EXAMEN DE MATURITE 2006

Corrigé

Problème 1

a) A résoudre $2(x+1)y'=y$, $x\neq -1$.

On a $2(x+1)y'=y \Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{2(x+1)} \Rightarrow \int \frac{y'}{y}dx=\int\frac{1}{2(x+1)}dx$

$\Rightarrow \int \frac{y'}{y}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx \Rightarrow \ln(|y|)=\frac{1}{2}\ln(|x+1|)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

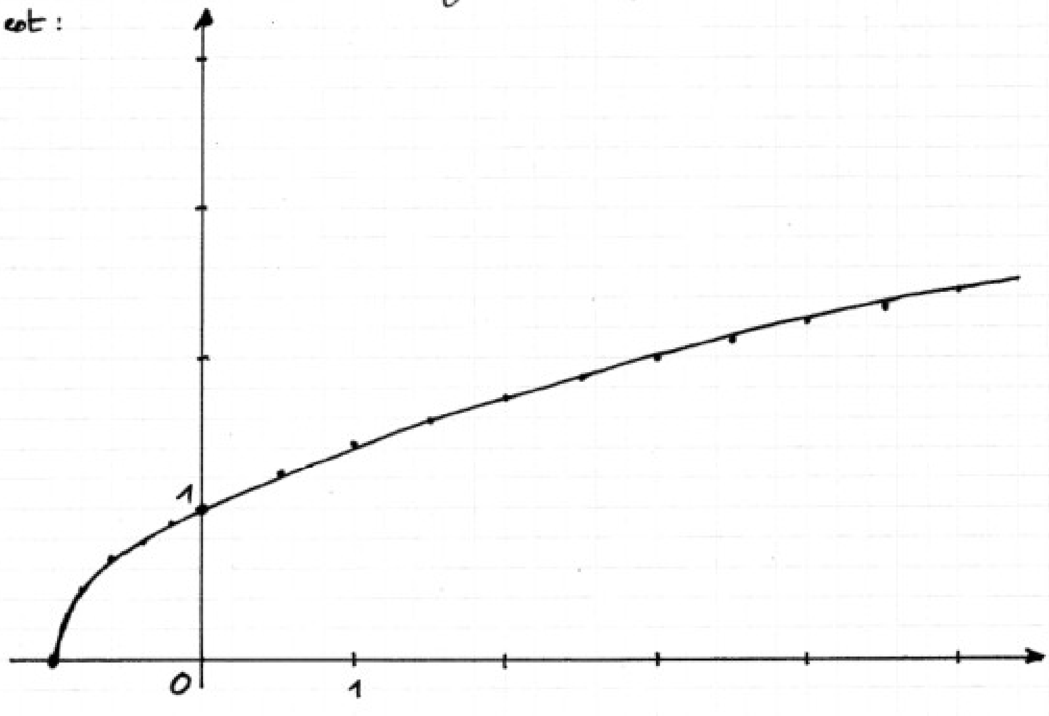
$\Rightarrow \ln(|y|)=\ln(\sqrt{|x+1|})+\ln(e^c) \Rightarrow \ln(|y|)=\ln(\sqrt{|x+1|}\cdot e^c)$

$\Rightarrow |y|=e^c\cdot\sqrt{|x+1|} \Rightarrow y=\pm e^c\cdot\sqrt{|x+1|}$.

En posant $k=\pm e^c$, la solution est $y=k\sqrt{|x+1|}$, $k\in\mathbb{R}$.

b) On a $f(x)=\sqrt{x+1}$. Son domaine de définition est $D=[-1;+\infty[$.

Son graphe est :



c) Soit $P(x;y)$ un point du graphe de f. On a $y=f(x)=\sqrt{x+1}$.

La distance de l'origine à P est donnée par la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$:

$$\|\overrightarrow{OP}\|=\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}x\\\sqrt{x+1}\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{x^2+(\sqrt{x+1})^2}=\sqrt{x^2+x+1}.$$

Il faut trouver x tel que $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ soit minimale.

On cherche le ou les x tels que $g'(x)=0$.

On a $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\,(2x+1)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

$g'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.

