LYCEE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITE
Mathématiques de niveau 1

SESSION 2006

Corrigé

Problème 1

On a $f(x) = (x^2+bx+b)e^{-x}$, où $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

a) On a $f(-1) = ((-1)^2 + b(-1) + b)e^{-(-1)} = (1-b+b)e^{1} = e$.
Ainsi $A(-1;e)$ appartient au graphe de f pour toute valeur de b.

b) On a $f(x) = u \cdot v$ avec $u = x^2+bx+b$ et $v = e^{-x}$.
Comme $u' = 2x+b$ et $v' = -e^{-x}$, on a
$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = (2x+b)e^{-x} + (x^2+bx+b)(-e^{-x}) =$
$= (2x+b-x^2-bx-b)e^{-x} = (-x^2+(2-b)x)e^{-x} = x(-x+2-b)e^{-x}$.

Les points à tangente horizontale sont donnés par $f'(x)=0$.
$f'(x)=0 \Rightarrow x(-x+2-b)e^{-x}=0 \Rightarrow x(-x+2-b)=0$ car $e^{-x}>0$ pour tout x
$\Rightarrow x=0$ et $-x+2-b=0 \Rightarrow x=2-b$.
Avec $x=0$, on a $f(x) = (0^2+b \cdot 0+b)e^{-0} = b$.
Avec $x=2-b$, on a $f(x) = ((2-b)^2+b(2-b)+b)e^{-(2-b)} =$
$= (4-4b+b^2+2b-b^2+b)e^{b-2} =$
$= (4-b)e^{b-2}$.
Ainsi, $(0;b)$ et $(2-b;(4-b)e^{b-2})$ sont les points à tangente horizontale de f.

$(0;b)$ est situé sur l'axe des abscisses si $b=0$.
$(2-b;(4-b)e^{b-2})$ est situé sur l'axe des abscisses si $(4-b)e^{b-2}=0 \Rightarrow 4-b=0 \Rightarrow b=4$.

On a maintenant $b=4$ et $f(x) = (x^2+4x+4)e^{-x} = (x+2)^2e^{-x}$

c) Domaine de définition : comme il n'y a pas d'exclu, $D = \mathbb{R}$.
Parité : comme e^{-x} n'est ni paire, ni impaire, f n'est ni paire, ni impaire.
Intersection avec l'axe x : $f(x)=0 \Rightarrow (x+2)^2e^{-x}=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x+2=0$
$\Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2;0)$.
Intersection avec l'axe y : $x=0 \Rightarrow f(x) = 2^2e^{-0} = 4 \Rightarrow (0;4)$.
Tableau de signes :

x		-2	
$f(x)$	$+$	0	$+$

Asymptotes verticales : Comme il n'y a pas d'exclu, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Asymptotes non verticales : comme on a e^{-x} dans l'expression de f, il n'y a pas d'asymptote oblique ; on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+2)^2 e^{-x} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)^2 e^{-x} = (+\infty)\cdot 0 = 0$ car l'exponentielle gagne.

Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

Dérivées : d'après b), on a $f'(x) = x(-x+2-b)e^{-x}$;

