\,(1+i)=\sqrt[6]{8\,\frac{2^3}{2^6}}\,(1+i)$$
$$=\sqrt[6]{8\cdot\frac{1}{2^3}}\,(1+i)=\sqrt[6]{8\cdot\frac{1}{8}}\,(1+i)=\sqrt[6]{1}\,(1+i)=1+i;$$

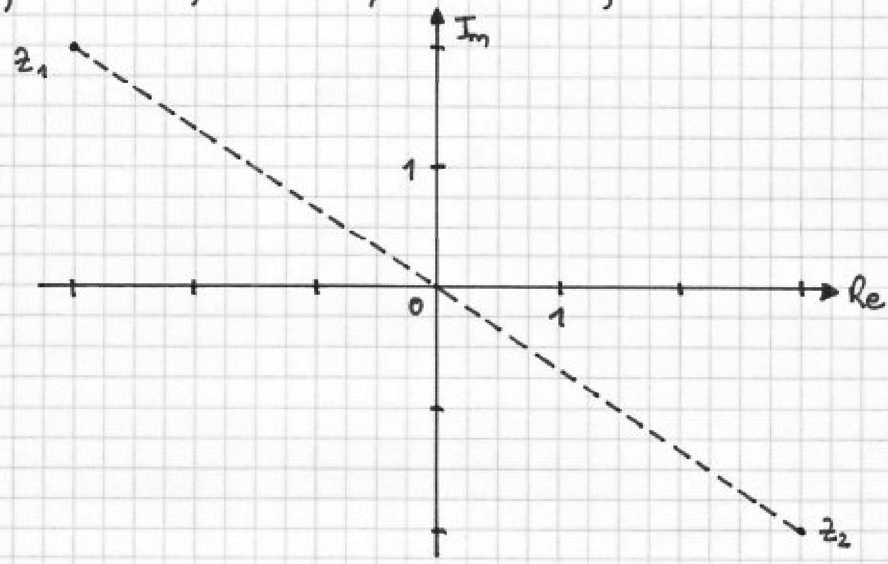
$$z_2=\sqrt[3]{r}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{360^\circ}{3}\right)=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\,\mathrm{cis}\left(\frac{135^\circ}{3}+120^\circ\right)=$$
$$=\sqrt[6]{8}\,\mathrm{cis}(45^\circ+120^\circ)=\sqrt[6]{8}\,\mathrm{cis}(165^\circ)=\sqrt[6]{8}\left(\cos(165^\circ)+i\sin(165^\circ)\right)=$$
$$=\sqrt[6]{8}\left(-\cos(15^\circ)+i\sin(15^\circ)\right)=\sqrt[6]{8}\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)=$$
$$=\frac{\sqrt[6]{8}}{4}\left(-\sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\right)=$$
$$=\frac{(2^3)^{1/6}}{2^2}\left(-\sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\right)=$$
$$=\frac{2^{1/2}}{2^2}\left(-\sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\right)=\frac{1}{2^{3/2}}\left(-\sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\right)=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}i=$$
$$=-\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)i=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i\cong$$
$$\cong-1{,}37+0{,}37i;$$

$$z_3=\sqrt[3]{r}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\cdot360^\circ}{3}\right)=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\,\mathrm{cis}\left(\frac{135^\circ}{3}+240^\circ\right)=$$
$$=\sqrt[6]{8}\,\mathrm{cis}(45^\circ+240^\circ)=\sqrt[6]{8}\,\mathrm{cis}(285^\circ)=\sqrt[6]{8}\left(\cos(285^\circ)+i\sin(285^\circ)\right)=$$
$$=\sqrt[6]{8}\left(\cos(-75^\circ)+i\sin(-75^\circ)\right)=\sqrt[6]{8}\left(\cos(75^\circ)-i\sin(75^\circ)\right)=$$
$$=\sqrt[6]{8}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt[6]{8}}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-(\sqrt{6}+\sqrt{2})i\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-(\sqrt{6}+\sqrt{2})i\right)=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)i=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)i\cong0{,}37-1{,}37i.$$

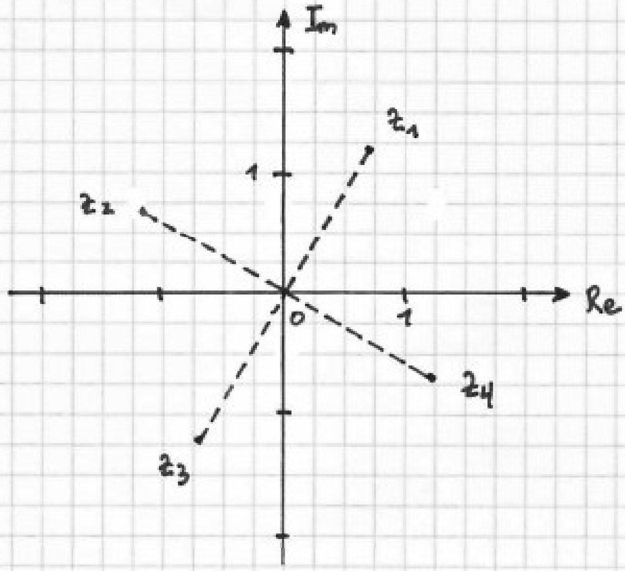
On peut alors représenter ces racines dans le plan de Gauss :



b. $n=2$ et $w=5-12i$: on écrit w sous la forme $r\operatorname{cis}(\varphi)$: $r=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=$
$=\sqrt{169}=13$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{-12}{5}\right)\cong -67{,}38°+360°=292{,}62°$; ainsi
$w=13\operatorname{cis}(292{,}62°)$; les racines carrées de w sont alors données par :
$z_1=\sqrt{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{13}\operatorname{cis}\left(\frac{292{,}62°}{2}\right)=\sqrt{13}\operatorname{cis}(146{,}31°)=$
$=\sqrt{13}\left(\cos(146{,}31°)+i\sin(146{,}31°)\right)=-3+2i$;
$z_2=\sqrt{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{360°}{2}\right)=\sqrt{13}\operatorname{cis}(146{,}31°+180°)=\sqrt{13}\operatorname{cis}(326{,}31°)=$
$=\sqrt{13}\left(\cos(326{,}31°)+i\sin(326{,}31°)\right)=3-2i$.
On peut alors représenter ces racines dans le plan de Gauss :