On fait maintenant le tableau de croissance de g :

x		$-\frac{1}{2}$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Ainsi, g est minimum en $x=-\frac{1}{2}$. En outre $g(-\frac{1}{2})=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+1}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1}=$
$=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Par conséquent, le point P du graphe de f dont la distance à l'origine est minimale est $P\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

d) On a $g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.
Domaine de définition : on doit avoir $x+1\geqslant 0$ et $x\geqslant 0$; en résumé, on doit avoir $x\geqslant 0$;
ainsi le domaine de définition de g est $\mathbb{R}_+=[0;+\infty[$.
Signe : on a $x<x+1 \Rightarrow \sqrt{x}<\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{x}>0 \Rightarrow g(x)>0$.

e) On a $g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$
$=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

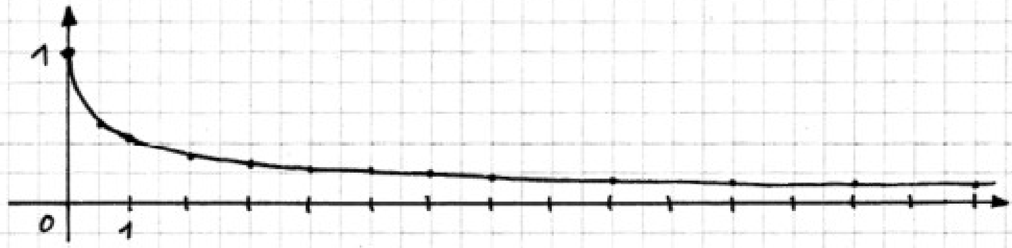
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$ (on ne cherche pas $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ puisque le domaine de définition de g est $\mathbb{R}_+=[0;+\infty[$).

f) Avec $g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, on a $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Son domaine est $\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$. On a $x<x+1 \Rightarrow \sqrt{x}<\sqrt{x+1} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}>\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0 \Rightarrow g'(x)<0$, $x\in\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$.

Ainsi, g est décroissante (strictement) sur $\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$.

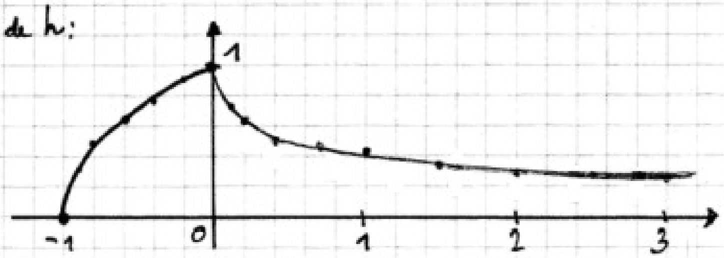
g) On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=$
$=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{0+}\right)=\dfrac{1}{2}(1-\infty)=-\infty$.

h) Graphe de g :

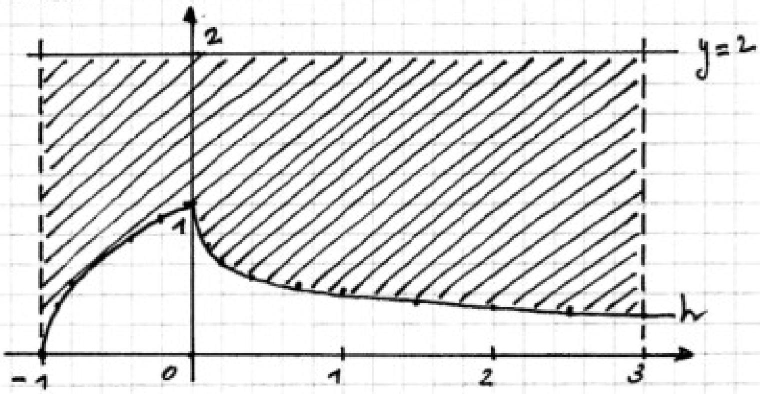


i) On a $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x < 0 \quad (\text{et } x \geqslant -1) \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Graphe de h :



j) Aire à calculer :



On a : $\text{aire} = \int_{-1}^{3} \left(2 - h(x)\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(2-h(x)\right) dx + \int_{0}^{3} \left(2-h(x)\right) dx =$

$= \int_{-1}^{0} \left(2 - \sqrt{x+1}\right) dx + \int_{0}^{3} \left(2 - \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\right) dx =$

$= \int_{-1}^{0} 2\,dx - \int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\,dx + \int_{0}^{3} 2\,dx - \int_{0}^{3} \sqrt{x+1}\,dx + \int_{0}^{3} \sqrt{x}\,dx =$

$= \int_{-1}^{3} 2\,dx - \int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\,dx + \int_{0}^{3} \sqrt{x}\,dx$

Une primitive de 2 est $2x$. Ainsi $\int_{-1}^{3} 2\,dx = 2x\Big|_{-1}^{3} = 2\cdot 3 - 2(-1) = 6+2 = 8.$

Une primitive de $\sqrt{x+1}$ est $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$. Ainsi $\int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} =$