avec $b=4$, on a $f'(x) = x(-x+2-4)e^{-x} = x(-x-2)e^{-x} = -x(x+2)e^{-x}$

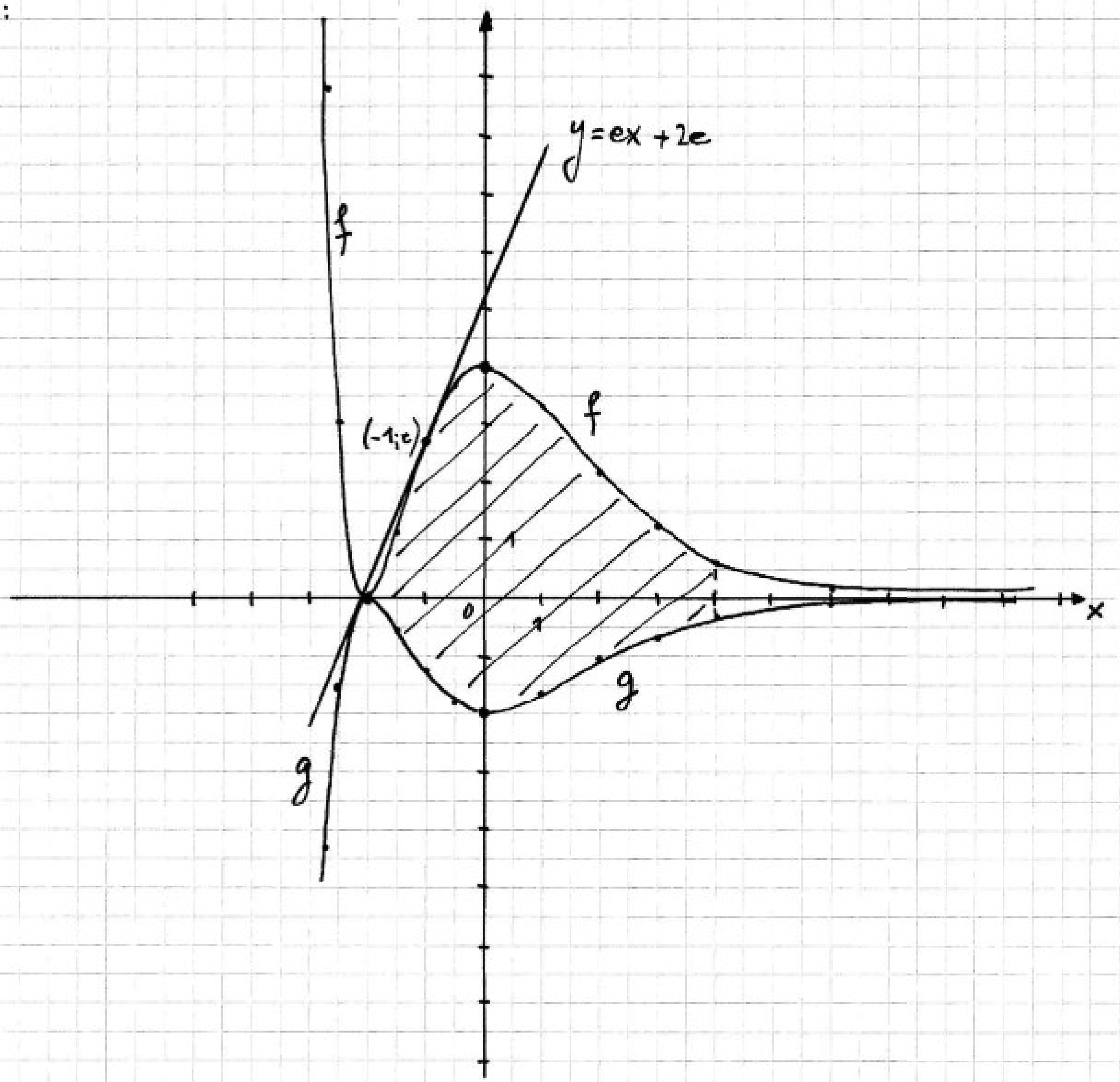
Points à tangente horizontale : d'après b), ce sont $(0;b)$ et $(2-b;(4-b)e^{b-2})$;

avec $b=4$, on trouve $(0;4)$ et $(-2;0)$.

Tableau de variations :

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min en $(-2;0)$	$\nearrow$	max en $(0;4)$	$\searrow$

Graphe :



d) 1. L'équation de la tangente est $y = mx + h$, où $m = f'(-1)$.

On a $f'(x) = -x(x+2)e^{-x}$ (voir c)).

Ainsi $m = f'(-1) = 1 \cdot (-1+2)e^{1} = e$.

L'équation de la tangente est donc $y = ex + h$.

Le point $(-1; e)$ appartient à la tangente.

Par substitution, on trouve $e = e(-1) + h \Rightarrow e = -e + h \Rightarrow h = 2e$.

L'équation de la tangente est donc $y = ex + 2e$.

2. $y = 0 \Rightarrow ex + 2e = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2; 0)$.

3. La pente de $y = ex + h$ est e.

L'angle avec l'axe x est donc $\tan^{-1}(e) \cong 69{,}8°$.

