EXAMEN DE MATURITE 2005

Corrigé

Problème 1

On a $f(x) = 2\ln(x)$, $x > 0$.

a) En $x = e$, on a $f(x) = 2\ln(e) = 2 \cdot 1 = 2$.

La tangente au graphe de f en $x=e$ est donnée par $y = mx + h$ où $m = f'(e)$.

On a $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$. Ainsi $m = f'(e) = \frac{2}{e}$.

L'équation de la tangente est donc $y = \frac{2}{e}x + h$.

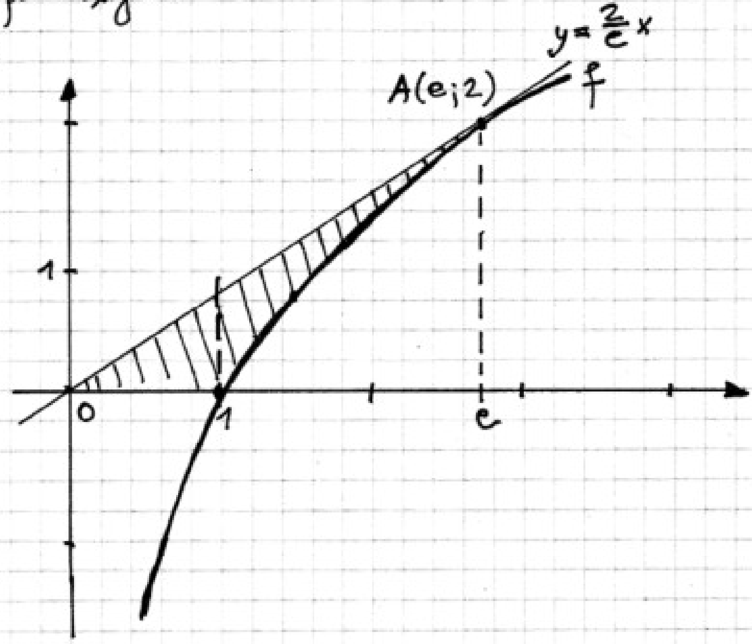
Avec le point $A(e;2)$, point commun entre la tangente et le graphe de f, on a, par substitution,

$2 = \frac{2}{e} \cdot e + h \Rightarrow 2 = 2 + h \Rightarrow h = 0$.

Ainsi, l'équation de la tangente est $y = \frac{2}{e}x$.

C'est une fonction linéaire qui passe donc par l'origine.

b) On doit calculer l'aire hachurée suivante:



Cette aire vaut $\int_0^1 y\,dx + \int_1^e (y - f(x))\,dx$, où $y = \frac{2}{e}x$.

On peut l'écrire $\int_0^1 y\,dx + \int_1^e y\,dx - \int_1^e f(x)\,dx = \int_0^e y\,dx - \int_1^e f(x)\,dx$.

On a $\int_0^e y\,dx = \int_0^e \frac{2}{e}x\,dx = \frac{2}{e}\int_0^e x\,dx = \frac{2}{e} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^e = \frac{2}{e}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{2}{e} \cdot \frac{e^2}{2} = e$.

De plus, une primitive de $\ln(x)$ est $x(\ln(x) - 1)$ (voir Formulaires et Tables p. 78).

Ainsi, $\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e 2\ln(x)\,dx = 2\int_1^e \ln(x)\,dx = 2x(\ln(x) - 1)\Big|_1^e =$

$= 2\big(e(\ln(e) - 1) - 1(\ln(1) - 1)\big) = 2\big(e(1-1) - 1(0-1)\big) = 2 \cdot 1 = 2$.

Ainsi, l'aire hachurée vaut $e-2 \cong 0{,}718$.

c) Le volume du corps engendré par la rotation de τ (aire hachurée de la partie b)) autour de l'axe x est donné par $\pi\int_0^1 y^2dx + \pi\int_1^e y^2dx - \pi\int_1^e (f(x))^2dx = \pi\int_0^e y^2dx - \pi\int_1^e (f(x))^2dx$, où $y=\frac{2}{e}x$ (voir Formulaires et Tables p. 82).

On a $\pi\int_0^e y^2dx = \pi\int_0^e\left(\frac{2}{e}x\right)^2dx = \pi\int_0^e \frac{4}{e^2}x^2dx = \frac{4\pi}{e^2}\int_0^e x^2dx = \frac{4\pi}{e^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^e = \frac{4\pi}{e^2}\cdot\frac{e^3}{3} = \frac{4\pi e}{3}$.

