LYCEE DENIS-DE-ROUGEMONT

Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITE

Mathématiques niveau 1

SESSION 2005

Corrigé

---



## Problème 1

1. On a $f(x) = \dfrac{x^2}{-x+2}$.

a) Ordonnée $= 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{x^2}{-x+2} \Rightarrow -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0$

$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x=-2$ ou $x=1$.

Ainsi $P(-2;1)$ et $Q(1;1)$.

b) Domaine de définition: on doit avoir $-x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ ; ainsi $D = \mathbb{R} - \{2\}$.

Parité: comme $D = \mathbb{R} - \{2\}$ n'est pas symétrique par rapport à l'axe $y$, $f$ n'est ni paire, ni impaire.

Intersection avec l'axe $x$: $y=0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{-x+2} = 0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0;0)$.

Intersection avec l'axe $y$: $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0;0)$.

Tableau de signes:

| $x$ | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | 0 | + | ////// | − |

Asymptote verticale: $x=2$ est asymptote verticale et on a

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^2}{-x+2} = \frac{4}{0_+} = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^2}{-x+2} = \frac{4}{0_-} = -\infty.$$

Asymptote non verticale: effectuons la division:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-(x^2-2x)} & -x-2 \\ 2x & \\ \underline{-(2x-4)} & \\ 4 & \end{array}$$

Ainsi $y=-x-2$ est asymptote oblique.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{-x+2} = \frac{4}{+\infty} = 0_+$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{-x+2} = \frac{4}{-\infty} = 0_-$,

$f$ s'approche de $y=-x+2$ par au-dessus à $-\infty$ et par au-dessous à $+\infty$.

Dérivée: on a $f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = x^2$ et $v=-x+2$ ; comme $u' = 2x$ et $v' = -1$, on a

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2x(-x+2) - x^2\cdot(-1)}{(-x+2)^2} = \frac{-2x^2+4x+x^2}{(-x+2)^2} = \frac{-x^2+4x}{(-x+2)^2}.$$

Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-x^2+4x}{(-x+2)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+4x=0$

$\Rightarrow x(-x+4)=0 \Rightarrow x=0$ et $x=4$.

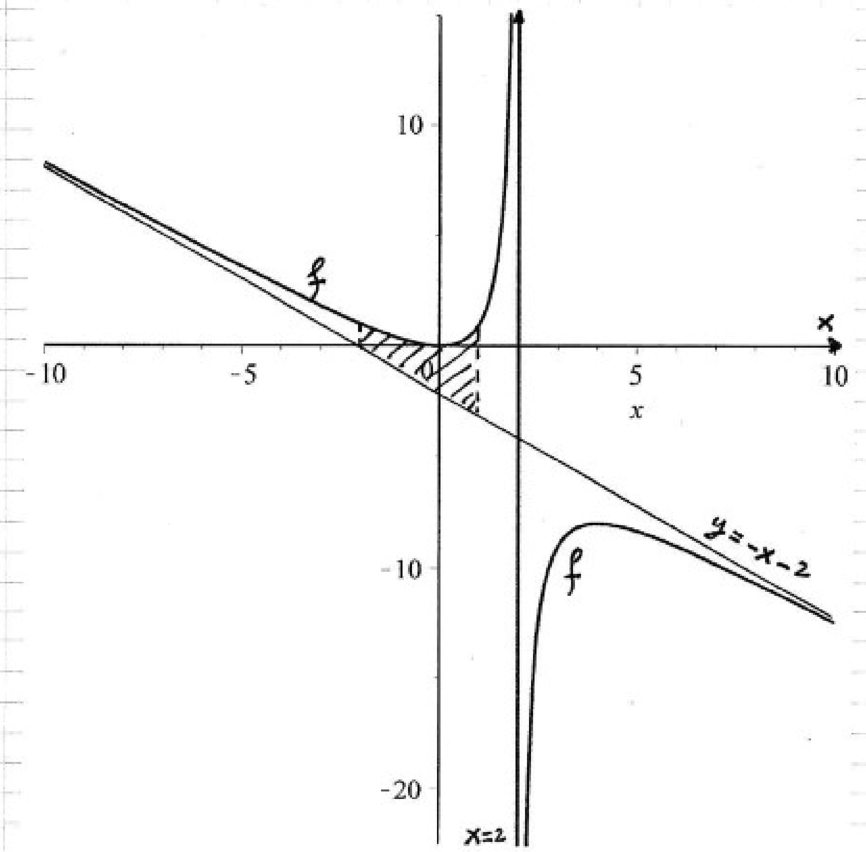
Avec $x=0$, on a $y=0$. Avec $x=4$, on a $y=\frac{4^2}{-4+2}=\frac{16}{-2}=-8$.

