Problème 1 (poids 3)

a) Résoudre l'équation différentielle $2(x+1)\,y' = y$.

On appelle f la solution particulière de l'équation différentielle précédente donnée par $f(x) = \sqrt{x+1}$.

b) Tracer le graphe de la fonction f.

c) Par calcul, déterminer en quel point P du graphe la distance entre l'origine et P est minimale.

On appelle g la fonction donnée par $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

d) Donner le domaine de définition et le signe de la fonction g.

e) Montrer que $g(x)$ peut s'écrire sous la forme $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.
En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

f) A l'aide du signe de la dérivée, analyser la croissance de la fonction g.

g) Que devient la dérivée $g'(x)$ lorsque x tend vers zéro ?

h) Tracer le graphe de la fonction g.

On appelle h la fonction définie par $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si} \quad x<0 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

i) Dans un repère où l'unité est 5 carreaux, représenter soigneusement le morceau du graphe de h pour lequel x est compris entre -1 et 3.

j) Sur le dessin précédent, hachurer le domaine délimité par le graphe, l'horizontale d'équation $y = 2$ et les verticales d'équations $x = -1$ et $x = 3$.
Calculer l'aire de ce domaine.

k) Déduire du graphe de h celui de sa dérivée h'. On esquissera en couleur le graphe de h' dans le même repère que celui de h.

Problème 2 (poids 3)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé standard, une transformation linéaire est donnée par sa matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & -a \\ -b & a & -a \\ a & a & b \end{pmatrix}, \quad a \text{ et } b \text{ étant deux nombres donnés}.$$

a) Calculer l'image du vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire qu'il s'agit d'un vecteur propre.

Donner la valeur propre correspondante.

b) Si $a = 0$ et $b = 1$, M est la matrice d'une symétrie planaire. Par observation géométrique, donner un vecteur perpendiculaire au plan de symétrie.

c) Si $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$, expliquer pourquoi M est la matrice d'une rotation autour d'un axe.

Vérifier que $\vec{t}$ est un vecteur directeur de l'axe, puis déterminer l'angle de rotation.

Pour la fin du problème, on choisit $a = 1$ et $b = 2$ si bien que $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) En admettant que $\text{Dét}(M - \lambda \mathrm{I}) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$, I désignant la matrice de l'identité, déterminer les valeurs propres de M. En déduire, sans nouveaux calculs, que la matrice est diagonalisable.

e) Quels sont les vecteurs dont l'image par la transformation de matrice M est nulle ?

Dans l'espace, on considère l'affinité de matrice M qui laisse fixe le point $A(1;1;1)$.

f) Quelle est l'image de l'origine par cette affinité ?

g) On appelle π le plan contenant le point A et les vecteurs $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Quelle est l'image de ce plan par l'affinité ?

Problème 3 **(poids 2)**

a) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, résoudre l'équation $z^3 = 1$.

Les solutions de l'équation précédente sont appelées z_0, z_1 et z_2. La solution z_1 est située dans le deuxième quadrant du plan de Gauss.

b) Calculer le nombre $(1 - z_1 + z_1^2)(1 - z_1^2 + z_1^4)$.

On appelle f la fonction complexe donnée par $f(z) = \dfrac{z+1}{\overline{z}}$, avec $z \neq 0$.

c) Calculer les points fixes de la fonction f.

d) Avec $z = x + \mathrm{i}\,y$ calculer $f(z)$ et l'écrire sous la forme $f(z) = u + \mathrm{i}\,v$.
Donner les expressions de u et v en fonction de x et y.

e) Où sont dans le plan de Gauss, les nombres z dont l'image est sur l'axe réel ?
Représenter graphiquement ces nombres.

f) Où sont dans le plan de Gauss, les nombres z dont l'image est sur la verticale d'équation $u = 1$? Représenter graphiquement ces nombres.

g) Lorsque le nombre complexe z parcourt le cercle trigonométrique, la partie réelle u de son image varie dans un intervalle. Déterminer cet intervalle.

Problème 4 (poids 2)

Pour jouer, deux amis A et B utilisent chacun une urne. Après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, puis l'urne est secouée pour mélanger les boules.

L'urne de A contient 4 boules : 1 noire et 3 blanches.
L'urne de B contient 6 boules : 1 noire et 5 blanches.

Pour jouer, A tire d'abord **une** boule de son urne, puis B tire successivement (avec remise) **deux** boules de son urne.

Si aucune boule noire n'a été tirée, la partie est déclarée nulle et il n'y a pas de gagnant. Dans les autres cas, il y a un gagnant. Ce gagnant est B s'il a obtenu strictement plus de boules noires que A.

a) Quelle est la probabilité qu'une partie soit déclarée nulle ?

b) Quelle est la probabilité que B gagne une partie ?

c) Vérifier que la probabilité que A gagne une partie vaut $\frac{35}{144}$.

d) Sachant qu'une partie n'était pas nulle, quelle est la probabilité que A ait gagné ?

e) A et B ont fait 10 parties. Quelle est la probabilité que A ait gagné exactement 2 fois ?

f) A et B ont fait 10 parties. Quelle est la probabilité que le bilan du jeu soit : « A a gagné les 2 premières parties, B a gagné les 2 suivantes et les 6 dernières ont été déclarées nulles » ?

g) A et B ont fait 10 parties. Quelle est la probabilité que le bilan du jeu soit : « A a gagné 2 parties, B a gagné 2 parties et les 6 autres parties ont été déclarées nulles » ?

h) Combien de parties faut-il jouer au minimum pour que la probabilité que A gagne au moins une fois soit supérieure à 99.9 % ?