c. $n=4$ et $w=-2-2\sqrt{3}i$: on écrit w sous la forme $r\operatorname{cis}(\varphi)$: $r=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=$
$=\sqrt{4+4\cdot 3}=\sqrt{16}=4$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{-2}\right)=\tan^{-1}(\sqrt{3})=60°+180°=240°$;
ainsi $w=4\operatorname{cis}(240°)$; les racines 4^e de w sont alors :
$z_1=\sqrt[4]{4}\operatorname{cis}\left(\frac{240°}{4}\right)=\sqrt{2}\operatorname{cis}(60°)=\sqrt{2}\left(\cos(60°)+i\sin(60°)\right)=$
$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\cong 0{,}707+1{,}225i$;
$z_2=\sqrt[4]{4}\operatorname{cis}\left(\frac{240°}{4}+\frac{360°}{4}\right)=\sqrt{2}\operatorname{cis}(60°+90°)=\sqrt{2}\operatorname{cis}(150°)=$
$=\sqrt{2}\left(\cos(150°)+i\sin(150°)\right)=\sqrt{2}\left(-\cos(30°)+i\sin(30°)\right)=$
$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=-1{,}225+0{,}707i$;
$z_3=\sqrt[4]{4}\operatorname{cis}\left(\frac{240°}{4}+\frac{2\cdot 360°}{4}\right)=\sqrt{2}\operatorname{cis}(60°+180°)=\sqrt{2}\operatorname{cis}(240°)=$
$=\sqrt{2}\left(\cos(240°)+i\sin(240°)\right)=\sqrt{2}\left(-\cos(60°)-i\sin(60°)\right)=$
$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\cong-0{,}707-1{,}225i$;
$z_4=\sqrt[4]{4}\operatorname{cis}\left(\frac{240°}{4}+\frac{3\cdot 360°}{4}\right)=\sqrt{2}\operatorname{cis}(60°+270°)=\sqrt{2}\operatorname{cis}(330°)=$
$=\sqrt{2}\left(\cos(330°)+i\sin(330°)\right)=\sqrt{2}\left(\cos(30°)-i\sin(30°)\right)=$
$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=1{,}225-0{,}707i$.
On peut alors représenter ces racines dans le plan de Gauss :



d. $n=4$ et $w=-32$: on écrit w sous la forme $r\,cis(\varphi)$: $r=\sqrt{(-32)^2+0^2}=32$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{0}{-32}\right)=$
$=180^\circ$; ainsi $w=32\,cis(180^\circ)$; les racines 4^e de w sont alors:

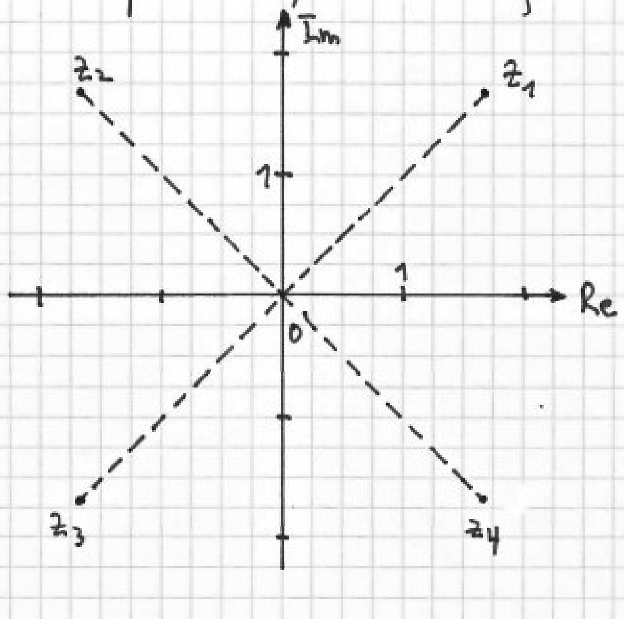
$z_1=\sqrt[4]{32}\,cis\left(\frac{180^\circ}{4}\right)=2\sqrt[4]{2}\,cis(45^\circ)=2\sqrt[4]{2}\left(\cos(45^\circ)+i\sin(45^\circ)\right)=$
$=2\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt[4]{2}\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\sqrt{2}i=1{,}682+1{,}682i$;

$z_2=\sqrt[4]{32}\,cis\left(\frac{180^\circ}{4}+\frac{360^\circ}{4}\right)=2\sqrt[4]{2}\,cis(45^\circ+90^\circ)=2\sqrt[4]{2}\,cis(135^\circ)=$
$=2\sqrt[4]{2}\left(\cos(135^\circ)+i\sin(135^\circ)\right)=2\sqrt[4]{2}\left(-\cos(45^\circ)+i\sin(45^\circ)\right)=$
$=2\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt[4]{2}\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\sqrt{2}i=-1{,}682+1{,}682i$;

$z_3=\sqrt[4]{32}\,cis\left(\frac{180^\circ}{4}+\frac{2\cdot360^\circ}{4}\right)=2\sqrt[4]{2}\,cis(45^\circ+180^\circ)=2\sqrt[4]{2}\,cis(225^\circ)=$
$=2\sqrt[4]{2}\left(\cos(225^\circ)+i\sin(225^\circ)\right)=2\sqrt[4]{2}\left(-\cos(45^\circ)-i\sin(45^\circ)\right)=$
$=2\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\sqrt[4]{2}\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\sqrt{2}i=-1{,}682-1{,}682i$;

$z_4=\sqrt[4]{32}\,cis\left(\frac{180^\circ}{4}+\frac{3\cdot360^\circ}{4}\right)=2\sqrt[4]{2}\,cis(45^\circ+270^\circ)=2\sqrt[4]{2}\,cis(315^\circ)=$
$=2\sqrt[4]{2}\left(\cos(315^\circ)+i\sin(315^\circ)\right)=2\sqrt[4]{2}\left(\cos(45^\circ)-i\sin(45^\circ)\right)=$
$=2\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt[4]{2}\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\sqrt{2}i=1{,}682-1{,}682i$.

On peut alors représenter les racines dans le plan de Gauss:



Exercice 7.16.

On a $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = (\text{cis}\,\varphi)^4 = \text{cis}(4\varphi) = \cos(4\varphi) + i\sin(4\varphi)$.

D'autre part, $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + i^2\sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi =$

$$= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi \text{ et}$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = ((\cos\varphi + i\sin\varphi)^2)^2 = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi)^2 =$$

$$= \cos^4\varphi + \sin^4\varphi + 4i^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi =$$

$$= \cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi =$$

$$= \cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + (4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi)i.$$

On doit donc avoir $\cos(4\varphi) + i\sin(4\varphi) = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4(\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi)i$.

