EXAMEN DE MATURITE 2007

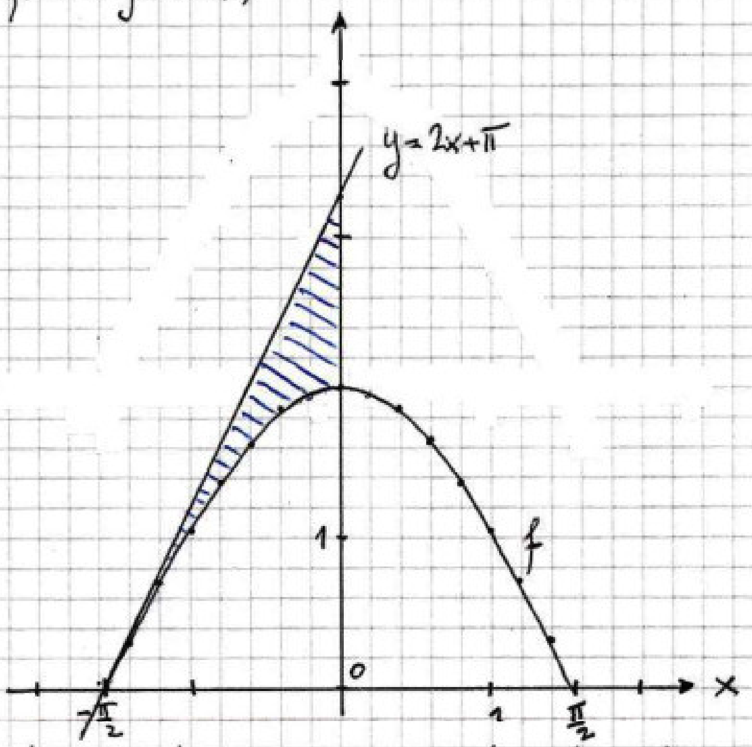
Corrigé

Problème 1

Première partie

On a $f: x \mapsto y = 2\cos(x)$

a)



b) L'équation de la tangente au point $T(x_0; y_0)$ est la droite d'équation $y = mx+h$ où $m = f'(x_0)$ et $h = f(x_0) - mx_0$.

Ici, on a $m=2$, d'où $f'(x_0) = 2$.

On a $f'(x) = -2\sin(x)$.

Ainsi, $f'(x_0) = 2 \Rightarrow -2\sin(x_0) = 2 \Rightarrow \sin(x_0) = -1$.

Comme $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x_0) = -1 \Rightarrow x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Avec $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, on a $f(x_0) = 0$ et $h = f(x_0) - mx_0 = 0 - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

On a ainsi $T\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

c) D'après b), on a $y = mx+h$ avec $m=2$ et $h=\pi$.

Ainsi, l'équation de la tangente en T est $y = 2x+\pi$.

d) Voir ci-dessus.

e) La surface est hachurée en bleu ci-dessus.

Son aire vaut $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(2x+\pi - f(x)\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(2x+\pi - 2\cos(x)\right) dx = x^2 + \pi x - 2\sin(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} =$

$= 0^2 + \pi \cdot 0 - 2\sin(0) - \left(\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) =$

$= 0 + 0 - 0 - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{2} + 2(-1) = \frac{\pi^2}{4} - 2.$

L'aire de la surface hachurée vaut donc $\frac{\pi^2}{4} - 2 \cong 0,4674$.

Deuxième partie

On a $f : x \to y = \dfrac{-ax^2 - ax + a}{x+a}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Intersections avec l'axe x: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{-ax^2 - ax + a}{x+a} = 0 \Rightarrow -ax^2 - ax + a = 0$

$\Rightarrow -a(x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$ (puisque $a \neq 0$),

ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) =$ $= 1 + 4 = 5$; les solutions sont $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 =$ $= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$; les intersections de f avec l'axe x sont donc $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cong (0,62; 0)$ et $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cong (-1,62; 0)$.