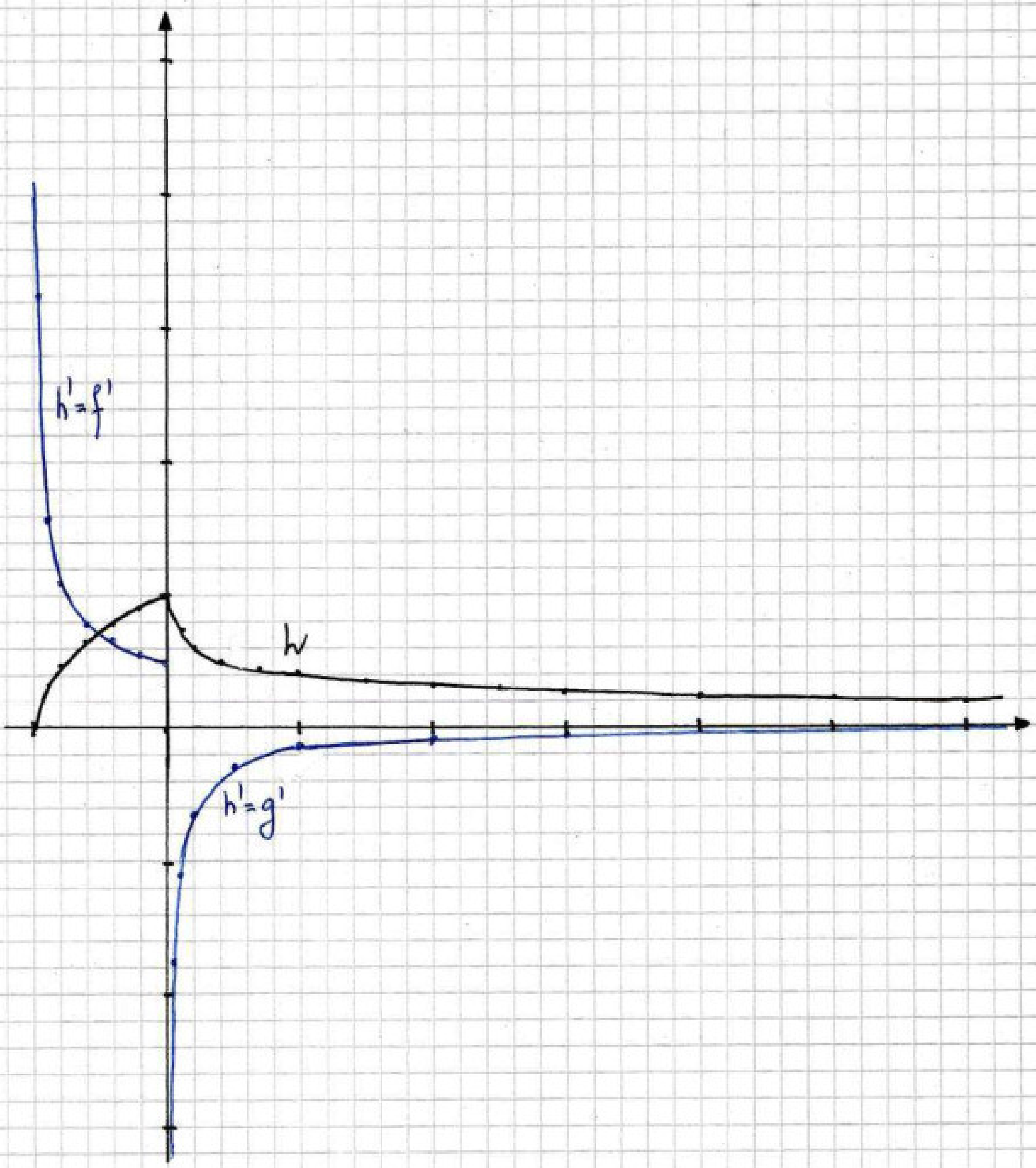
$= \frac{2}{3}\left((3+1)^{3/2} - (-1+1)^{3/2} \right) = \frac{2}{3}\, 4^{3/2} = \frac{2}{3}\left(4^{1/2}\right)^3 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot 2^3 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}.$

Une primitive de $\sqrt{x}$ est $\frac{2}{3}x^{3/2}$. Ainsi $\int_{0}^{3} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_{0}^{3} = \frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 0^{3/2}\right) =$

$= \frac{2}{3}\cdot\left(3^3\right)^{1/2} = \frac{2}{3}(27)^{1/2} = \frac{2}{3}\sqrt{27} = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$

Par conséquent, aire $= 8 - \frac{16}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{8}{3} + 2\sqrt{3} \simeq 6,131$.

h)



Sur $]0;1[$, on a $h'(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Sur $]0;+\infty[$, on a $h'(x) = g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (voir e)).

Problème 2

On a $M=\begin{pmatrix} a & -b & -a \\ -b & a & -a \\ a & a & b \end{pmatrix}$.