D'autre part, $\int_1^e (f(x))^2dx = \int_1^e (2\ln(x))^2dx = 4\int_1^e \ln^2(x)\,dx$.

On va utiliser la formule d'intégration par parties: $\int u'v\,dx = uv - \int uv'dx$.

On pose $u' = \ln(x)$ et $v = \ln(x)$; on a alors $u = x(\ln(x)-1)$ et $v' = \frac{1}{x}$.

Ainsi, $\int \ln^2(x)dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'dx = x(\ln(x)-1)\ln(x) - \int x(\ln(x)-1)\cdot\frac{1}{x}dx =$

$= x(\ln(x)-1)\ln(x) - \int(\ln(x)-1)dx = x(\ln(x)-1)\ln(x) - \int\ln(x)dx + \int 1dx =$

$= x(\ln(x)-1)\ln(x) - x(\ln(x)-1) + x = x\ln^2(x) - x\ln(x) - x\ln(x) + x + x =$

$= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x = x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2)$.

Ainsi, $\pi\int_1^e (f(x))^2dx = 4\pi x(\ln^2(x) - 2\ln(x)+2)\Big|_1^e =$

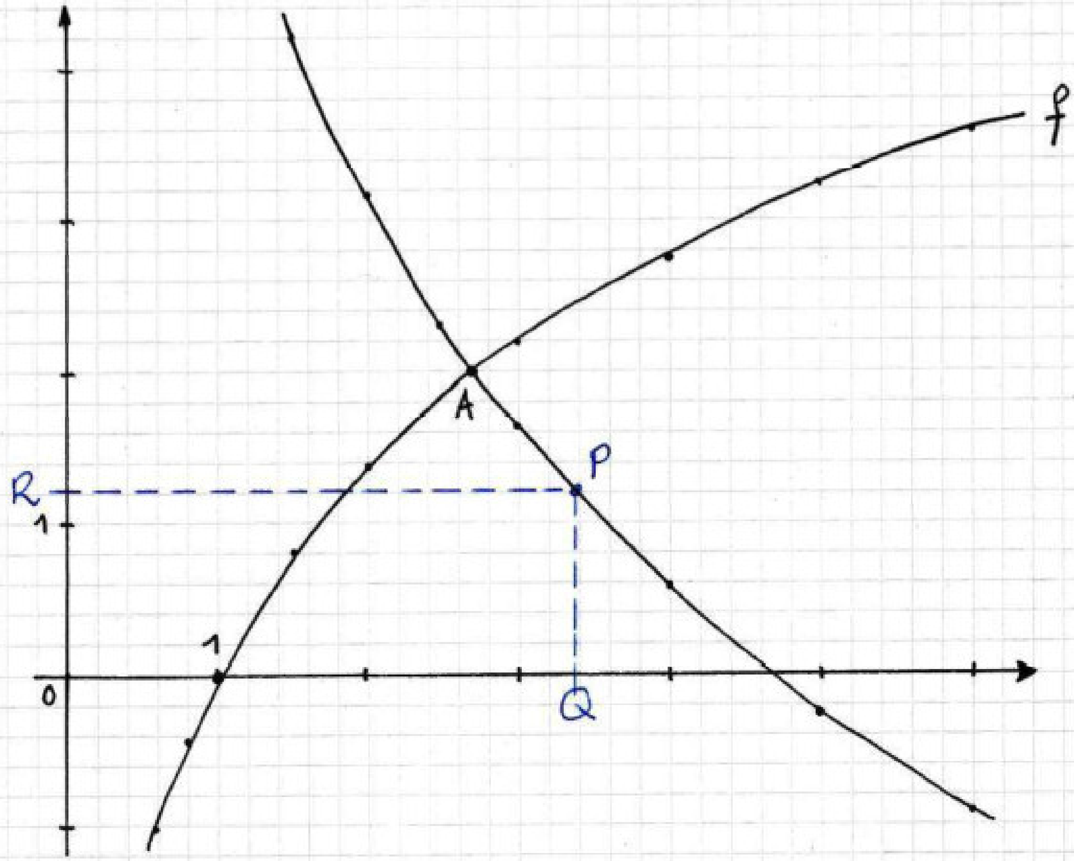
$= 4\pi\left(e(\underbrace{\ln^2(e)}_{1} - 2\underbrace{\ln(e)}_{1} + 2) - 1(\underbrace{\ln^2(1)}_{0} - 2\underbrace{\ln(1)}_{0} + 2)\right) =$

$= 4\pi\left(e(1-2+2) - 1\cdot 2\right) = 4\pi(e-2)$.