Les parties réelles doivent être égales et les parties imaginaires aussi. On obtient ainsi:

$$\cos(4\varphi) = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi \text{ et}$$

$$\sin(4\varphi) = \cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi.$$

Exercice 7.17.

a. $f(z) = \bar{z}$: en posant $z = a+ib$, on a $f(a+ib) = a-ib$; en associant à z le point de coordonnées $(a;b)$, les coordonnées de $f(z)$ sont $(a;-b)$;
f est donc une symétrie d'axe horizontal, c'est-à-dire d'axe réel.

b. $f(z) = -z$: en posant $z = a+ib$, on a $f(a+ib) = -a-ib$; en associant à z le point de coordonnées $(a;b)$, les coordonnées de $f(z)$ sont $(-a;-b)$;
f est donc une symétrie de centre $(0;0)$, c'est-à-dire de centre $z=0$.

c. $f(z) = 4z$: en posant $z = a+ib$, on a $f(a+ib) = 4a + i \cdot 4b$; en associant à z le point de coordonnées $(a;b)$, les coordonnées de $f(z)$ sont $(4a;4b)$;
f est donc une homothétie de facteur 4 de centre $(0;0)$, c'est-à-dire de centre $z=0$.

d. $f(z) = \text{Im}(z)$: en posant $z = a+ib$, on a $f(a+ib) = b$; en associant à z le point de coordonnées $(a;b)$, les coordonnées de $f(z)$ sont $(b;0)$; f est donc la composition de 2 transformations :
1) projection sur l'axe imaginaire : $(a;b) \longrightarrow (0;b)$;
2) symétrie d'axe $y=x$: $(0;b) \longrightarrow (b;0)$.

e) $f(z) = z+w$, avec $w = 3+2i$: en posant $z = a+ib$, on a $f(a+ib) = a+ib+3+2i =$
$= (a+3) + i(b+2)$; en associant à z le point de coordonnées $(a;b)$, les coordonnées de $f(z)$ sont $(a+3;b+2) = (a;3)+(3;2)$; f est donc une translation du vecteur $\binom{3}{2}$, c'est-à-dire de $w = 3+2i$.

Exercice 7.18.

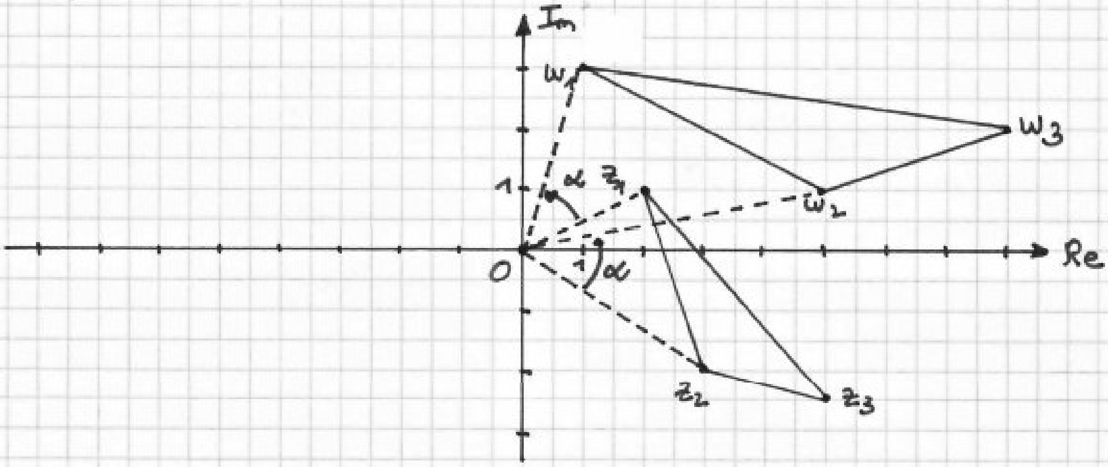
On a $f(z) = (1+i)z$.

a. $z_1 = 2+i$: $f(z_1) = (1+i)(2+i) = 2+i+2i+i^2 = 2+3i-1 = 1+3i \Rightarrow w_1 = 1+3i$;

$z_2 = 3-2i$: $f(z_2) = (1+i)(3-2i) = 3-2i+3i-2i^2 = 3+i+2 = 5+i \Rightarrow w_2 = 5+i$;

$z_3 = 5-3i$: $f(z_3) = (1+i)(5-3i) = 5-3i+5i-3i^2 = 5+2i+3 = 8+2i \Rightarrow w_3 = 8+2i$

b.



c. On commence par faire une rotation de centre $z=0$. Par mesure, l'angle est de $45°$.

En fait, dans $1+i$, on a $a=1$ et $b=1$ et $\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = 45° = \alpha$.

L'angle de rotation α est donc l'argument de $1+i$.

Une fois la rotation faite, on fait une homothétie ; le facteur d'homothétie est $\frac{\text{module de } w_1}{\text{module de } z_1}$ (par exemple). On a $\frac{\text{module de } w_1}{\text{module de } z_1} = \frac{\sqrt{1^2+3^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$.

On remarque que le module de $1+i$ est $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

L'homothétie, qui est de centre 0, est donc de rapport module de $1+i$.

Par conséquent, la transformation $f(z) = w \cdot z$ est une rotation de centre 0 et d'angle argument de w, suivie d'une homothétie de centre 0 et de rapport module de w.

Ici, f est une rotation de centre 0 et de $45°$, suivie d'une homothétie de centre 0 et de rapport $\sqrt{2}$.

Exercice 7.19.