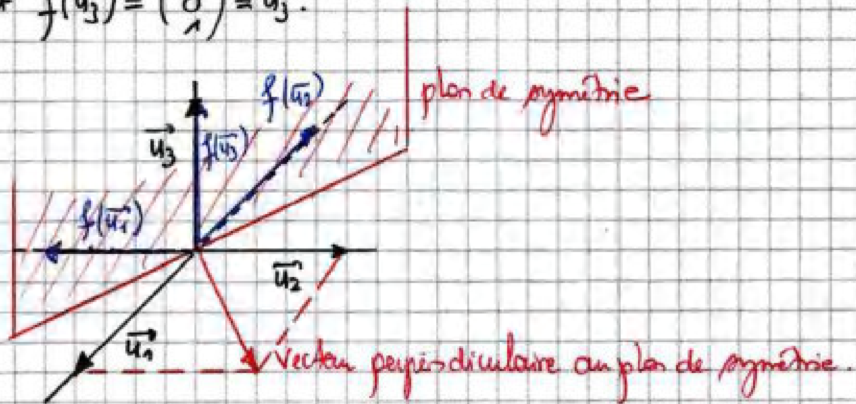
a) L'image de $\vec{t}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est $M\cdot\vec{t}=\begin{pmatrix} a & -b & -a \\ -b & a & -a \\ a & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\-b-a\\a-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\-(a+b)\\0\end{pmatrix}=$
$=(a+b)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=(a+b)\vec{t}$.

Par conséquent, $\vec{t}$ est un vecteur propre de M et la valeur propre correspondante est $\lambda_1=a+b$.

b) Avec $a=0$ et $b=1$, on a $M=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, si la base orthonormée standard dans laquelle est exprimée M est $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ et que f est l'application à laquelle M est associée, on a $f(\vec{u_1})=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=-\vec{u_2}$, $f(\vec{u_2})=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=-\vec{u_1}$ et $f(\vec{u_3})=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{u_3}$.

On a donc :



Ainsi, un vecteur perpendiculaire au plan de symétrie est $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

c) Avec $a=\frac{2}{3}$ et $b=\frac{1}{3}$, on a $M=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, M est une matrice orthogonale. En effet :

$\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}=-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=0$, $\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}=-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=0$,

$\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}=\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=0$, $\left\|\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=$
$=\sqrt{\frac{9}{9}}=\sqrt{1}=1$ et, similairement, $\left\|\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}\right\|=1$.

En outre, d'après a), $\vec{t}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre correspondante $\lambda_1=a+b=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$.

Ainsi, comme $\lambda_1=1$, $\vec{t}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est bien un vecteur directeur de l'axe de rotation.

Pour déterminer l'angle de rotation, on va chercher l'angle entre un vecteur $\vec{v}$ perpendiculaire à l'axe de rotation et son image $\vec{v}'$ par la rotation.

Comme un vecteur directeur de l'axe de rotation est $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on peut prendre $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on a bien $\vec{v} \perp \vec{t}$ puisque $\vec{v} \cdot \vec{t} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 0$).

On a $\vec{v}' = M\vec{v} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

L'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ est donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}'\|}$.

On a $\vec{v} \cdot \vec{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ et

$\|\vec{v}'\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}$.

Ainsi, $\cos(\alpha) = \dfrac{2/3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2/3}{2} = \dfrac{1}{3}$, d'où $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70{,}53^\circ$.

L'angle de rotation est donc de $70{,}53^\circ$.

On a maintenant $a = 1$ et $b = 2$, d'où $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

d) Les valeurs propres de M sont les λ solutions de $\det(M - \lambda I) = 0$.
On sait que $\det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$.
Ainsi, les valeurs propres de M sont les λ solutions de $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0$.
On a $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$.
Ainsi, les solutions de $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0$ sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.
Les valeurs propres de M sont donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.

Par conséquent, dans une base de vecteurs propres de M, cette dernière peut s'écrire $M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ce qui montre que M est diagonalisable.

e) Les vecteurs dont l'image par la transformation de matrice M est nulle sont les $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ tels que $M\vec{v} = \vec{0}$.

$M\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 - v_3 \\ -2v_1 + v_2 - v_3 \\ v_1 + v_2 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 & ① \\ -2v_1 + v_2 - v_3 = 0 & ② \\ v_1 + v_2 + 2v_3 = 0 & ③ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} & v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ ① - ② & 3v_1 - 3v_2 = 0 \\ & v_1 + v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 = v_2 \\ v_1 + v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 - v_3 = 0 \\ v_1 = v_2 \\ 2v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = -v_1 \\ v_2 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les vecteurs dont l'image par M est nulle sont les vecteurs parallèles à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

f) De manière générale, l'image $(x';y';z')$ d'un point $(x;y;z)$ par l'affinité de matrice M qui laisse fixe le point $A(1;1;1)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'image de l'origine est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$= -M\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1-2-1 \\ -2+1-1 \\ 1+1+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'image de l'origine est le point $(3;3;-3)$.

g) Cherchons l'équation cartésienne du plan π.