Par conséquent, le volume cherché est $\frac{4\pi e}{3} - 4\pi(e-2) = \frac{4\pi}{3}(e - 3(e-2)) =$
$= \frac{4\pi}{3}(e-3e+6) = \frac{4\pi}{3}(6-2e) \cong 2{,}36$.

d) On a $g(x) = a - b\ln(x)$ et $g'(x) = -b\cdot\frac{1}{x} = -\frac{b}{x}$.
Au point $A(e;2)$, on doit avoir $g(e)=2 \Rightarrow 2 = a - b\underline{\ln(e)} = a-b \Rightarrow a-b=2$.
En outre, comme f et g doivent se couper orthogonalement en $A(e;2)$, on doit avoir $g'(e) = -\frac{1}{f'(e)}$. Comme $f'(e) = \frac{2}{e}$ (voir a)) et $g'(e) = -\frac{b}{e}$, on doit avoir $-\frac{b}{e} = -\frac{1}{2/e} \Rightarrow \frac{b}{e} = \frac{e}{2} \Rightarrow b = \frac{e^2}{2} \Rightarrow a = b+2 = \frac{e^2}{2}+2$.
On a donc $a = \frac{e^2}{2}+2$ et $b = \frac{e^2}{2}$.

e) On a $g(x) = 2 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\ln(x)$.
Zéro de g: $g(x)=0 \Rightarrow 2+\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\ln(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^2}{2}\ln(x) = 2+\frac{e^2}{2}$
$\Rightarrow \ln(x) = \frac{4}{e^2}+1 \Rightarrow x = e^{\frac{4}{e^2}+1} \cong 4{,}67$.
Graphes de f et g:



f) Avec $P(x;y)$, on a $y = g(x) = 2 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\ln(x)$.
En outre $Q(x;0)$ et $R(0;y)$.
Ainsi $OQ = x$ et $OR = y = 2 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\ln(x)$.
L'aire du rectangle OQPR est donc donné par $xy = x\left(2 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\ln(x)\right)$.
On doit donc chercher x tel que l'aire de OQPR soit maximale.
Il faut donc chercher le maximum $h(x) = x\left(2 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\ln(x)\right)$.
Cherchons le ou les x tels que $h'(x) = 0$.
On a $h'(x) = 2 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\ln(x) + x\left(-\frac{e^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right) = 2 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\ln(x) - \frac{e^2}{2} = 2 - \frac{e^2}{2}\ln(x)$.
Ainsi, $h'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{e^2}{2}\ln(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^2}{2}\ln(x) = 2 \rightarrow \ln(x) = \frac{4}{e^2} \rightarrow x = e^{4/e^2} \cong$
$\cong 1{,}718$.
Faisons le tableau de croissance de h :

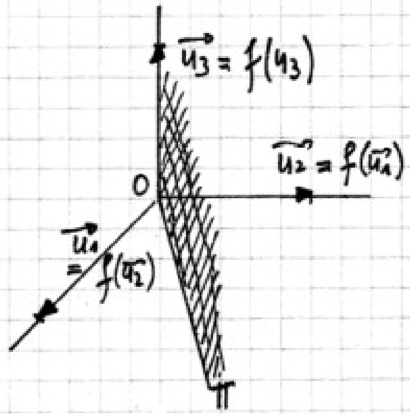
x		$1{,}718$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Par conséquent, $x = e^{4/e^2} \cong 1{,}718$ correspond bien à un maximum pour h.
Ainsi, l'abscisse de P pour laquelle l'aire du rectangle OQPR est maximale est $e^{4/e^2} \cong 1{,}718$.

Problème 2

On a le plan $\Pi : x-y=0$ ($\Rightarrow x=y$) et la droite d passant par l'origine et parallèle à $\vec{d} = \vec{u_1} + 2\vec{u_2} + 2\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) On a la situation suivante :



Ainsi, $f(\vec{u_1}) = \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\vec{u_2}) = \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{u_3}) = \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice M associée à f est alors $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

M est une matrice orthogonale : le produit scalaire de 2 des colonnes est toujours 0 et la norme de chaque colonne est 1.

On a alors $M^{-1} = {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$.

Comme M est orthogonale, ses valeurs propres sont 1 ou -1.