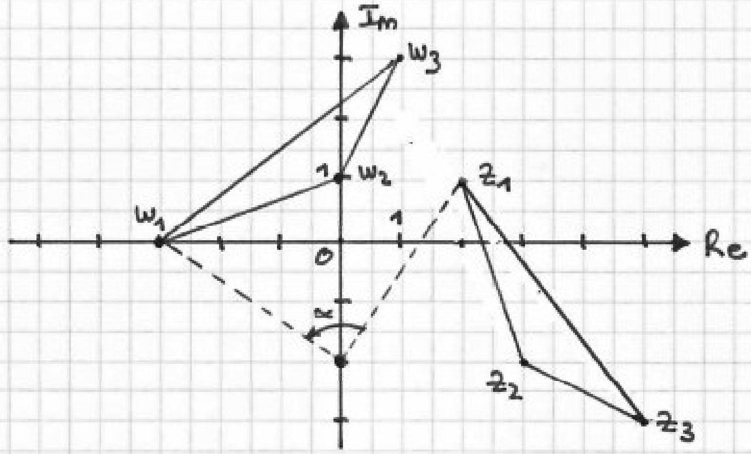
On a $f(z) = i(z+2i) - 2i$

a. $z_1 = 2+i$: $f(z_1) = i(2+i+2i) - 2i = i(2+3i) - 2i = 2i + 3i^2 - 2i = 3i^2 = -3 \Rightarrow w_1 = -3$;

$z_2 = 3-2i$: $f(z_2) = i(3-2i+2i) - 2i = i \cdot 3 - 2i = i \Rightarrow w_2 = i$;

$z_3 = 5-3i$: $f(z_3) = i(5-3i+2i) - 2i = i(5-i) - 2i = 5i - i^2 - 2i = 3i + 1 \Rightarrow w_3 = 1 + 3i$.

b.



c. Sur le dessin, on voir que f est une rotation de centre $2i$ et d'angle $\alpha = 90°$.

Le centre $2i$ correspond aux $2i$ dans $f(z) = i(z+2i) - 2i$.

L'angle de $90°$ correspond à l'argument de i.

De manière générale, si $f(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{C}$, f est une rotation autour de $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$ et d'angle argument de a, suivie d'une homothétie de centre z_0 et de rapport module de a.

Exercice 7.20.

On a $f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

a. Domaine de définition : on doit avoir $\bar{z}\neq 0$ et, donc $z\neq 0$, le domaine de définition de f est donc $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Points invariants : les points invariants (ou fixes) sont les $z\in\mathbb{C}$ tels que $f(z)=z$;
$f(z)=z \Rightarrow \dfrac{1}{\bar{z}}=z \Rightarrow z\bar{z}=1$; en posant $z=x+iy$, on a
$\bar{z}=x-iy$ et $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2-i^2y^2=x^2+y^2$;
ainsi $f(z)=z \Rightarrow x^2+y^2=1$; donc l'ensemble des points $z=x+iy$ invariants sont le cercle trigonométrique $x^2+y^2=1$.

b. $z=2+i$: $f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{2-i}=\dfrac{2+i}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i}{2^2-i^2}=\dfrac{2+i}{4+1}=\dfrac{2+i}{5}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$;

$z=-9-5i$: $f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{-9+5i}=\dfrac{-9-5i}{(-9+5i)(-9-5i)}=\dfrac{-9-5i}{(-9)^2-(5i)^2}=\dfrac{-9-5i}{81-25i^2}=\dfrac{-9-5i}{81+25}=$
$=\dfrac{-9-5i}{106}=-\dfrac{9}{106}-\dfrac{5}{106}i$.

c. Posons $z=r\operatorname{cis}\varphi$. On a $\bar{z}=\overline{r\operatorname{cis}\varphi}=\overline{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)$. Ainsi

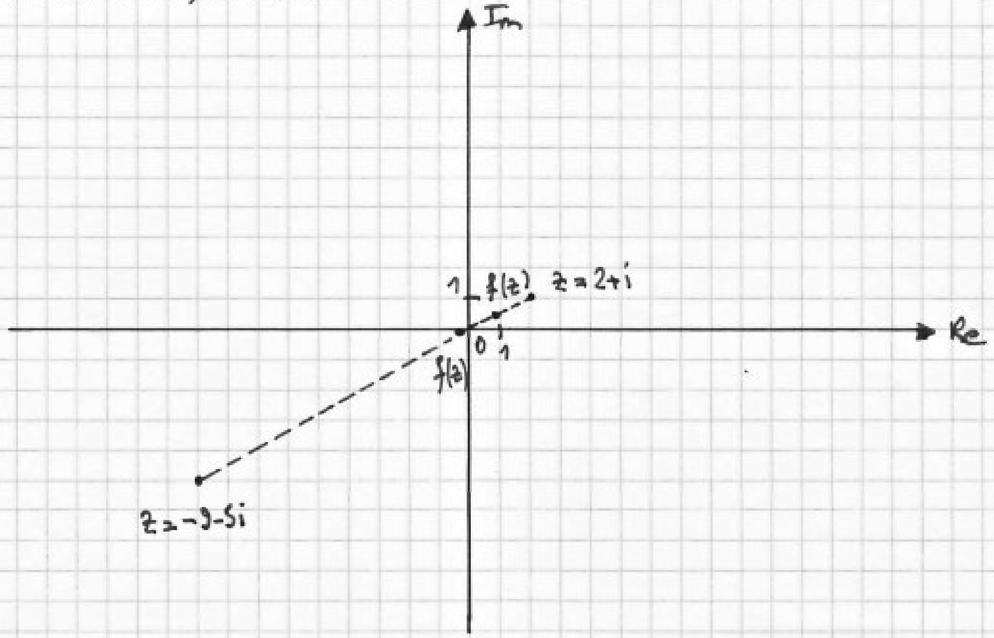
$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{r(\cos\varphi-i\sin\varphi)}=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{r(\cos\varphi-i\sin\varphi)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{r(\cos^2\varphi-i^2\sin^2\varphi)}=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=$$
$$=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{r}\ (\text{puisque } \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \text{ pour tout angle } \varphi)=\frac{1}{r}\operatorname{cis}\varphi.$$

Ainsi, si $z=r\operatorname{cis}\varphi$, $f(z)=\frac{1}{r}\operatorname{cis}\varphi$. Les arguments de z et $f(z)$ sont donc les mêmes ; les modules changent : si le module de z est r, alors le module de $f(z)$ est $\frac{1}{r}$.

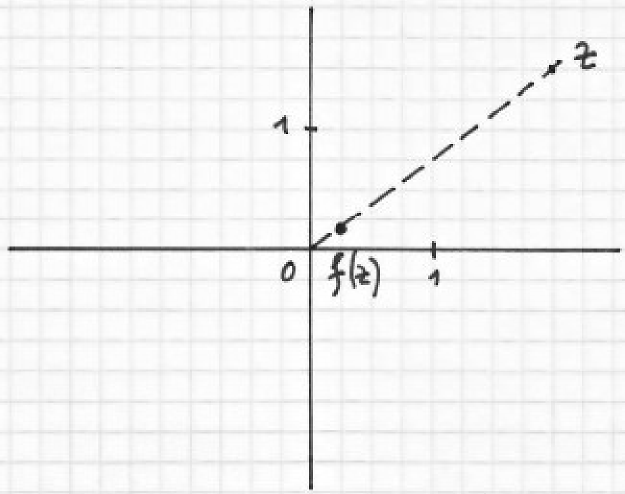
$z=2+i$: module de $z=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\cong 2{,}236 \Rightarrow$ module de $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cong 1{,}495$.