Les points à tangente horizontale sont donc $(0;0)$ et $(4;-8)$.

Tableau de variations:

| $x$ | | 0 | | 2 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | //// | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min en $(0;0)$ | $\nearrow$ | //// | $\nearrow$ | max en $(4;-8)$ | $\searrow$ |

Graphe:




c) Voir ci-dessus.

L'aire hachurée est donnée par $\int_{-2}^{1}\left(\frac{x^2}{-x+2}-(-x-2)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(\frac{x^2}{-x+2}+x+2\right)dx=$

$=\int_{-2}^{1}\frac{x^2+(x+2)(-x+2)}{-x+2}dx=\int_{-2}^{1}\frac{x^2-x^2+4}{-x+2}dx=\int_{-2}^{1}\frac{4}{-x+2}dx=-4\int_{-2}^{1}\frac{1}{x-2}dx=$

$=-4\ln(|x-2|)\Big|_{-2}^{1}=-4\ln(|1-2|)+4\ln(|-2-2|)=-4\underbrace{\ln(1)}_{=0}+4\ln(4)=$

$=4\ln(4)\cong 5,55.$

2. On a $g(x)=\ln(f(x))$

d) • domaine de définition de $g$: on doit avoir $f(x)>0$ ; d'après b, cela signifie $x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]0;2[\,=\,]-\infty;2[\setminus\{0\}$ ;

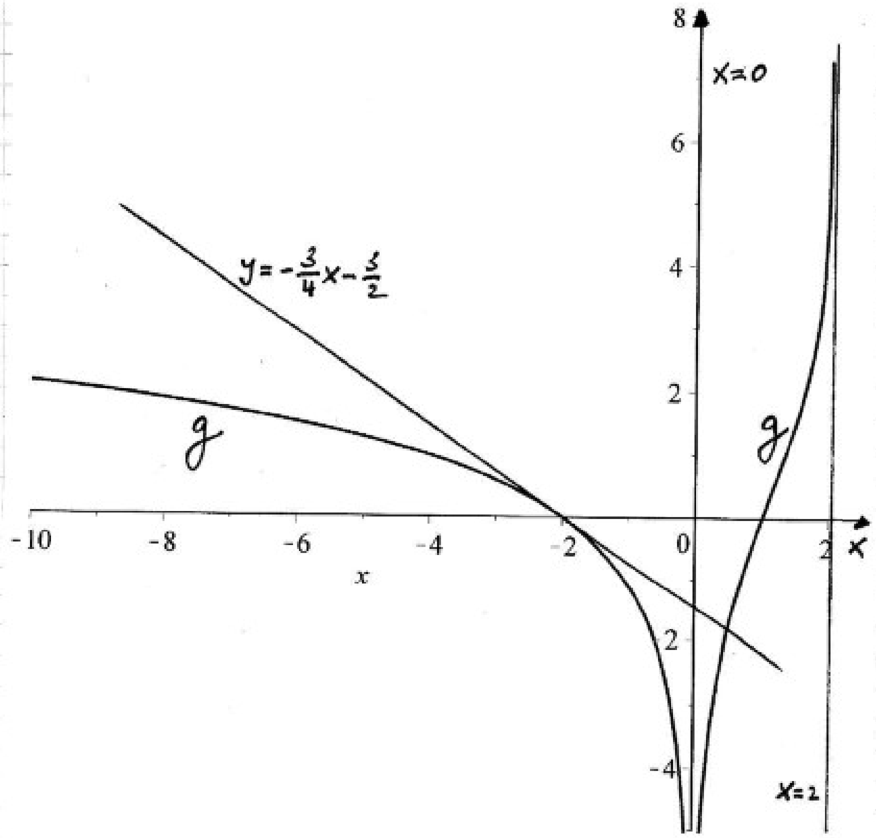
ainsi $D=\,]-\infty;2[\setminus\{0\}$.