Intersection avec l'axe y: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow$ l'intersection de f avec l'axe y est donc $(0; 1)$

b) Les points à tangente horizontale de f sont les $(x; y)$ tels que $f'(x) = 0$.

On a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = -ax^2 - ax + a$ et $v = x + a$. Comme $u' = -2ax - a$ et $v' = 1$,

on a $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{(-2ax - a)(x+a) - (-ax^2 - ax + a) \cdot 1}{(x+a)^2} =$

$= \dfrac{-2ax^2 - 2a^2x - \cancel{ax} - a^2 + ax^2 + \cancel{ax} - a}{(x+a)^2} = \dfrac{-ax^2 - 2a^2x - a^2 - a}{(x+a)^2}.$

Ainsi, $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-ax^2 - 2a^2x - a^2 - a}{(x+a)^2} = 0 \Rightarrow -ax^2 - 2a^2x - a^2 - a = 0.$

Comme on veut que le point à tangente horizontale soit sur l'axe des ordonnées, on a $x = 0$.

Ainsi, avec $x = 0$, $-ax^2 - 2a^2x - a^2 - a = 0 \Rightarrow -a^2 - a = 0 \Rightarrow -a(a+1) = 0$

$\Rightarrow a + 1 = 0$ (puisque $a \neq 0$) $\Rightarrow a = -1$.

Par conséquent, avec $a = -1$, f a un point à tangente horizontale sur l'axe des ordonnées.

c) On a $(a = 2)$, $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 2}{x+2}$.

Domaine de définition: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Parité: $f(-x) = \dfrac{-2(-x)^2 - 2(-x) + 2}{-x+2} = \dfrac{-2x^2 + 2x + 2}{-x+2} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire, ni impaire.

Intersections avec les axes: d'après a), les intersections sont $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};0\right) \cong (0{,}62;0)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};0\right) \cong (-1{,}62;0)$ et $(0;1)$.

Tableau de signes:

x		-2		$-1{,}62$		0	
$f(x)$	$+$	////	$-$	0	$+$	0	$-$

Asymptotes verticales: comme $-2 \notin D_f$, $x=-2$ est asymptote verticale et, d'après le tableau de signes, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = -\infty$.

Asymptotes non verticales: comme f est une fonction rationnelle ($=\frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}$), on effectue la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} -2x^2-2x+2 & x+2 \\ \cline{2-2} -(-2x^2-4x) & -2x+2 \\ \cline{1-1} 2x+2 & \\ -(2x+4) & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

ainsi, on peut écrire $f(x) = -2x+2+\frac{-2}{x+2}$;
par conséquent, $y=-2x+2$ est une asymptote oblique de f;
comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{x+2} = 0_+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x+2} = 0_-$, f s'approche de $y=-2x+2$ par au-dessus lorsque $x\to-\infty$ et par au-dessous lorsque $x\to+\infty$.

Dérivée: D'après b), on a $f'(x) = \frac{-ax^2-2a^2x-a^2-a}{(x+a)^2}$; avec $a=2$, on obtient $f'(x) = \frac{-2x^2-8x-6}{(x+2)^2}$. On a $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