$z=-9-5i$: module de $z=\sqrt{(-9)^2+(-5)^2}=\sqrt{106}\cong 10{,}296 \Rightarrow$ module de $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{106}}\cong 0{,}097$.

On a alors la construction suivante :

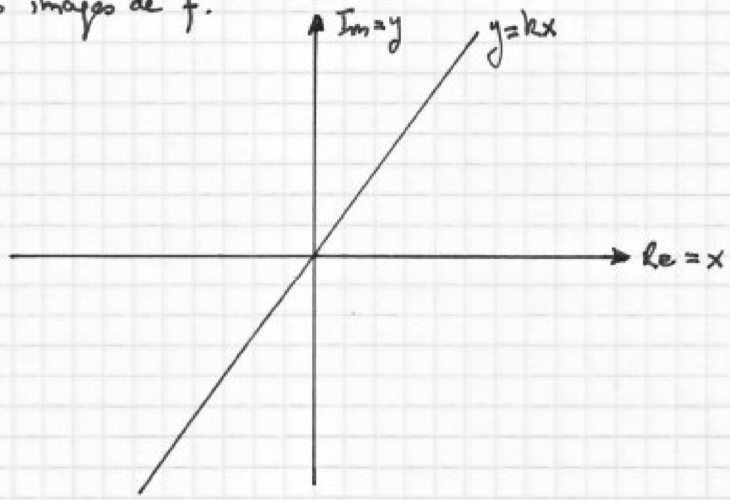


Pour un point z quelconque :



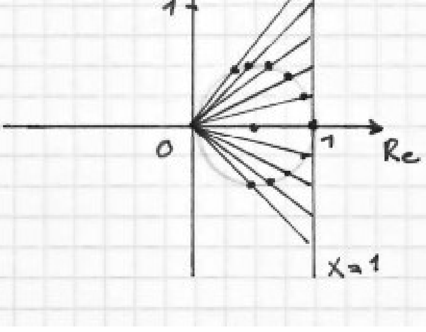
$f(z)$ appartient à la droite Oz et module de $f(z) = \dfrac{1}{\text{module de } z}$.

d. On a la droite linéaire $y = k \cdot x$. En posant $z = x + iy$, on a $z = x + ikx = x(1+ik)$.
Ainsi $\bar{z} = x(1-ik)$ et $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{x(1-ik)} = \dfrac{1+ik}{x(1-ik)(1+ik)} = \dfrac{1+ik}{x(1^2 - i^2k^2)} = \dfrac{1+ik}{x(1+k^2)} =$
$= \dfrac{1}{x(1+k^2)}(1+ik) = \dfrac{1}{x^2(1+k^2)} x(1+ik) = \dfrac{1}{x^2(1+k^2)} z$.
Par conséquent $f(z) = \ell \cdot z$ pour un $\ell \in \mathbb{R}$.
On en déduit que la droite linéaire $y = k.x$ est invariante par la transformation f. En outre, $z = 0$ est exclu du domaine de définition de f et $z = 0$ n'appartient pas non plus au domaine des images de f.



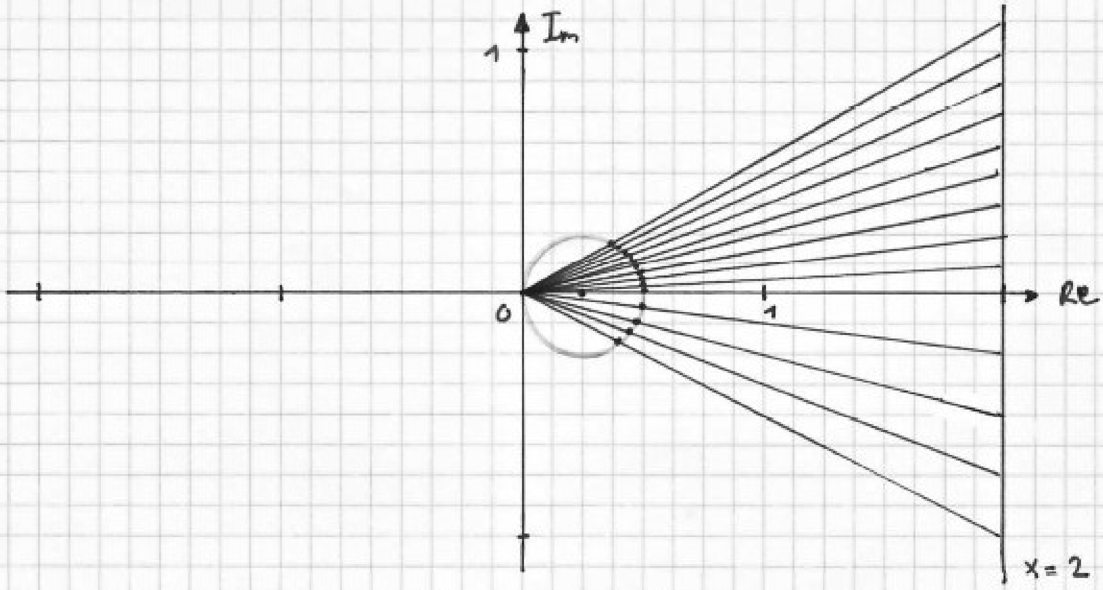
e. On a la droite verticale $x = k$. En posant $z = x + iy$, on a $z = k + iy$. Ainsi
$\bar{z} = k - iy$ et $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{k-iy} = \dfrac{k+iy}{(k-iy)(k+iy)} = \dfrac{k+iy}{k^2 - i^2y^2} = \dfrac{k+iy}{k^2+y^2} = \dfrac{k}{k^2+y^2} + \dfrac{y}{k^2+y^2}$ i

Géométriquement, les images par f de la droite verticale $x = k$ sont :
$k = 1$:



cercle de centre $z = \frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$

$k=2$:



cercle de centre $z=\frac{1}{4}$ et de rayon $\frac{1}{4}$.

Géométriquement, il semble que l'image de f de la droite verticale $x=k$ soit le cercle centré en $z=\frac{1}{2k}$ et de rayon $\frac{1}{2k}$.

Vérifions ceci algébriquement.

On a vu ci-dessus que, pour $z=x+iy$ et $x=k$, on a $f(z)=\frac{k}{k^2+y^2}+\frac{y}{k^2+y^2}\,i$.