Avec la possibilité 1, on a :

$$M\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = v_1 \\ v_1 = v_2 \\ v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_3 \end{pmatrix};$$

avec $v_1 = 1$ et $v_3 = 0$, on obtient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; avec $v_1 = 0$ et $v_3 = 1$, on obtient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

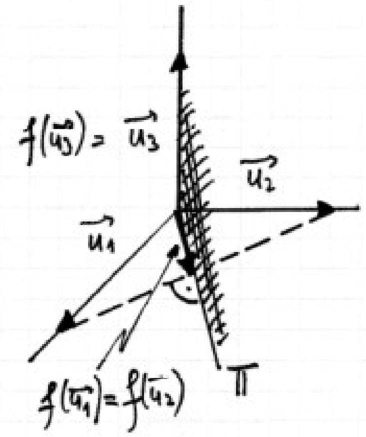
Avec la possibilité -1, on a :

$$M\vec{v} = -\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_1 = -v_2 \\ v_3 = -v_3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

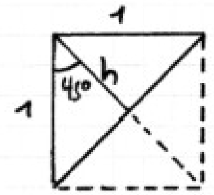
avec $v_1 = 1$, on obtient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\lambda_1 = 1$ est valeur propre de vecteur propre associé $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$ est valeur propre de vecteur propre associé $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) On a la situation suivante:



Ainsi, $f(\vec{u_1}) = f(\vec{u_2}) = h$ où h est la hauteur du triangle ci-dessous



h est la moitié de la diagonale du carré qui vaut $\sqrt{2}$. Ainsi, $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a alors $f(\vec{u_1}) = \begin{pmatrix} h\cos(45°) \\ h\sin(45°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $f(\vec{u_1}) = f(\vec{u_2}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{u_3}) = \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a ainsi $N = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $N^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N$ et

$MN = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N$.

c) Si $G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de g dans la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_3})$, c'est que $(\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_3})$ est une base propre, les valeurs propres étant $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$.

Comme g est la projection sur Π parallèlement à d, les vecteurs propres de g associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ sont des vecteurs de Π et les vecteurs propres de g associés à $\lambda_2 = 0$ sont les vecteurs parallèles à $\vec{d}$, vecteur directeur de d.

On peut donc prendre $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$) et $\vec{p_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 0$).

Ainsi, dans la base $(\vec{p_1};\vec{p_2};\vec{p_3})$ avec $\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{p_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{p_3}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ (base propre), on a $G'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

On a $\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{p_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{p_3}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; ainsi la matrice de passage de la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ à la base $(\vec{p_1};\vec{p_2};\vec{p_3})$ est $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$.

On a $\det(P)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&2\\0&1&2\end{vmatrix}=1-2=-1$.

De plus, $P_{11}=\begin{vmatrix}0&2\\1&2\end{vmatrix}=-2$, $P_{21}=\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}=-1$, $P_{31}=\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}=0$,

$P_{12}=\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}=2$, $P_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2$, $P_{32}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1$,

$P_{13}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$, $P_{23}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$, $P_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}=0$.

Ainsi, $P^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2&-2&1\\1&2&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-2&1&0\\-2&2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

On a alors $G=P\cdot G'\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

Ainsi, la matrice de g dans la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ est $G=\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

d) On a $H=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\-2&2&0\end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de H sont les λ solutions de $\det(H-\lambda I)=0$.

On a $\det(H-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-2&2-\lambda&0\\-2&2&-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)-(-2)\cdot1\cdot(-\lambda)=$

$=(\lambda+1)(2-\lambda)\lambda-2\lambda=\lambda\big((\lambda+1)(2-\lambda)-2\big)=\lambda(2\lambda-\lambda^2+2-\lambda-2)=\lambda(\lambda-\lambda^2)=$

$=\lambda^2(1-\lambda)$.

Ainsi, $\det(H-\lambda I)=0 \Rightarrow \lambda^2(1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=1$ et $\lambda_2=0$.

Avec $\lambda_1=1$, on a $H\vec{v}=\lambda_1\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\-2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-v_1+v_2=v_1\\-2v_1+2v_2=v_2\\-2v_1+2v_2=v_3\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}-2v_1+v_2=0\\-2v_1+v_2=0\\-2v_1+2v_2=v_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_2=2v_1\\v_3=v_2\end{cases} \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\2v_1\\2v_1\end{pmatrix}$; avec $v_1=1$, on obtient $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2=0$, on a $H\vec{v}=\lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\-2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-v_1+v_2=0\\-2v_1+2v_2=0\\-2v_1+2v_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow v_2=v_1 \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_1\\v_3\end{pmatrix}$; avec $v_1=1$ et $v_3=0$, on obtient $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et, avec

$v_1 = 0$ et $v_2 = 1$, on obtient $\vec{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre de H associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de H associés à la valeur propre $\lambda_2 = 0$.