Un vecteur orthogonal à π est $\vec{s} \wedge \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - (-1)\cdot(-1) \\ -1\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'équation cartésienne de π s'écrit $x+y+2z+d=0$.

Avec le point $A(1;1;1)$, par substitution, on obtient $1+1+2+d=0 \Rightarrow d=-4$.

L'équation de π est donc $x+y+2z-4=0$.

L'image d'un point $(x;y;z)$ par l'affinité est donné par (voir f))

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x-1-2(y-1)-(z-1) \\ -2(x-1)+y-1-(z-1) \\ x-1+y-1+2(z-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1-2y+2-z+1 \;+1 \\ -2x+2+y-1-z+1 \;+1 \\ x-1+y-1+2z-2 \;+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x-2y-z+3 \\ -2x+y-z+3 \\ x+y-2z-3 \end{pmatrix}. \text{ On a ainsi } \begin{cases} x' = x-2y-z+3 & (1) \\ y' = -2x+y-z+3 & (2) \\ z' = x+y-2z-3 & (3) \end{cases}.$$

On a : $(1)-(2) \Rightarrow x'-y' = 3x-3y$ et $2(1)-(3) \Rightarrow 2x'-z' = x-5y+9$.

On obtient ainsi $\begin{cases} x'-y' = 3x-3y & (4) \\ 2x'-z' = x-5y+9 & (5). \end{cases}$

$5(4)-3(5) \Rightarrow -x'-5y'+3z' = 12x-27 \Rightarrow 12x = -x'-5y'+3z'-27$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4}.$$

Avec $x = -\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4}$ dans 4, on obtient

$$x' - y' = 3\left(-\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4}\right) - 3y$$

$$\Rightarrow 3y = 3\left(-\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4}\right) - x' + y'$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4} - \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y'$$

$$\Rightarrow y = -\frac{5}{12}x' - \frac{1}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4}$$

Avec $x = -\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4}$ et $y' = -\frac{5}{12}x' - \frac{1}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4}$ dans 1, on obtient $x' = -\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4} - 2\left(-\frac{5}{12}x' - \frac{1}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4}\right) - z + 3$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4} - 2\left(-\frac{5}{12}x' - \frac{1}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4}\right) + 3 - x'$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4} + \frac{10}{12}x' + \frac{2}{12}y' + \frac{2}{4}z' + \frac{18}{4} + \frac{12}{4} - \frac{12}{12}x'$$

$$\Rightarrow z = -\frac{3}{12}x' - \frac{3}{12}y' + \frac{3}{4}z' + \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{4}x' - \frac{1}{4}y' + \frac{3}{4}z' + \frac{21}{4}$$

On obtient donc : $\begin{cases} x = -\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4} \\ y = -\frac{5}{12}x' - \frac{1}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4} \\ z = -\frac{1}{4}x' - \frac{1}{4}y' + \frac{3}{4}z' + \frac{21}{4} \end{cases}$

Par substitution dans le plan Π : $x + y + 2z - 4 = 0$, on obtient

$$-\frac{1}{12}x' - \frac{5}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4} - \frac{5}{12}x' - \frac{1}{12}y' + \frac{1}{4}z' - \frac{9}{4} - \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{3}{2}z' + \frac{21}{2} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow -x' - y' + 2z' + 2 = 0 \quad \Rightarrow x' + y' - 2z' - 2 = 0.$$

L'image du plan Π par l'affinité est donc le plan $x + y - 2z - 2 = 0$.

Problème 3

a) A résoudre $z^3 = 1$.

On a: $1 = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$ avec $r = 1$ et $\varphi = 0$ rad.

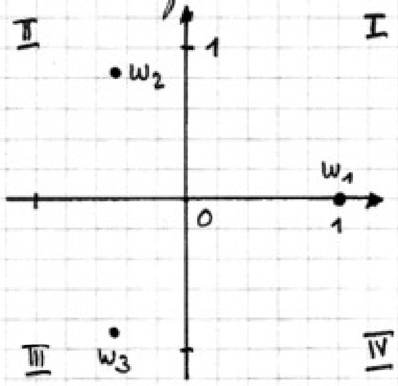
Ainsi, les racines cubiques de 1 sont: $w_1 = \sqrt[3]{r}\,\mathrm{cis}(\varphi)$,

$w_2 = \sqrt[3]{r}\,\mathrm{cis}\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$ et

$w_3 = \sqrt[3]{r}\,\mathrm{cis}\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)$.

On a, avec $r = 1$ et $\varphi = 0$, $w_1 = \mathrm{cis}(0) = 1$, $w_2 = \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$
$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $w_3 = \mathrm{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

On peut les représenter dans le plan de Gauss:



On note les 3 solutions z_0, z_1, z_2 avec z_1 dans le quadrant II.