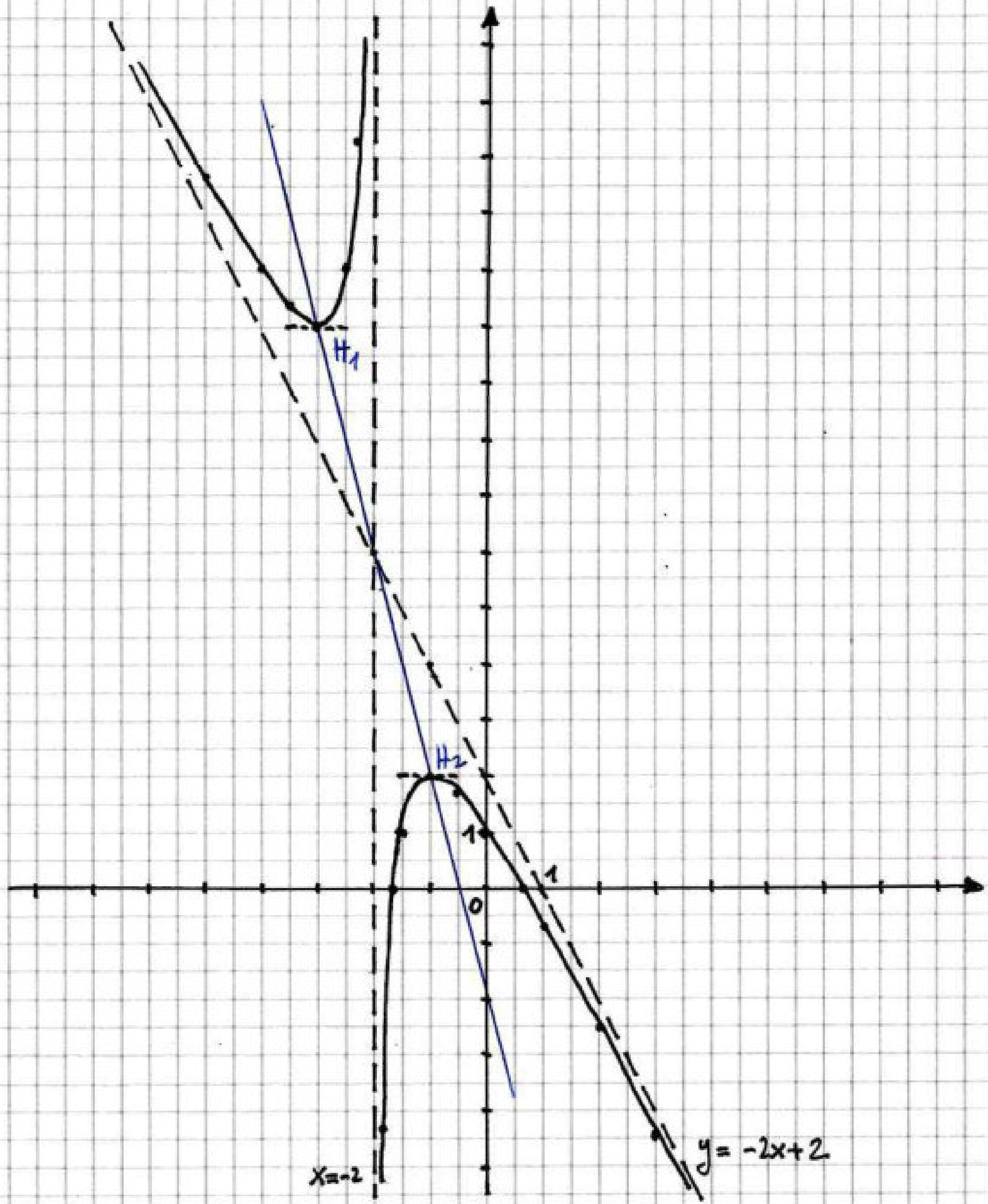
Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x^2-8x-6}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2-8x-6=0$
$\Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow (x+1)(x+3)=0 \Rightarrow x=-1$ ou $x=-3$;
avec $x=-1$, on a $f(x) = \frac{-2\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+2}{-1+2} = \frac{-2+2+2}{1} = 2$;
avec $x=-3$, on a $f(x) = \frac{-2\cdot(-3)^2-2\cdot(-3)+2}{-3+2} = \frac{-18+6+2}{-1} = 10$;
ainsi, les points à tangente horizontale sont $(-3;10)$ et $(-1;2)$.

Tableau de croissance:

x		-3		-2		-1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	////	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	////	$\nearrow$	max	$\searrow$

Ainsi $(-3;10)$ est un minimum et $(-1;2)$ est un maximum.