On en déduit que h est la projection sur la droite contenant le vecteur $\vec{v_1}$ et l'origine parallèlement au plan contenant les vecteurs $\vec{v_2}$ et $\vec{v_2}'$ et l'origine.

Comme $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{d}$, la droite contenant le vecteur $\vec{v_1}$ et l'origine est la droite d.

De plus, on a $\vec{v_2} \wedge \vec{v_2}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où on tire que l'équation du plan contenant les vecteurs $\vec{v_2}$ et $\vec{v_2}'$ et l'origine est $x - y = 0$, ce qui est le plan Π.

Ainsi, h est la projection sur d parallèle à Π.

Problème 3

On a $f(z) = \frac{z}{z-1}$, $z \neq 1$.

a) Les points fixes de z sont les solutions de $f(z) = z$.

$f(z) = z \Rightarrow \frac{z}{z-1} = z \Rightarrow z = z(z-1) \Rightarrow z = z^2 - z \Rightarrow z^2 - 2z = 0$

$\Rightarrow z(z-2) = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z = 2$.

Ainsi, les points fixes de z sont $z=0$ et $z=2$.

b) On a $f \circ f(z) = f(f(z)) = f\left(\frac{z}{z-1}\right) = \dfrac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z}{z-1}-1} = \dfrac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z-(z-1)}{z-1}} = \dfrac{\frac{z}{z-1}}{\frac{1}{z-1}} =$

$= \frac{z}{z-1} : \frac{1}{z-1} = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z-1}{1} = \frac{z}{1} = z$.

Ainsi, $f \circ f(z) = z$, d'où on déduit que $f^{-1}(z) = f(z) = \frac{z}{z-1}$.

c) En posant $z = x+iy$, on a $f(z) = \frac{x+iy}{x+iy-1} = \frac{x+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+iy)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} =$

$= \frac{x^2 - x - \cancel{ixy} + \cancel{ixy} - iy - i^2 y}{(x-1)^2 - i^2 y^2} = \frac{x^2 - x + y^2 - iy}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{x^2 - x + y^2}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} i$.

En posant $w = f(z) = u + iv$, on a $u = \frac{x^2 - x + y^2}{(x-1)^2 + y^2}$ et $v = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}$.

Les z tels que $f(z)$ soit réel correspondent à $v = 0 \Rightarrow \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ si $(x-1)^2 + y^2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$.

Ainsi, l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit réel est l'axe réel sans l'élément $\{1\}$.

d) Les z tels que $f(z)$ soit purement imaginaire correspondent à $u = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x + y^2 = 0$ si $(x-1)^2 + y^2 \neq 0$, c'est-à-dire $(x;y) \neq (1;0)$

$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 0$, $(x;y) \neq (1;0) \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $(x;y) \neq (1;0)$.

Ainsi, l'ensemble des z tels que $f(z)$ est purement imaginaire est le cercle de centre $(\frac{1}{2};0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ auquel on enlève le point $(1;0)$.

e) L'image de l'axe imaginaire revient à poser $x = 0$.

On a alors $u = \frac{x^2 - x + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{y^2}{y^2+1}$ et $v = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{-y}{y^2+1}$.

On a $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \left(\frac{y^2}{y^2+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{y^2+1}\right)^2 = \left(\frac{2y^2 - (y^2+1)}{2(y^2+1)^2}\right)^2 + \frac{y^2}{(y^2+1)^2} =$

$= \left(\frac{y^2 - 1}{2(y^2+1)^2}\right)^2 + \frac{y^2}{(y^2+1)^2} = \frac{y^4 - 2y^2 + 1}{4(y^2+1)^2} + \frac{y^2}{(y^2+1)^2} = \frac{y^4 - 2y^2 + 1 + 4y^2}{4(y^2+1)^2} =$

$= \frac{y^4 + 2y^2 + 1}{4(y^2+1)^2} = \frac{(y^2+1)^2}{4(y^2+1)^2} = \frac{1}{4}$.