Les solutions de $z^3 = 1$ sont donc $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) A calculer: $(1 - z_1 + z_1^2)(1 - z_1^2 + z_1^4)$.

On a: $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 =$
$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (= z_2)$
$\Rightarrow z_1^4 = (z_1^2)^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 =$
$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (= z_1)$.

Ainsi, $1 - z_1 + z_1^2 = 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i =$
$= 1 - \sqrt{3}i$, $1 - z_1^2 + z_1^4 = 1 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i =$
$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 + \sqrt{3}i$.

On obtient: $(1 - z_1 + z_1^2)(1 - z_1^2 + z_1^4) = (1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) = 1^2 - (\sqrt{3}i)^2 =$
$= 1 - 3i^2 = 1 + 3 = 4$.

c) On a $f(z) = \frac{z+1}{z}$, avec $z \neq 0$.

Les points fixes de f sont les z tels que $f(z) = z$.

$f(z) = z \Rightarrow \dfrac{z+1}{\bar{z}} = z \Rightarrow z+1 = z\bar{z}$.

Posons $z = x+iy$. On a alors $\bar{z} = x-iy$ et $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 =$
$= x^2 - i^2y^2 = x^2+y^2$.

Ainsi, $z+1 = z\bar{z} \Rightarrow x+iy+1 = x^2+y^2 \Rightarrow x+1+iy = x^2+y^2$.

Comme $x^2+y^2 \in \mathbb{R}$, on doit avoir $x+1 = x^2+y^2$ et $y=0$.

Avec $y=0$, $x+1 = x^2+y^2$ devient $x+1 = x^2 \Rightarrow x^2-x-1=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$.

On a $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4.1.(-1) = 1+4 = 5$. Les solutions de $x^2-x-1=0$ sont donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On en conclut que les points fixes de f sont $z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $z = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (puisque $y=0$).

d) Avec $z = x+iy$, on a $f(z) = \dfrac{z+1}{\bar{z}} = \dfrac{x+iy+1}{x-iy} = \dfrac{(x+1+iy)(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)} =$

$= \dfrac{x^2+xyi+x+yi+xyi+i^2y^2}{x^2-i^2y^2} = \dfrac{x^2+x-y^2+(2xy+y)i}{x^2+y^2} =$

$= \dfrac{x^2+x-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{2xy+y}{x^2+y^2}\, i$.

En notant $f(z) = u+iv$, on a $u = \dfrac{x^2+x-y^2}{x^2+y^2}$ et $v = \dfrac{2xy+y}{x^2+y^2}$.

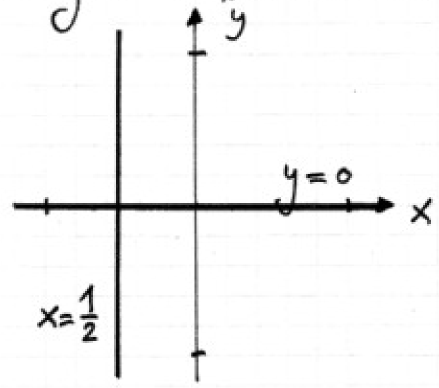
e) On cherche les z tels que $f(z)$ est sur l'axe réel.

Avec $f(z) = u+iv$, on cherche donc les $z = x+iy$ tels que $v=0$.

Avec $v = \dfrac{2xy+y}{x^2+y^2}$, $v=0 \Rightarrow 2xy+y=0 \Rightarrow y(2x+1)=0$

$\Rightarrow$ soit $y=0$, soit $2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, dans le plan de Gauss, les $z = x+iy$ tels que $f(z)$ est sur l'axe réels sont les z sur la droite $y=0$ ou sur la droite $x = -\frac{1}{2}$:



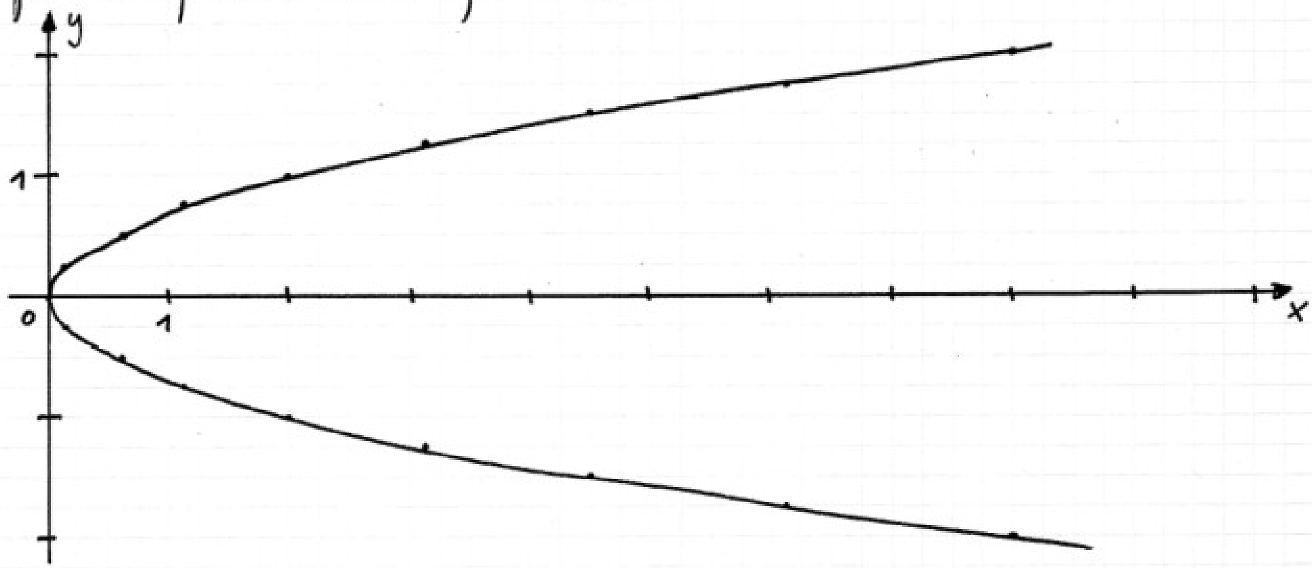
f) On cherche les $z = x+iy$ tels que $f(z) = u+iv$ avec $u=1$.

Avec $u = \frac{x^2+x-y^2}{x^2+y^2}$, on a $u = 1 \Rightarrow \frac{x^2+x-y^2}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+x-y^2 = x^2+y^2$

$\Rightarrow x - y^2 = y^2 \Rightarrow x = 2y^2$.

Les nombres z cherchés sont donc de la forme $z = 2y^2 + yi$.

On peut les représentés dans le plan de Gauss:



g) Si z appartient au cercle trigonométrique, alors $z = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ (le rayon du cercle trigonométrique est 1). Avec $z = x+iy$, on a alors $x = \cos(\varphi)$ et $y = \sin(\varphi)$.

On a $u = \frac{x^2+x-y^2}{x^2+y^2}$ (voir d)).

Avec $x = \cos(\varphi)$ et $y = \sin(\varphi)$, on a $x^2+y^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$.

Ainsi $u = \frac{\cos^2(\varphi) + \cos(\varphi) - \sin^2(\varphi)}{1} = \cos^2(\varphi) + \cos(\varphi) - \sin^2(\varphi)$.

Comme $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$, on obtient $u = \cos^2(\varphi) + \cos(\varphi) - (1 - \cos^2(\varphi)) =$

$= \cos^2(\varphi) + \cos(\varphi) - 1 + \cos^2(\varphi) = 2\cos^2(\varphi) + \cos(\varphi) - 1$.

Comme $-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$ ($\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$), on doit trouver l'ensemble des images de la fonction $g(x) = 2x^2 + x - 1$ avec $-1 \leq x \leq 1$.

La fonction g est une parabole ouverte vers le haut. Son sommet est donné par $(x_S ; g(x_S))$. On a $x_S = -\frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$. Avec $x_S = -\frac{1}{4}$, on a $g(x_S) =$

$= 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{9}{8}$.

Le sommet de g est donc $\left(-\frac{1}{4} ; -\frac{9}{8}\right)$. Cela signifie que la valeur minimale de g sur l'intervalle $[-1;1]$ est $-\frac{9}{8}$.

On a $g(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$ et $g(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 2$.

La valeur maximale de g sur l'intervalle $[-1;1]$ est 2.

On en conclut que l'intervalle cherché est $\left[-\frac{9}{8} ; 2\right]$.

Problème 4

a) La partie est nulle si ni A ni B n'ont tiré de boule noire.
La probabilité que A ne tire pas sa boule noire est $\frac{3}{4}$.
La probabilité que B ne tire pas sa boule noire sur les 2 tirages est $\left(\frac{5}{6}\right)^2$.
Ainsi, la probabilité que la partie soit nulle est $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{48} \cong 0{,}5208 = 52{,}08\%$.

b) B gagne s'il obtient strictement plus de boules noires que A.
On a alors les possibilités suivantes:
- A tire 1 noire et B tire 2 noires
- A ne tire pas 1 noire et B tire 1 noire à 1 de ses 2 essais
- A ne tire pas 1 noire et B tire 2 noires.