- intersections de $g$ avec l'axe $x$ : $g(x)=0 \Rightarrow \ln(f(x))=0 \Rightarrow f(x)=1$
$\Rightarrow x=-2$ et $x=1$ (voir a))
$\Rightarrow (-2;0)$ et $(1;1)$.

- asymptotes verticales de $g$ : $x=2$ est une asymptote verticale de $f$ et est donc aussi une asymptote de $g$ ;
$x=0$ est une asymptote verticale de $\ln(x)$ et est donc aussi une asymptote de $g$.

$g(-4)=\ln(f(-4))=\ln\left(\frac{(-4)^2}{-(-4)+2}\right)=\ln\left(\frac{16}{6}\right)=\ln\left(\frac{8}{3}\right)\cong 0{,}98.$

$g(-1)=\ln(f(-1))=\ln\left(\frac{(-1)^2}{-(-1)+2}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)\cong -1{,}10.$




e) $g'(x)=(\ln(f(x)))'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$.

On a $\frac{1}{f(x)}=\frac{-x+2}{x^2}$ et $f'(x)=\frac{-x^2+4x}{(-x+2)^2}=\frac{-x(x-4)}{(-x+2)^2}$ d'après b).

Ainsi $g'(x)=\frac{-x+2}{x^2}\cdot\frac{-x(x-4)}{(-x+2)^2}=\frac{-(x-4)}{x(-x+2)}=\frac{x-4}{x(x-2)}$.

f) L'équation de la tangente est $y=mx+h$, où $m=g'(-2)=\frac{-2-4}{-2(-2-2)}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$.
Comme $g(-2)=\ln\left(\frac{(-2)^2}{-(-2)+2}\right)=\ln\left(\frac{4}{4}\right)=\ln(1)=0$, avec le point $(-2;g(-2))=$
$=(-2;0)$, on a $y=-\frac{3}{4}x+h \Rightarrow 0=-\frac{3}{4}\cdot(-2)+h \Rightarrow h=-\frac{3}{2}$.
L'équation de la tangente est donc $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$ et elle est dessinée ci-dessus.

## Problème 2

1. a) Pour dessiner les traces du plan $\Pi$, on cherche ses intersections avec les axes de référence.

Avec l'axe x : $y=z=0 \Rightarrow 2x-8=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow I_x(4;0;0)$.

Avec l'axe y : $x=z=0 \Rightarrow -y-8=0 \Rightarrow y=-8 \Rightarrow I_y(0;-8;0)$.

Avec l'axe z : $x=y=0 \Rightarrow 2z-8=0 \Rightarrow z=4 \Rightarrow I_z(0;0;4)$.

On peut alors dessiner les traces du plan (en bleu sur la feuille suivante).

b) On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}7\\6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+16+4}=$

$=\sqrt{36}=6$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}5\\10\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{2^2+8^2+2^2}=$

$=\sqrt{4+64+4}=\sqrt{72}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}5\\10\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{BC}\|=$

$=\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$.

Comme $\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{BC}\|^2=6^2+6^2=36+36=72=\|\overrightarrow{AC}\|^2$, on en conclut que le triangle ABC est bien isocèle et rectangle en B.

Pour que ABCD soit un carré, il faut que $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

Ainsi, $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}5\\10\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\\6\end{pmatrix} \Rightarrow D(1;6;6)$.

2. c) On connaît le centre de la sphère : $E(8;4;7)$.

Son rayon est donné par $\|\overrightarrow{EA}\|$.

On a : $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\-5\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{EA}\|=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+(-5)^2}=$

$=\sqrt{25+4+25}=\sqrt{54}$.

L'équation cartésienne de la sphère S est alors :

$$(x-8)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=54.$$

Point $B(7;6;0)$ : $(7-8)^2+(6-4)^2+(0-7)^2=1^2+2^2+7^2=1+4+49=54$.