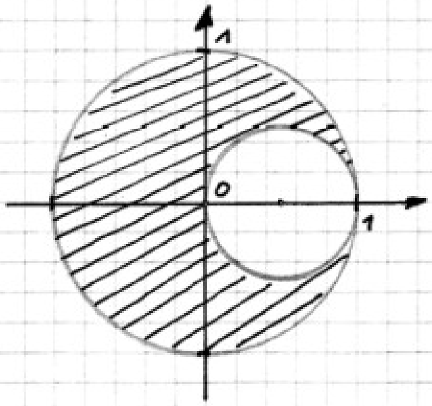
Ainsi, l'image de l'axe imaginaire est le cercle centré en $\left(\frac{1}{2};0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

f) On a $\left|f\left(\frac{1}{2}+yi\right)\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}+yi}{\frac{1}{2}+yi-1}\right| = \frac{\left|\frac{1}{2}+yi\right|}{\left|-\frac{1}{2}+yi\right|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+y^2}} = 1.$

D'après e), l'image de l'axe imaginaire, autrement dit des $z=x+yi$ avec $x=0$ est le cercle de centre $\left(\frac{1}{2};0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Comme $\left|f\left(\frac{1}{2}+yi\right)\right| = 1$, l'image des $z=\frac{1}{2}+yi$ est le centre centré à l'origine et de rayon 1.

Ainsi, l'ensemble A sera l'ensemble des z dans la surface comprise entre ces 2 cercles:



Problème 4

a) $p(\text{Guillermo gagne une partie par Andy}) = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$.

1) $p(\text{Guillermo gagne les 4 parties par Andy}) = \left(\frac{3}{8}\right)^4 = \frac{81}{4096} = 0,1978 =$
$= 19,78\,\%$.

2) $p(\text{Guillermo gagne au moins une partie par Andy}) =$
$= 1 - p(\text{Guillerme ne gagne aucune partie par Andy}) = 1 - \left(1 - \frac{3}{8}\right)^4 =$
$= 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^4 = 1 - \frac{625}{4096} = \frac{3471}{4096} \cong 0,8474 = 84,74\,\%$.

3) on utilise la loi binomiale: $p(\text{Guillermo gagne exactement 2 parties par Andy}) =$
$= C_2^4 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{9}{64} \cdot \frac{25}{64} = \frac{675}{2048} = 0,3296 = 32,96\,\%$.

b) $p(\text{victoire par Lleyton}) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.
$p(\text{victoire par Andy}) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$.
$p(\text{victoire par Marat}) = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$.
etc.
$p(\text{victoire par David}) = \frac{9}{9+1} = \frac{9}{10}$.
Ainsi $p(\text{Roger emporte les 8 parties}) = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} =$
$= 0,2 = 20\,\%$.

c) X est le nombre de jours que durera le tournoi.
On a $p(X=2) = p(\text{Tim gagne les } 2\times) + p(\text{Carlos gagne les 2 fois}) =$
$= \left(\frac{7}{6+7}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{6+7}\right)^2 = \frac{49}{169} + \frac{36}{169} = \frac{85}{169} \cong 0,5030 = 50,30\,\%$.

De plus $p(X=4) = p(\text{victoire de Tim / victoire de Carlos / victoire de Tim / victoire de Tim}) +$
$+ p(\text{victoire de Carlos / victoire de Tim / victoire de Carlos / victoire de Carlos}) =$
$= \left(\frac{7}{6+7}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{7}{6+7}\right) + \frac{7}{6+7}\left(1 - \frac{7}{6+7}\right)^3 = \frac{343}{2197} \cdot \frac{6}{13} + \frac{7}{13} \cdot \frac{216}{2197} = \frac{3570}{28561} \cong$
$\cong 0,1250 = 12,50\,\%$.

d) On a $p(\text{Roger gagne le tournoi}) =$
$= p(\text{Roger gagne contre Marat}) \cdot p(\text{Lleyton gagne contre Andy}) \cdot p(\text{Roger gagne contre Lleyton}) +$
$+ p(\text{Roger gagne contre Marat}) \cdot p(\text{Andy gagne contre Lleyton}) \cdot p(\text{Roger gagne contre Andy}) =$
$= \frac{4}{1+4} \cdot \frac{3}{2+3} \cdot \frac{2}{1+2} + \frac{4}{1+4} \cdot \left(1 - \frac{3}{2+3}\right) \cdot \frac{3}{1+3} =$
$= \frac{4}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{4}}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} = \frac{14}{25} = 0,56 = 56\,\%$.