4. Voir dessin page précédente.

e) Voir dessin page précédente.

f) Voir dessin page précédente.

L'aire de la surface hachurée est donnée par $\int_{-2}^{4} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{4} (f(x) - (-\frac{1}{2} f(x)))\, dx =$

$= \int_{-2}^{4} \frac{3}{2} f(x)\, dx = \frac{3}{2} \int_{-2}^{4} f(x)\, dx$.

Il nous faut chercher une primitive de $f(x) = (x^2 + 4x + 4)e^{-x}$.

On sait qu'elle est de la forme $F(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$.

On va déterminer A, B, C avec la relation $F'(x) = f(x)$.

On a $F(x) = u \cdot v$ avec $u = Ax^2 + Bx + C$ et $v = e^{-x}$.

Comme $u' = 2Ax + B$ et $v' = -e^{-x}$, on a

$F'(x) = u'v + uv' = (2Ax + B)e^{-x} + (Ax^2 + Bx + C)(-e^{-x}) =$

$= (2Ax + B - Ax^2 - Bx - C)e^{-x} = (-Ax^2 + (2A - B)x + B - C)e^{-x}$

On doit ainsi avoir $(-Ax^2 + (2A-B)x + B - C)e^{-x} = (x^2 + 4x + 4)e^{-x}$.

Par identification des termes, on a le système : $\begin{cases} -A = 1 & (1) \\ 2A - B = 4 & (2) \\ B - C = 4 & (3) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow A = -1$.

(2) $\Rightarrow -2 - B = 4 \Rightarrow B = -6$.

(3) $\Rightarrow -6 - C = 4 \Rightarrow C = -10$.

On a donc $F(x) = (-x^2 - 6x - 10)e^{-x} = -(x^2 + 6x + 10)e^{-x}$.

De plus $F(4) = -(4^2+6\cdot 4+10)e^{-4} = -50e^{-4}$ et

$F(-2) = -((-2)^2+6\cdot(-2)+10)e^{2} = -2e^{2}$.

Ainsi, l'aire de la surface hachurée est $\frac{3}{2}\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \frac{3}{2}\left(F(4)-F(-2)\right) =$

$= \frac{3}{2}\left(-50e^{-4}+2e^{2}\right) = 3e^{2}-75e^{-4} \simeq 20{,}79.$

Problème 2

1. a) On a $\Pi_1 : 5x+5y-4z-20=0$ et $\Pi_2 : x+y-8=0$.

Pour dessiner les traces d'un plan, il faut chercher ses intersections avec les axes:

Π_1 : avec l'axe x: $y=z=0 \Rightarrow 5x-20=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow I_x(4;0;0)$;

avec l'axe y: $x=z=0 \Rightarrow 5y-20=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow I_y(0;4;0)$;

avec l'axe z: $x=y=0 \Rightarrow -4z-20=0 \Rightarrow z=-5 \Rightarrow I_z(0;0;-5)$;

on peut alors dessiner les traces de Π_1 (en bleu à la page suivante).

Π_2 : axe l'axe x: $y=z=0 \Rightarrow x-8=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow J_x(8;0;0)$;

avec l'axe y: $x=z=0 \Rightarrow y-8=0 \Rightarrow y=8 \Rightarrow J_y(0;8;0)$;

avec l'axe z: $x=y=0 \Rightarrow -8=0 \Rightarrow$ impossible $\Rightarrow \Pi_2$ est parallèle à l'axe z;

on peut alors dessiner les traces de Π_2 (en rouge à la page suivante).

b) Comme t_1 passe par $I_x(4;0;0)$ et $I_y(0;4;0)$ et t_2 passe par $J_x(8;0;0)$ et $J_y(0;8;0)$, t_1 et t_2 sont parallèles.

Dans le sol, leurs équations sont (on met $z=0$ dans les équations des plans):

$t_1 : 5x+5y-20=0 \Rightarrow x+y-4=0$

$t_2 : x+y-8=0.$

La plus courte distance entre t_1 et t_2 sera égale à la distance d'un point de t_1 à la droite t_2 et vaudra donc $dist(I_x; t_2)$.