Ainsi, la probabilité que B tire strictement plus de boules noires que A est
$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{144} + \frac{15}{144} + \frac{15}{144} + \frac{3}{144} = \frac{34}{144} =$
$= \frac{17}{72} \cong 0{,}2361 = 23{,}61\%$.

c) $P(A \text{ gagne}) = 1 - P(B \text{ gagne}) - P(\text{match nul}) = 1 - \frac{25}{48} - \frac{17}{72} = \frac{35}{144} \cong 0{,}2431 = 24{,}31\%$.

d) C'est une probabilité conditionnelle: $P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$.
Ici: $X =$ A a gagné, $Y =$ la partie n'était pas nulle, $X \cap Y =$ A a gagné et la partie n'était pas nulle $=$ A a gagné.
On a $p(X\cap Y) = p(A \text{ gagne}) = \frac{35}{144}$ (voir c)) et $p(Y) = p(\text{la partie n'était pas nulle}) = 1 - p(\text{la partie était nulle}) = 1 - \frac{25}{48} = \frac{23}{48}$ (voir a)).
Ainsi $P(X|Y) = \frac{35/144}{23/48} = \frac{35}{69} \cong 0{,}5072 = 50{,}72\%$.

e) On utilise la loi binomiale: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où X décompte le nombre de parties gagnées par A, k est le nb de parties gagnées par A ($k=2$), n est le nombre de parties jouées ($n=10$) et p est la probabilité que A gagne sur une partie ($p = \frac{35}{144}$ selon c)).
Ainsi, $P(X=2) = \binom{10}{2}\left(\frac{35}{144}\right)^2\left(1-\frac{35}{144}\right)^{10-2} \cong 0{,}1865 = 18{,}65\%$.

f) p(A a gagné les 2 premières parties, B a gagné 2 parties et les 6 autres ont été déclarées nulles) $=$ p(A a gagné les 2 premières parties) $\cdot$ p(B a gagné 2 parties et les 6 autres ont été declarées nulles). On a:
p(A a gagné les 2 premières parties) $= \frac{35}{144}\cdot\frac{35}{144} = \left(\frac{35}{144}\right)^2$;
il y a $\binom{8}{2}$ possibilités pour que B ait gagné 2 parties et que les 6 autres soient nulles;

ainsi p(B a gagné 2 parties et les 6 autres ont été nulles) $= \binom{8}{2} \cdot \left(\frac{17}{72}\right)^2 \cdot \left(\frac{25}{48}\right)^6$.

Ainsi, la probabilité cherchée est $\left(\frac{35}{144}\right)^2 \cdot \binom{8}{2} \cdot \left(\frac{17}{72}\right)^2 \cdot \left(\frac{25}{48}\right)^6 \cong 0{,}0018 = 0{,}18\%$.

g) Si on tient compte de l'ordre, p(A a gagné 2 parties, B a gagné 2 parties et les 6 autres parties sont nulles) $= \left(\frac{35}{144}\right)^2 \cdot \left(\frac{17}{72}\right)^2 \cdot \left(\frac{25}{48}\right)^6$.
Comme on ne tient pas compte de l'ordre, il faut multiplier ce résultat par le nb de possibilités correspondant à A a gagné 2 parties, B a gagné 2 parties et 6 autres parties sont nulles. Il s'agit d'une permutation avec répétitions (voir Formulaires et Tables p. 9). Le nombre de cas est donc $\frac{10!}{2!\,2!\,6!} = 1260$.

Ainsi, la probabilité cherchée est $1260 \cdot \left(\frac{35}{144}\right)^2 \cdot \left(\frac{17}{72}\right)^2 \cdot \left(\frac{25}{48}\right)^6 \cong 0{,}0828 = 8{,}28\%$.

h) p(A gagne au moins 1 fois sur n parties) $= 1 - p$(A gagne 0 fois sur n parties) $=$
$= 1 - \left(1 - \frac{35}{144}\right)^n = 1 - \left(\frac{109}{144}\right)^n$.
p(A gagne au moins 1 fois sur n parties) $> 99{,}9\% = 0{,}999 \Rightarrow 1 - \left(\frac{109}{144}\right)^n > 0{,}999$
$\Rightarrow \left(\frac{109}{144}\right)^n < 0{,}001$.

Comme la fonction log est strictement croissante ($x<y \Rightarrow \ln(x)<\ln(y)$), on obtient $\log\left(\left(\frac{109}{144}\right)^n\right) < \log(0{,}001)$.

Avec la propriété du log : $\log(x^n) = n\log(x)$, on trouve $n \log\left(\frac{109}{144}\right) < \log(0{,}001)$.

Comme $\log\left(\frac{109}{144}\right) < 0$, on obtient $n > \frac{\log(0{,}001)}{\log(109/144)} \cong 24{,}8$.

Il faudra donc jouer au minimum 25 parties.