

Problème 1 (poids 2)

On considère la fonction $f : x \mapsto y = (x^2 + bx + b) \cdot e^{-x}$, où b est un nombre réel différent de 2 ($b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$).

- Vérifier que le graphe de f passe par le point $A(-1; e)$ pour toute valeur de b .
- Calculer (en fonction de b) la dérivée $f'(x)$ et les coordonnées des points à tangente horizontale du graphe de f .
Pour quelles valeurs de b l'un de ces points est-il situé sur l'axe des abscisses ?

Pour la suite du problème, on pose $b = 4$ donc $f(x) = (x^2 + 4x + 4) \cdot e^{-x}$.

- Étudier la fonction f , représenter son graphe dans un repère orthonormé, mettre en évidence le point $A(-1; e)$.
- Établir une équation de la tangente au graphe de f en $A(-1; e)$.
 - Déterminer le point d'intersection de la tangente et de l'axe des abscisses.
 - Calculer l'angle aigu que forment la tangente et l'axe des abscisses.
 - Dessiner la tangente dans le même repère.
- On considère la fonction $g : x \mapsto y = -\frac{1}{2}f(x)$.
Représenter son graphe dans le même repère.
- Hachurer la surface fermée délimitée par les graphes de f et de g et les droites verticales d'équation $x = -2$ et $x = 4$.
Calculer l'aire de cette surface.

Problème 2 (poids 2)

Remarque : Pour tous les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée (page 4).

1. On considère les plans $\pi_1 : 5x + 5y - 4z - 20 = 0$ et $\pi_2 : x + y - 8 = 0$.
 - a) Dessiner les traces des plans π_1 et π_2 .
 - b) On appelle t_1 la trace dans le sol du plan π_1 et t_2 la trace dans le sol du plan π_2 .
Calculer la plus courte distance entre les droites t_1 et t_2 .
 - c) Calculer l'angle aigu entre les plans π_1 et π_2 .
 - d) Dessiner d , la droite d'intersection de ces deux plans.
 - e) Donner une représentation paramétrique de la droite d .
2. On donne la sphère $s : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ et le plan $\pi_3 : x + 2y - 2z + 40 = 0$.
 - f) Après avoir vérifié que le plan π_3 ne coupe pas la sphère, calculer la plus courte distance les séparant.
 - g) $C(1; -6; 5)$ est le centre du cercle d'intersection du plan π_4 et de la sphère. Déterminer le rayon de ce cercle ainsi qu'une équation cartésienne du plan π_4 .
 - h) On donne la droite $t : \begin{cases} x = 13 + 4\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$.
Déterminer les éventuels points d'intersection de la droite t et de la sphère s . Conclusion ?
 - i) Vérifier que le point $T(9; 6; 1)$ appartient à la sphère s .
 - j) Rechercher un vecteur directeur de la droite t' perpendiculaire à t et tangente à s au point T .

Problème 3 (poids 1)

Le virus GAV1 contamine les poules de manière tout à fait aléatoire. Pour une poule qui n'est pas encore infectée par le virus, la probabilité qu'elle soit porteuse du virus le lendemain est égale à $\frac{1}{10}$. De plus, si une poule est porteuse du virus GAV1, la probabilité que ce virus subisse une mutation irréversible et que cette poule soit porteuse le lendemain du virus GAV2, est égale à $\frac{1}{5}$. Si le virus ne mute pas, il reste présent sous la forme GAV1.

Dans un poulailler, il y a un jour donné 10 poules non infectées. En supposant qu'aucune de ces poules ne meure, répondre aux questions suivantes :

- a) Quelle est la probabilité qu'une seule poule soit porteuse du virus GAV1 le lendemain ?
- b) Quelle est la probabilité qu'au plus une poule soit porteuse du virus GAV1 le lendemain ?
- c) Quelle est la probabilité qu'exactement la moitié des poules soit porteuse du virus GAV1 le lendemain ?
- d) Quelle est la probabilité qu'aucune des poules ne soit porteuse du virus GAV2 le surlendemain ?

On choisit une poule au hasard dans ce poulailler.

- e) Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse d'un des deux virus le surlendemain ?
- f) Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse d'un des deux virus 5 jours plus tard ?
- g) Après combien de jours au minimum la probabilité que cette poule soit porteuse d'un des deux virus dépasse-t-elle 99% ?
- h) Sachant que le surlendemain cette poule est porteuse d'un des deux virus, quelle est la probabilité que ce soit le virus GAV2 ?

LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel et Fleurier

Nom et prénom :

Classe ou groupe :

EXAMEN DE MATURITÉ
Mathématiques niveau 1
Session 2006