D'après la géométrie plane, on a : $dist(I_x;t_2) = \dfrac{|4+0-8|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cong 2,83.$

c) L'angle aigu entre Π_1 et Π_2 est donné par l'angle aigu entre $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$, où $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont respectivement des vecteurs normaux de Π_1 et Π_2.

On peut prendre $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

L'angle α cherché sera alors donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}$.

On a: $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = \begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 5\cdot1+5\cdot1+(-4)\cdot0 = 5+5 = 10,$

$\|\vec{n_1}\| = \sqrt{5^2+5^2+(-4)^2} = \sqrt{25+25+16} = \sqrt{66}$ et

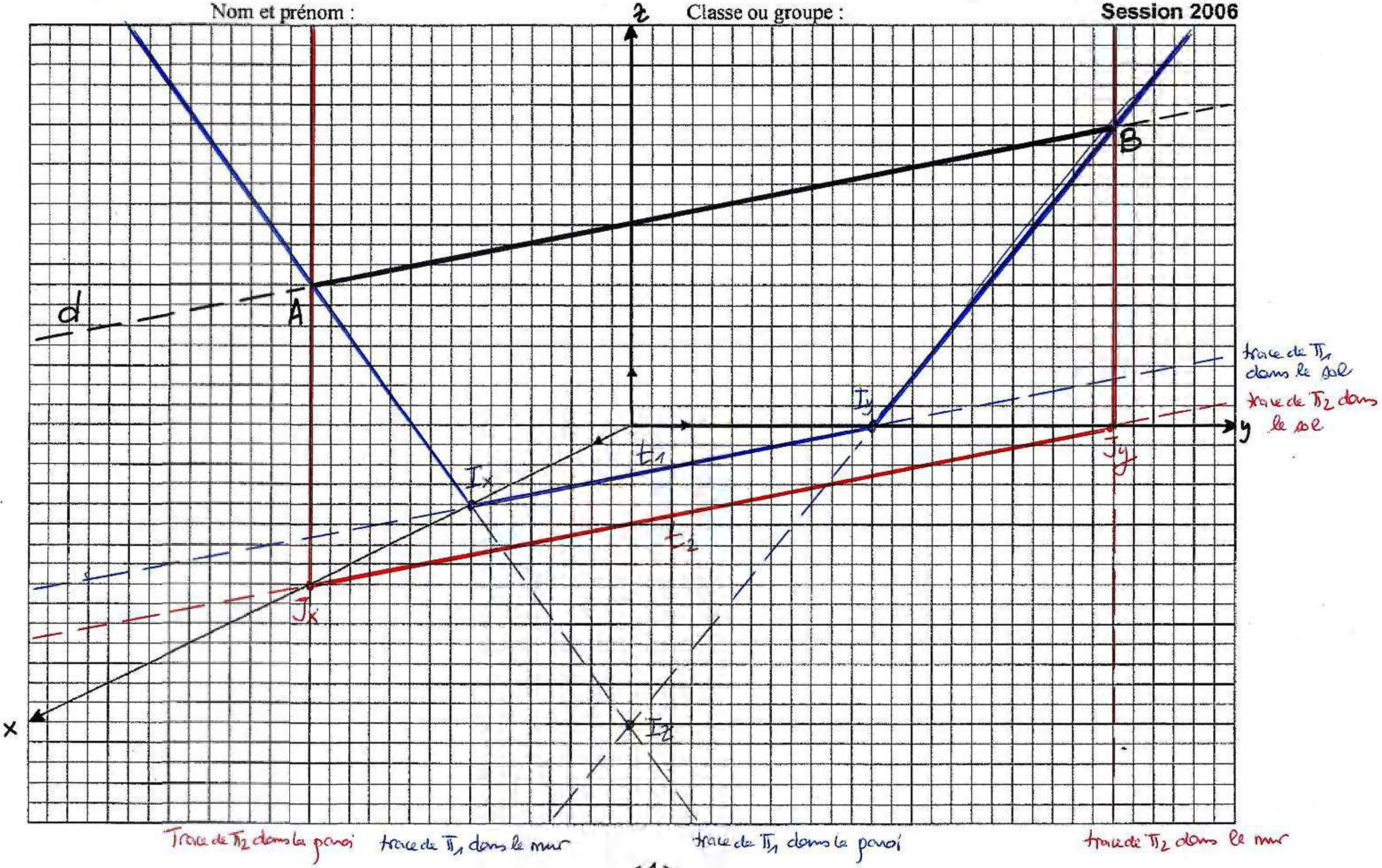
$\|\vec{n_2}\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}.$