Graphe:



d) On a $H_1(-3;10)$ et $H_2(-1;2)$ (voir en bleu ci-dessus).
La pente de la droite passant par H_1 et H_2 est $\frac{2-10}{-1-(-3)} = \frac{-8}{2} = -4$.
La pente de l'asymptote oblique est -2.
D'après Formulaires et Tables p. 51, l'angle aigu entre 2 droites de pentes m_1 et m_2 est donné par $\tan(\varphi) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}\right|$.
Ici, $m_1 = -4$ et $m_2 = -2$.
On a donc $\tan(\varphi) = \left|\frac{-2-(-4)}{1+(-4)\cdot(-2)}\right| = \left|\frac{2}{9}\right| = \frac{2}{9} \Longrightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) \cong 12,53°$.
L'angle cherché est donc $\approx 12,53°$.

e) D'après c), on a $f(x) = -2x + 2 + \frac{-2}{x+2}$.
Une primitive de f est alors $F(x) = -x^2 + 2x - 2\ln(|x+2|) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Problème 2

On a $A(8;1;2)$, $B(4;9;10)$, $C(0;11;6)$ et $D(4;3;-2)$.

a) ABCD sera un rectangle si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (2 côtés isométriques et parallèles) et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (2 côtés perpendiculaires).

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

De plus, comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (-4)\cdot(-4) + 8 \cdot 2 + 8 \cdot (-4) = 16 + 16 - 32 = 0.$$

Ainsi, ABCD est bien un rectangle.

b) Voir pour construction sur le dessin ci-joint.

c) Voir ci-joint (en bleu).

d) Un vecteur normal au plan Π contenant le rectangle sera un vecteur parallèle à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\cdot(-4) - 8\cdot 2 \\ 8\cdot(-4) - (-4)\cdot(-4) \\ -4\cdot 2 - 8\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32-16 \\ -32-16 \\ -8+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 24 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à Π.

L'équation de Π s'écrit donc $2x + 2y - z + d = 0$.

Avec $A(8;1;2)$, on a, par substitution, $2\cdot 8 + 2\cdot 1 - 2 + d = 0 \Rightarrow 16 + d = 0 \Rightarrow d = -16$.

L'équation de Π est donc $2x + 2y - z - 16 = 0$.

e) On dessine les traces de Π grâce à ses intersections avec les axes :

avec l'axe x : $y = z = 0 \Rightarrow 2x - 16 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow I_x(8;0;0)$;

avec l'axe y : $x = z = 0 \Rightarrow 2y - 16 = 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow I_y(0;8;0)$;

avec l'axe z : $x = y = 0 \Rightarrow -z - 16 = 0 \Rightarrow z = -16 \Rightarrow I_z(0;0;-16)$.

Voir la construction ci-jointe (en rouge).

f) L'angle aigu entre Π et le sol est l'angle aigu entre $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$, vecteurs perpendiculaires respectivement à Π et au sol.