Point $C(5;10;4)$ : $(5-8)^2+(10-4)^2+(4-7)^2=3^2+6^2+3^2=9+36+9=54$.

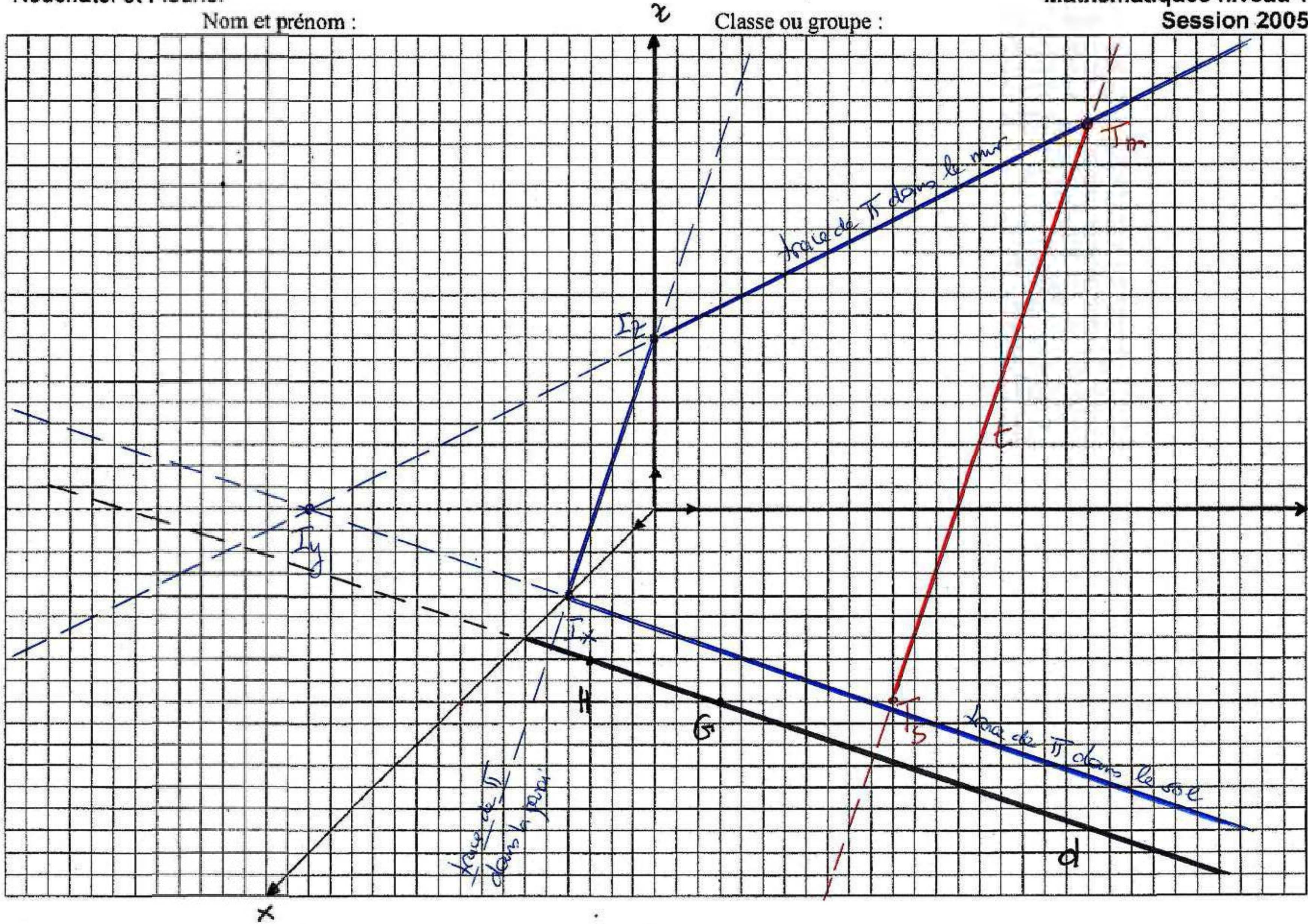
Ainsi B et C appartiennent bien à S.

d) Cherchons des équations paramétriques de la droite n perpendiculaire à $\Pi$ et passant par le centre E de la sphère.