Ainsi $\cos(\alpha) = \dfrac{10}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{2}} \cong 0,87 \Rightarrow \alpha \cong 29,5°.$

d) La droite d'intersection de Π_1 et Π_2 est la droite qui relie les intersections des traces de ces plans sur les plans de référence (en noir sur le dessin page suivante).

Nom et prénom :

Classe ou groupe :



e) Cherchons les coordonnées de A et B, intersections de Π_1 et Π_2 respectivement dans la paroi et le mur:

A: on a $y=0 \Rightarrow 5x-4z-20=0$ et $x-8=0$

$\Rightarrow x=8$ et $5.8-4z-20=0 \Rightarrow 40-20=4z$

$\Rightarrow 4z=20 \Rightarrow z=5 \Rightarrow A(8;0;5)$.

B: on a $x=0 \Rightarrow 5y-4z-20=0$ et $y-8=0 \Rightarrow B(0;8;5)$.

Un vecteur directeur de d est parallèle à $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}0\\8\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi, des équations paramétriques de d sont $\begin{cases} x=8-\lambda \\ y=\lambda \\ z=5 \end{cases}$.

2. On a $S: (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ et $\Pi_3: x+2y-2z+40=0$.

Le centre de la sphère est $K(3;-2;1)$ et son rayon $r=\sqrt{100}=10$.

f) Cherchons la distance entre K et Π_3:

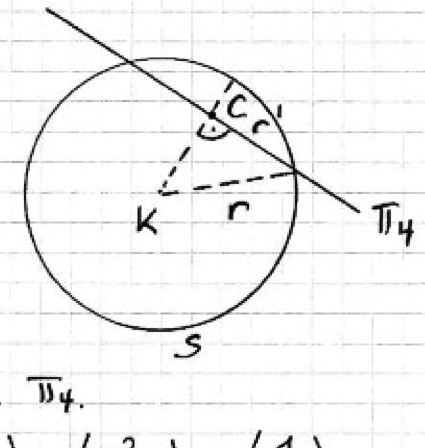
on a $\text{dist}(K;\Pi_3)=\dfrac{|3+2(-2)-2.1+40|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{|3-4-2+40|}{\sqrt{9}}=\dfrac{37}{3}$.

Comme $\text{dist}(K;\Pi_3) > r=10$, on en déduit que Π_3 ne coupe pas la sphère.

La plus courte distance les séparants est donnée par $\text{dist}(K;\Pi_3)-r=$

$=\dfrac{37}{3}-3=\dfrac{7}{3}$.

g) On a la situation suivante:



Le vecteur $\overrightarrow{KC}$ est perpendiculaire à Π_4.

On a $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}1\\-6\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

Ainsi, l'équation cartésienne de Π_4 s'écrit $x+2y-2z+d=0$.

Avec le point $C(1;-6;5)$, par substitution, on trouve:

$1+2(-6)-2\cdot5+d=0 \Rightarrow 1-12-10+d=0 \Rightarrow d=21$.

L'équation cartésienne de Π_4 est donc $x+2y-2z+21=0$.

On a $\|\overrightarrow{KC}\|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$.

Par le théorème de Pythagore, on a alors $r^2=\|\overrightarrow{KC}\|^2+r'^2$

$\Rightarrow \quad r' = \sqrt{r^2 - \|KC\|^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8.$

Le rayon du cercle d'intersection vaut donc 8.