Les coordonnées de $f(z)$ dans le plan de Gauss sont donc $\left(\frac{k}{k^2+y^2}\,;\,\frac{y}{k^2+y^2}\right)$.

Si cela représente un cercle centré en $z=\frac{1}{2k}$, c'est-à-dire en $\left(\frac{1}{2k}\,;\,0\right)$, et de rayon $\frac{1}{2k}$, il faut que $\left(\frac{k}{k^2+y^2}-\frac{1}{2k}\right)^2+\left(\frac{y}{k^2+y^2}\right)^2=\left(\frac{1}{2k}\right)^2$, pour tout $y\in\mathbb{R}$.

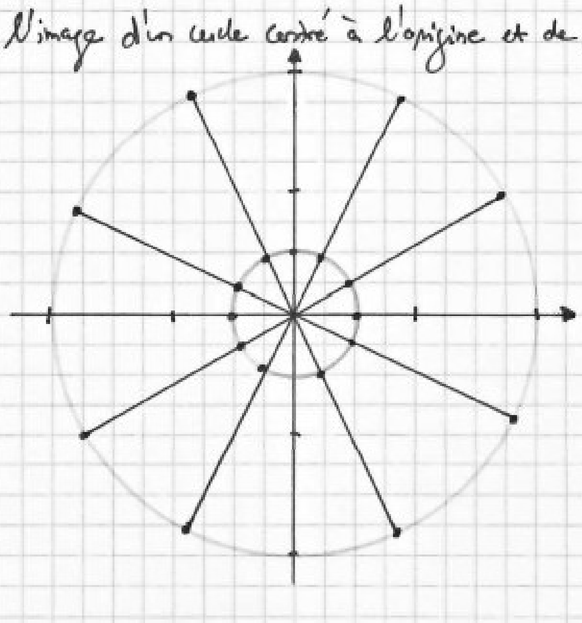
On a : $\left(\frac{k}{k^2+y^2}-\frac{1}{2k}\right)^2+\left(\frac{y}{k^2+y^2}\right)^2=\left(\frac{2k^2-(k^2+y^2)}{2k(k^2+y^2)}\right)^2+\frac{y^2}{(k^2+y^2)^2}=\left(\frac{k^2-y^2}{2k(k^2+y^2)}\right)^2+\frac{y^2}{(k^2+y^2)^2}=$

$$=\frac{k^4-2k^2y^2+y^4}{4k^2(k^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(k^2+y^2)^2}=\frac{k^4-2k^2y^2+y^4+4k^2y^2}{4k^2(k^2+y^2)^2}=\frac{k^4+2k^2y^2+y^4}{4k^2(k^2+y^2)^2}=\frac{(k^2+y^2)^2}{4k^2(k^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{4k^2}=\left(\frac{1}{2k}\right)^2.$$

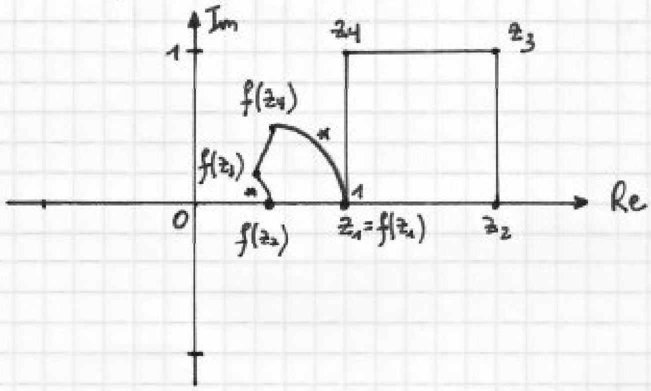
Ainsi l'image de f de la droite verticale $x=k$ est bien le cercle centré en $z=\frac{1}{2k}$ et de rayon $\frac{1}{2k}$.

f. Commençons par dessiner l'image d'un cercle centré à l'origine et de rayon $r=2$:



On a vu plus haut que si $z = r\,\text{cis}\,\varphi$, alors $f(z) = \frac{1}{r}\,\text{cis}\,\varphi$.
On en déduit que l'image d'un cercle centré à l'origine et de rayon r est le cercle centré à l'origine de rayon $\frac{1}{r}$.

g. $z_1 = 1$: $f(z_1) = \frac{1}{\bar{z}_1} = \frac{1}{1} = 1$;
$z_2 = 2$: $f(z_2) = \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{1}{2}$;
$z_3 = 2+i$: $f(z_3) = \frac{1}{\bar{z}_3} = \frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{2^2-i^2} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$;
$z_4 = 1+i$: $f(z_4) = \frac{1}{\bar{z}_4} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1^2-i^2} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

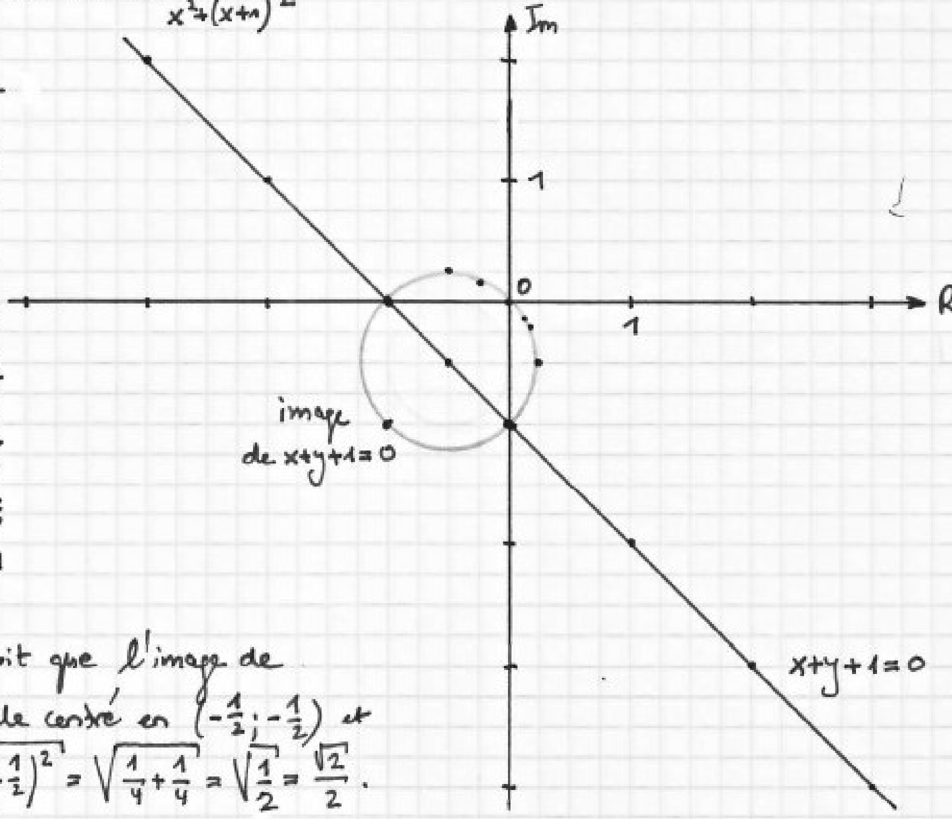


* voir e).

