Problème 1 (poids 3)

On considère la fonction donnée par $f(x) = 2\ln(x)$.

a) Soit A le point d'abscisse $x = \mathrm{e}$ du graphe de f. Montrer que la tangente t au graphe de f en A passe par l'origine O.

b) Soit τ la surface fermée limitée par l'axe Ox, le graphe de f et la tangente t. Calculer l'aire de τ.

c) Calculer le volume du corps engendré par la rotation de τ autour de l'axe Ox.

On considère encore la fonction donnée par $g(x) = a - b\ln(x)$.

d) Calculer a et b de façon que les graphes de f et de g se coupent orthogonalement au point A.

Pour la suite, on pose $a = 2 + \frac{\mathrm{e}^2}{2}$ et $b = \frac{\mathrm{e}^2}{2}$, donc $g(x) = 2 + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2}\ln(x)$.

e) Déterminer le zéro de g, puis esquisser les graphes de f et g dans le même repère.

f) Soit P un point variable du graphe de g, d'ordonnée positive.
Soit Q et R les projections orthogonales de P sur les axes Ox et Oy.
Calculer l'abscisse de P pour laquelle l'aire du rectangle $OQPR$ est maximale.

Problème 2 (poids 3)

On considère le plan $\pi : x - y = 0$, ainsi que la droite d passant par l'origine parallèlement au vecteur $\vec{d} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$.

a) On considère l'application linéaire f qui associe à $\overrightarrow{OP}$ son symétrique par rapport à π.
Donner l'image par f des vecteurs de base $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$, puis la matrice M de cette symétrie ainsi que les matrices M^2 et M^{-1}.
Quels sont les valeurs et les vecteurs propres de f ?

b) Donner la matrice N de la projection orthogonale sur le plan π ainsi que les matrices N^2 et MN.

c) On considère l'application linéaire g qui associe à $\overrightarrow{OP}$ sa projection sur le plan π parallèlement à la droite d.
Donner une base $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ par rapport à laquelle la matrice G' de g s'écrit $G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
puis déterminer la matrice G de g par rapport à la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

d) On considère l'application linéaire h, donnée, dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, par la matrice
$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Trouver les valeurs et les vecteurs propres de H, puis caractériser géométriquement l'application h.

Problème 3 (poids 2)

On considère la fonction $f : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}\setminus\{1\},\ z \to f(z) = \dfrac{z}{z-1}$

a) Déterminer les points fixes de f.

b) Trouver l'expression de la composée $f \circ f$, puis donner la réciproque de f.

c) Quel est l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit réel ?

d) Quel est l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit purement imaginaire ?

e) Quelle est l'image de l'axe imaginaire ?

f) Dessiner, dans le plan de Gauss, l'image par la fonction f de l'ensemble $A = \left\{ z \in \mathbb{C}\ ; 0 \le \text{Re}(z) \le \frac{1}{2} \right\}$, après avoir vérifié que $\left| f(\tfrac{1}{2} + y\text{i}) \right| = 1$.

Problème 4 (poids 2)

Voici la liste des neuf meilleurs joueurs de tennis du monde.

Pour trouver la probabilité de victoire d'un joueur lors d'une partie, on calcule celle du mieux placé des deux joueurs dans le classement à l'aide de la formule $\dfrac{c_2}{c_1 + c_2}$, avec c_1 le classement du mieux placé des deux joueurs et c_2 le classement du second joueur.

La probabilité de victoire de l'autre joueur se calcule facilement car il n'y a pas de match nul au tennis.

Le classement donné ne change pas au cours de l'exercice.

Prénom	Classement
Roger	1
Lleyton	2
Andy	3
Marat	4
Guillermo	5
Carlos	6
Tim	7
Gaston	8
David	9

Exemple : lors d'une partie opposant Lleyton à Tim, la probabilité de victoire de Lleyton est donnée par $P = \dfrac{7}{7+2} = \dfrac{7}{9}$

a) Guillermo joue contre Andy quatre parties. Quelle est la probabilité que Guillermo gagne :
1) les quatre parties 2) au moins une partie 3) exactement deux parties.

b) Roger affronte chaque joueur de la liste. Calculer la probabilité qu'il remporte les huit parties.

c) Tim et Carlos décident de faire un tournoi spécial. Ils jouent une partie chaque jour jusqu'à ce que l'un des deux joueurs gagne deux jours consécutifs. Appelons X le nombre de jours que durera ce tournoi. Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 4)$.

d) Le journal « tennis.com » organise un tournoi avec les quatre meilleurs joueurs mondiaux. Le numéro 1 affronte le numéro 4, le numéro 2 le numéro 3, puis les vainqueurs s'affrontent en finale. Calculer la probabilité que Roger remporte ce tournoi.