h) Par substitution des équations paramétriques de t dans l'équation de S, on trouve
$(13+4\lambda-3)^2 + (3-3\lambda+2)^2 + (3+2\lambda-1)^2 = 100$
$\Rightarrow (4\lambda+10)^2 + (-3\lambda+5)^2 + (2\lambda+2)^2 = 100$
$\Rightarrow 16\lambda^2 + 80\lambda + 100 + 9\lambda^2 - 30\lambda + 25 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 100$
$\Rightarrow 29\lambda^2 + 58\lambda + 129 = 100 \Rightarrow 29\lambda^2 + 58\lambda + 29 = 0$
$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$
Avec $\lambda = -1$, on trouve $x = 13 - 4 = 9$, $y = 3+3 = 6$ et $z = 3-2 = 1$.
L'unique point d'intersection de t et S est donc $(9; 6; 1)$.
Comme il n'y a qu'un point d'intersection, on en déduit que t est tangent à S.

i) Comme $T(9;6;1)$ est l'intersection de t et S (voir h)), $T(9;6;1)$ appartient bien à S.

j) Un vecteur directeur cherché sera perpendiculaire à un vecteur directeur de t, à savoir $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, et perpendiculaire à $\overrightarrow{KT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OK} =$
$= \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Il sera donc parallèle à $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 0 - 2\cdot 4 \\ 2\cdot 3 - 4\cdot 0 \\ 4\cdot 4 - (-3)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 25 \end{pmatrix}.$

Un vecteur directeur de t' est donc $\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Problème 3

a) On utilise la loi binomiale : $C_1^{10}\,\underset{\substack{\nearrow\\ \text{1 poule infectée}\\ \text{par le GAV1}}}{\frac{1}{10}}\cdot \underset{\substack{\nwarrow\\ \text{9 poules}\\ \text{pas infectées}}}{\left(\frac{9}{10}\right)^9} = 10\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^9 = \left(\frac{9}{10}\right)^9 \cong 0{,}3874$
$= 38{,}74\%$.

b) prob (au plus une poule infectée par GAV1) =
$=$ prob (zéro poule infectée) + prob (une poule infectée) =
$= C_0^{10}\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^{10} + C_1^{10}\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^9 = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^9 \cong 0{,}7361 = 73{,}61\%$.

c) prob (cinq poules infectées par le GAV1) $= C_5^{10}\left(\frac{1}{10}\right)^5\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^5 \cong 0{,}001488 = 0{,}1488\%$.

d) prob (1 poule infectée le surlendemain) $= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{50}$
prob (la poule pas infectée le surlendemain) $= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$
prob (aucun des 10 poules infectées par le GAV2 le surlendemain) =
$= C_0^{10}\left(\frac{1}{50}\right)^0\left(\frac{49}{50}\right)^{10} = \left(\frac{49}{50}\right)^{10} = 0{,}8171 = 81{,}71\%$.

e) prob (porteuse le surlendemain) = 1 − prob (pas porteuse le surlendemain) =
$= 1 - \frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10} = 1 - \frac{81}{100} = 0{,}19 = 19\%$.

f) prob (porteuse 5 jours plus tard) = 1 − prob (pas porteuse 5 jours plus tard) =
$= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^5 \cong 0{,}4095 = 40{,}95\%$.

g) prob (porteuse n jours plus tard) $> 99\% = 0{,}99$
$\Rightarrow$ 1 − prob (pas porteuse n jours plus tard) $> 0{,}99$
$\Rightarrow 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n > 0{,}99 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n < 0{,}01$.
Comme la fonction log est strictement croissante ($x<y \Rightarrow \log(x) < \log(y)$), on obtient $\log\left(\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) < \log(0{,}01)$.
Avec la propriété du log : $\log(a^n) = n\log(a)$, on trouve $n\log\left(\frac{9}{10}\right) < \log(0{,}01)$.
Comme $\log\left(\frac{9}{10}\right) < 0$, on obtient finalement :

$$n > \frac{\log(0{,}01)}{\log(9/10)} \cong 43{,}7.$$

Il faudra donc 44 jours au minimum.

h) On a une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

On a : A = porteuse du GAV2 le surlendemain,
B = porteuse d'un des 2 virus le surlendemain,
$A\cap B$ = porteuse du GAV2 le surlendemain,

$$p(A \cap B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50},$$

$$p(B) = \frac{19}{100} \qquad \text{(voir e))}.$$

Ainsi, la probabilité cherchée est $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/50}{19/100} = \frac{2}{19} \cong 0,1053 =$
$= 10,53\%$.