h. On a la droite $x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1$.
En posant $z = x + iy$, on a $f(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{1}{x - i(-x-1)} = \frac{1}{x + (x+1)i} =$
$= \frac{x-(x+1)i}{(x+(x+1)i)(x-(x+1)i)} = \frac{x-(x+1)i}{x^2-(x+1)^2 i^2} = \frac{x-(x+1)i}{x^2+(x+1)^2} = \frac{x}{x^2+(x+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+(x+1)^2}\,i = u + vi$

avec $u = \frac{x}{x^2+(x+1)^2}$ et $v = -\frac{x+1}{x^2+(x+1)^2}$

x	y	u	v
-3	2	$-\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$
-2	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
-1	0	-1	0
0	-1	0	-1
1	-2	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
2	-3	$\frac{2}{13}$	$-\frac{3}{13}$
3	-4	$\frac{3}{25}$	$-\frac{4}{25}$
$-0,5$	$-1,5$	-1	-1



D'après le dessin, on voit que l'image de $x+y+1=0$ est le cercle centré en $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Prouvons-le algébriquement.

Avec $z = x+iy$ et $y=-x-1$, on a $f(z) = u+vi$ avec $u = \dfrac{x}{x^2+(x+1)^2}$ et $v = -\dfrac{x+1}{x^2+(x+1)^2}$.

On a: $\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{x^2+(x+1)^2}+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{x+1}{x^2+(x+1)^2}+\dfrac{1}{2}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{x}{x^2+(x+1)^2}\right)^2 + \frac{x}{x^2+(x+1)^2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{x+1}{x^2+(x+1)^2}\right)^2 - \frac{x+1}{x^2+(x+1)^2} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{x^2}{(x^2+(x+1)^2)^2} - \frac{1}{x^2+(x+1)^2} + \frac{(x+1)^2}{(x^2+(x+1)^2)^2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{x^2+(x+1)^2}{(x^2+(x+1)^2)^2} - \frac{1}{x^2+(x+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2+(x+1)^2} - \frac{1}{x^2+(x+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

L'image de la droite $x+y+1=0$ est donc bien le cercle de centre $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 7.21.

On a $f(z) = (3+4i)z + 3 - 2i$.

a. Un point invariant (ou fixe) z_0 est tel que $f(z_0) = z_0$.

$f(z_0) = z_0 \Rightarrow (3+4i)z_0 + 3 - 2i = z_0 \Rightarrow (2+4i)z_0 + 3 - 2i = 0$

$\Rightarrow (2+4i)z_0 = -3+2i \Rightarrow z_0 = \dfrac{-3+2i}{2+4i} = \dfrac{(-3+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \dfrac{-6+12i+4i-8i^2}{2^2-16i^2} =$

$= \dfrac{-6+16i+8}{4+16} = \dfrac{2+16i}{20} = \dfrac{1+8i}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{5}i$.

Ainsi f admet un point invariant : $z_0 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{5}i$.

On a : $(3+4i)(z-z_0) + z_0 = (3+4i)z - (3+4i)z_0 + z_0 =$

$= (3+4i)z - (2+4i)z_0 = (3+4i)z - (2+4i)\left(\frac{1}{10} + \frac{4}{5}i\right) =$

$= (3+4i)z - \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i + \frac{2}{5}i + \frac{16}{5}i^2\right) = (3+4i)z - \left(\frac{1}{5} + 2i - \frac{16}{5}\right) =$

$= (3+4i)z - (-3+2i) = (3+4i)z + 3 - 2i = f(z)$.

On a donc bien $f(z) = (3+4i)(z-z_0) + z_0$.

b. Posons $w = z - z_0$ et considérons la fonction $g(w) = (3+4i)w$.

Ecrivons $3+4i$ sous la forme $r\operatorname{cis}\varphi$: $r = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53{,}13°$;

ainsi $3+4i = 5\operatorname{cis}(53{,}13°)$. Notons $w = r_w \operatorname{cis}(\varphi_w)$.

On a alors $g(w) = (3+4i)w = 5\operatorname{cis}(53{,}13°)\cdot r_w\operatorname{cis}(\varphi_w) = 5r_w\operatorname{cis}(53{,}13°)\operatorname{cis}(\varphi_w) =$

$= 5r_w\big(\cos(53{,}13°) + i\sin(53{,}13°)\big)\big(\cos(\varphi_w) + i\sin(\varphi_w)\big) =$

$= 5r_w\big(\cos(53{,}13°)\cos(\varphi_w) + i\cos(53{,}13°)\sin(\varphi_w) + i\sin(53{,}13°)\cos(\varphi_w) - \sin(53{,}13°)\sin(\varphi)\big) =$

$= 5r_w\Big(\underbrace{\cos(53{,}13°)\cos(\varphi_w) - \sin(53{,}13°)\sin(\varphi_w)}_{\substack{\cos(53{,}13° + \varphi_w) \\ \text{car } \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B}} + i\underbrace{\big(\cos(53{,}13°)\sin(\varphi_w) + \sin(53{,}13°)\cos(\varphi_w)\big)}_{\substack{\sin(53{,}13° + \varphi_w) \\ \text{car } \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B}}\Big) =$

$= 5r_w\big(\cos(53{,}13° + \varphi_w) + i\sin(53{,}13° + \varphi_w)\big) = 5r_w\operatorname{cis}(53{,}13° + \varphi_w)$.

Ainsi g est une rotation de $53{,}13°$ de centre O, suivie d'une homothétie de rapport 5 et de centre O.