Un vecteur perpendiculaire à $\Pi$ est $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Comme $E(8;4;7)$, des équations paramétriques de n sont :

Nom et prénom :

Classe ou groupe :





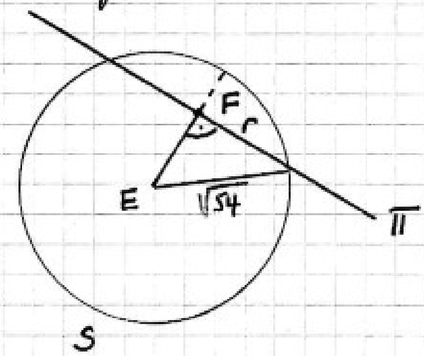

5

$$n : \begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

L'intersection de $n$ et $\Pi$ sera le centre du cercle d'intersection de $S$ et $\Pi$.
On substitue les équations de $n$ dans l'équation cartésienne de $\Pi$ :

$$2(8+2\lambda) - (4-\lambda) + 2(7+2\lambda) - 8 = 0$$
$$\Rightarrow 16 + 4\lambda - 4 + \lambda + 14 + 4\lambda - 8 = 0$$
$$\Rightarrow 9\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda = -2.$$

Avec $\lambda = -2$, on obtient $x = 8 - 4 = 4$, $y = 4 + 2 = 6$ et $z = 7 - 4 = 3$.
Ainsi, le centre du cercle d'intersection de $S$ et $\Pi$ est $F(4;6;3)$
Reste à trouver le rayon du cercle d'intersection de $S$ et $\Pi$.
On a:




On a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} =$

$= \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6.$

Par le théorème de Pythagore, on a $\|\overrightarrow{EF}\|^2 + r^2 = (\sqrt{54})^2 \Rightarrow 36 + r^2 = 54$
$\Rightarrow r^2 = 18 \Rightarrow r = \sqrt{18} \cong 4{,}24.$

3. e) La droite $t$ est incluse dans $\Pi$ et est donc perpendiculaire à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
La droite $t$ est tangente à la sphère en $C$ et est donc perpendiculaire à
$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de $t$ est alors parallèle à $\vec{n} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $t$ passe par $C(5;10;4)$, des équations paramétriques de $t$ sont:

$$t : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 10 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

f) On remarque que $t$ est parallèle à la paroi.

Trace dans le sol : $z=0 \Rightarrow 0=4-\lambda \Rightarrow \lambda=4 \Rightarrow x=5+4=9$ et $y=10$

$$\Rightarrow T_s(9;10;0)$$

Trace dans le mur : $x=0 \Rightarrow 0=5+\lambda \Rightarrow \lambda=-5 \Rightarrow y=10$ et $z=4+5=9$

$$\Rightarrow T_m(0;10;9).$$

On peut alors dessiner $t$ (voir feuille de dessin, en rouge).

g) L'autre droite de $\Pi$ tangente à la sphère $S$ et parallèle à $t$.
Comme $\Pi$ coupe la sphère selon un cercle de centre $F(4;6;3)$ (voir d)),
l'autre droite passera par le point symétrique de $C$ par rapport à $F$ : $C'$.
On a $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OF} - 2\overrightarrow{OC} =$

$$= 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC} = 2\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\10\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow C'(3;2;2)$$

Un vecteur directeur de cette autre droite est le même que celui de $t$ : $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques de cette autre droite sont donc : $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$.

4. h) Par substitution des équations de $d$ avec l'équation cartésienne de la sphère
$S$ : $(x-8)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=54$ (voir c)), on obtient :

$$(6+\lambda-8)^2+(2\lambda-4)^2+(0-7)^2=54$$
$$\Rightarrow (\lambda-2)^2+(2\lambda-4)^2+49=54$$
$$\Rightarrow (\lambda-2)^2+4(\lambda-2)^2=5$$
$$\Rightarrow 5(\lambda-2)^2=5 \Rightarrow (\lambda-2)^2=1 \Rightarrow \lambda-2=\pm 1$$
$$\Rightarrow \lambda = \begin{cases} 1+2=3 \\ -1+2=1 \end{cases}.$$

Avec $\lambda=3$, on trouve $x=6+3=9$, $y=2\cdot 3=6$ et $z=0$.
Avec $\lambda=1$, on trouve $x=6+1=7$, $y=2\cdot 1=2$ et $z=0$.
Les intersections de $d$ et $S$ sont donc $G(9;6;0)$ et $H(7;2;0)$.

i) Voir feuille de dessin (en noir).