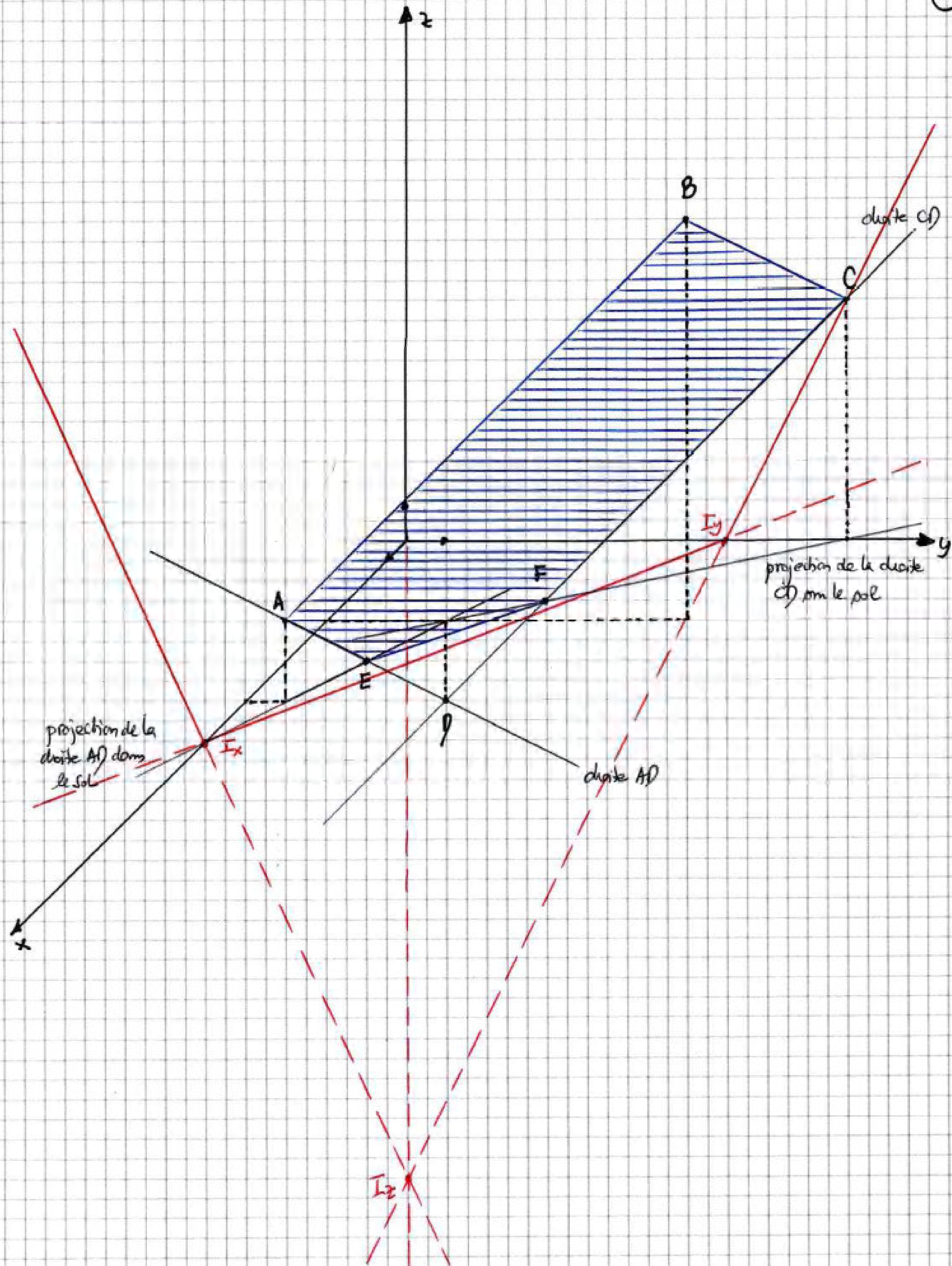
D'après d), on a $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. En outre $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'angle aigu α entre Π et le sol est donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_2}\|} =$

$$= \frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \cong 70{,}53°.$$

g) Le volume de la pyramide de base ABCD et de sommet O est donné par

$V = \frac{1}{3}$ aire de base $\cdot$ hauteur.



z
B
droite CD
C
y
I_y
projection de la droite CD sur le sol
F
A
E
D
projection de la droite AD dans le sol
I_x
droite AD
x
I_z

On a : aire de base = aire du rectangle $ABCD = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| =$
$= \sqrt{(-4)^2+8^2+8^2} \cdot \sqrt{(-4)^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{16+64+64} \cdot \sqrt{16+4+16} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{36} = 12 \cdot 6 = 72.$

De plus, hauteur, $\text{dist}(O;\Pi) = \dfrac{|2\cdot 0+2\cdot 0-0-16|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{16}{3}.$

Ainsi, le volume est $V = \dfrac{1}{3} \cdot 72 \cdot \dfrac{16}{3} = 128.$

h) Comme $ABCD$ est un rectangle, le centre de son cercle circonscrit sera le milieu de AC (ou de BD) et son rayon sera la distance entre ce centre et A (ou B ou C ou D).