On en déduit que $f(z) = (3+4i)(z-z_0) + z_0$, puisque z_0 est le point fixe de f, est une rotation de centre z_0 et d'angle $53{,}13°$, suivie d'une homothétie de centre z_0 et de rapport 5.

c. On pourrait aussi dire que f est une rotation autour de l'origine de $53{,}13°$, suivie d'une homothétie centrée en l'origine et de rapport 5, suivie d'une translation de vecteur $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\big(3 = \operatorname{Re}(3-2i) ; -2 = \operatorname{Im}(3-2i)\big)$.

Exercice 7.22

On a $w = f(z) = z^2$.

a. On pose $z = x+iy$ et $w = u+iv$.

On a $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

$w = z^2 \Rightarrow u+vi = x^2-y^2+2xyi \Rightarrow u = x^2-y^2$ et $v = 2xy$.

b. Les points invariants (ou fixes) de f sont les z tels que $f(z) = z$.

Comme $f(z) = z^2$, on doit résoudre $z^2 = z \Rightarrow z^2 - z = 0 \Rightarrow z(z-1) = 0$

$\Rightarrow$ soit $z = 0$, soit $z-1 = 0 \Rightarrow z = 1$.

Les points invariants de f sont donc $z=0$ et $z=1$.

c. $z_0 = 0$: $f(z_0) = 0^2 = 0$;

$z_1 = 1$: $f(z_1) = 1^2 = 1$;

$z_2 = 1+i$: $f(z_2) = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$;

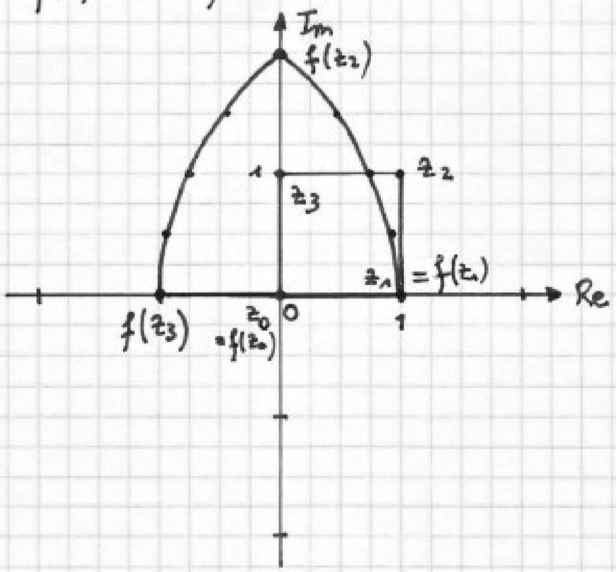
$z_3 = i$: $f(z_3) = i^2 = -1$.

d. droite $z = k, k \in \mathbb{R}$: $f(z) = k^2 \Rightarrow$ l'image de l'axe horizontal (axe réel) est l'axe horizontal ;

droite $z = k+i, k \in \mathbb{R}$: $f(z) = (k+i)^2 = k^2 + 2ki + i^2 = k^2 - 1 + 2ki$;

droite $z = ki, k \in \mathbb{R}$: $f(z) = (ki)^2 = k^2i^2 = -k^2 \Rightarrow$ l'image de l'axe vertical (axe imaginaire) est l'axe horizontal ;

droite $z = 1+ki, k \in \mathbb{R}$: $f(z) = (1+ki)^2 = 1 + 2ki + k^2i^2 = 1 - k^2 + 2ki$.

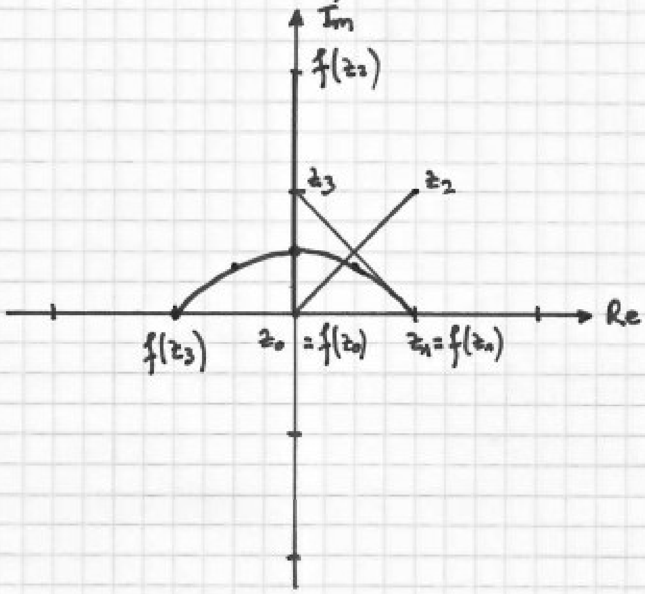


e. Diagonale z_0z_2 : $y = x \Rightarrow z = x+ix \Rightarrow f(z) = z^2 = (x+ix)^2 = x^2 + 2x^2i + i^2x^2 =$
$= x^2 + 2x^2i - x^2 = 2x^2i$

$\Rightarrow$ l'image de la diagonale z_0z_2 est le segment reliant 0 à $2i$.

Diagonale z_1z_2 : $y = -x+1 \Rightarrow z = x+i(-x+1) \Rightarrow f(z) = z^2 = (x+i(-x+1))^2 =$
$= x^2 + 2x(-x+1)i + i^2(-x+1)^2 = x^2 + 2x(-x+1)i - (-x+1)^2 =$

$$= x^2 + 2x(-x+1)i - (x^2 - 2x + 1) = x^2 + 2x(-x+1)i - x^2 + 2x - 1 = 2x - 1 + 2x(-x+1)i$$



Exercice 7.23

La fonction g associée à la rotation centrée à l'origine et de $60°$ est $g(z) = \operatorname{cis}(60°)\cdot z$
(on sait que multiplier par un nombre complexe revient à une rotation centrée à l'origine et d'angle argument du facteur complexe).
On a $\operatorname{cis}(60°) = \cos(60°) + i\sin(60°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Ainsi, on a $g(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$.
La fonction f associée à la rotation centrée en $2-3i$ et de $60°$ est

$$f(z) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z-(2-3i)\right) + 2-3i = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z-2+3i) + 2-3i =$$
$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2+3i) + 2-3i =$$
$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - 1 + \frac{3}{2}i - \sqrt{3}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i^2 + 2-3i =$$
$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \frac{3}{2}i - \sqrt{3}i - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)i.$$

Si $z = i$, on a $f(z) = f(i) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i + 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)i =$

$$= \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 + 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)i = \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)i =$$
$$= 1 - 2\sqrt{3} - \left(1+\sqrt{3}\right)i \cong -2{,}46 - 2{,}73i.$$