# Problème 3

a) prob (répondre juste à au moins une question) =
$= 1 -$ prob (répondre juste à zéro question) =
$= 1 -$ prob (répondre faux à chaque question) $= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cong 0{,}9827 = 98{,}27\%$.

b) On utilise la loi binomiale : $C_3^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cong 0{,}2601 = 26{,}01\%$.

c) prob (au moins 1 bonne) $= 1 -$ prob (zéro bonne) $= 1 -$ prob ($n$ fausses) $= \frac{665}{729}$

$\Rightarrow$ prob ($n$ fausses) $= 1 - \frac{665}{729} = \frac{64}{729} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{64}{729}$

$\Rightarrow \log\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \log\left(\frac{64}{729}\right) \Rightarrow n \cdot \log\left(\frac{2}{3}\right) = \log\left(\frac{64}{729}\right)$

$\Rightarrow n = \dfrac{\log(64/729)}{\log(2/3)} = 6.$

Il faut donc corriger 6 réponses.

d) prob (juste à la première question) =
$=$ prob (juste à la $1^e$ question en ayant répondu au hasard) +
$+$ prob (juste à la $1^e$ question en n'ayant pas répondu au hasard) =
$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \cdot 1 = \frac{1}{30} + \frac{27}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15} \cong 0{,}9333 = 93{,}33\%$.

e) On utilise la loi binomiale : $C_1^2 \left(\frac{14}{15}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{14}{15}\right)^1 = 2 \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{15} = \frac{28}{225} \cong 0{,}1244 =$
$= 12{,}44\%$.

f) C'est une probabilité conditionnelle : $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$.

On a : $X = 1^e$ question pas répondue au hasard,
$Y = 1^e$ réponse juste,
$X \cap Y = 1^e$ réponse pas répondue au hasard et juste,
$P(X \cap Y) = \frac{9}{10} \cdot 1 = \frac{9}{10}$,
$P(Y) = \frac{14}{15}$ (voir d)).

Ainsi, la probabilité cherchée est $\dfrac{9/10}{14/15} = \frac{9}{10} \cdot \frac{15}{14} = \frac{27}{28} \cong 0{,}9643 = 96{,}43\%$.

g) prob (réussir examen) = prob (répondre juste à au moins 9 question) =
$=$ prob (répondre juste à 9 questions) + prob (répondre juste à 10 questions) =
$= C_9^{10} \left(\frac{14}{15}\right)^9 \left(1 - \frac{14}{15}\right)^1 + C_{10}^{10} \left(\frac{14}{15}\right)^{10} \left(1 - \frac{14}{15}\right)^0 = 10 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^9 \left(\frac{1}{15}\right)^9 + \left(\frac{14}{15}\right)^{10} \cong$
$\cong 0{,}8599 = 85{,}99\%$.

h) C'est à nouveau une probabilité conditionnelle : $P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$.

Ici : $X$ = Bernard a répondu juste à la 1e question,

$Y$ = un seul entre Albert et Bernard a répondu juste à la 1e question,

$X \cap Y$ = Bernard a répondu juste à la 1e question et Albert faux

$P(X\cap Y) = \frac{14}{15}\cdot\frac{2}{3} = \frac{28}{45}$ (voir d)),

$P(Y)$ = prob (Albert juste et Bernard faux) + prob (Albert faux et Bernard juste) =

$= \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{14}{15}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{14}{15} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15} + \frac{28}{45} = \frac{29}{45}$.

Ainsi, la probabilité cherchée est $\frac{28/45}{29/45} = \frac{28}{29} \cong 0,9655 = 96,55\%$.