Le milieu de AC est $M\left(\frac{8+0}{2}; \frac{1+11}{2}; \frac{2+6}{2}\right) = M(4;6;4).$

On a alors $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{MA}\| = \sqrt{4^2+(-5)^2+(-2)^2} =$
$= \sqrt{16+25+4} = \sqrt{45} \cong 6{,}71.$

Ainsi, le centre du cercle circonscrit est $(4;6;4)$ et le rayon $\sqrt{45} \cong 6{,}71.$

i) Un vecteur directeur de la droite t incluse dans Π est perpendiculaire au vecteur normal à Π $\left(\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Un vecteur directeur de la droite t tangente à c en A doit être perpendiculaire à $\overrightarrow{AM}$ où $M(4;6;4)$ est le centre du cercle (voir h)).

On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Ainsi, un vecteur directeur de t doit être perpendiculaire à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et à $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il doit donc être parallèle à $\vec{n} \wedge \overrightarrow{AM}$.

On a $\vec{n} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2-(-1)\cdot 5 \\ -1\cdot(-4)-2\cdot 2 \\ 2\cdot 5-2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5 \\ 4-4 \\ 10+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Un vecteur directeur de t est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, puisque t passe par A, ses équations paramétriques sont : $\begin{cases} x = 8+\lambda \\ y = 1 \\ z = 2+2\lambda. \end{cases}$

j) Le centre de la sphère S sera sur la droite perpendiculaire à c (donc à Π) et passant par M, centre de C.

Comme $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $M(4;6;4)$, des équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x = 4+2\mu \\ y = 6+2\mu \\ z = 4-\mu. \end{cases}$$

Le centre N de la sphère est sur cette droite. On sait aussi que N est dans le mur.

On doit donc avoir $x=0 \rightarrow 4+2\mu=0 \Rightarrow \mu=-2$.

Avec $\mu=-2$, on a $y=6+2(-2)=2$ et $z=4-(-2)=6$.

Le centre N de la sphère S est donc $N(0;2;6)$.

Comme la sphère S contient le cercle c, elle contient en particulier le point A.

Le rayon de la sphère est donc $r=\|\overrightarrow{NA}\|$.

On a $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON}=\begin{pmatrix}8\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{NA}\|=\sqrt{8^2+(-1)^2+(-4)^2}=$

$=\sqrt{64+1+16}=\sqrt{81}=9$.

Ainsi, le rayon de la sphère est $r=9$ et son équation cartésienne est

$$S:\ x^2+(y-2)^2+(z-6)^2=81.$$

Problème 3

a) La probabilité que Jeremy obtienne autre chose que "6" sur 1 lancer est $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.
La probabilité qu'il n'obtienne jamais un "6" sur 3 lancers est alors $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}=$
$=0,015625=15,625\,\%$.

b) On va utiliser la loi binomiale : $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X mesure le nombre de "6" obtenus, k est le nombre de "6" obtenus, n est le nombre de lancers et p est la probabilité d'obtenir "6" sur un lancer.
Ici, $n=4$, $k=2$ et $p=\frac{3}{4}$.
On a donc $p(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-2}=6\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{16}=\frac{27}{128}\cong 0,2109=$
$=21,09\,\%$.

c) On veut $p(X\geqslant 1)>0,999$. Comme $p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)$, on obtient
$1-p(X=0)>0,999 \implies p(X=0)<0,001$.
Ici, n est à trouver, $k=0$ et $p=\frac{3}{4}$ dans la loi binomiale de b).
On a $p(X=0)=\binom{n}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^{n-0}=1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
On obtient donc $\left(\frac{1}{4}\right)^n<0,001$.
Comme la fonction log est strictement croissante ($x<y \implies \log(x)<\log(y)$), on trouve
$\log\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)<\log(0,001)$.
On utilise la propriété des log : $\log(a^n)=n\cdot\log(a)$.
Ainsi, on a $n\cdot\log\left(\frac{1}{4}\right)<\log(0,001)$.
Comme $\log\left(\frac{1}{4}\right)<0$, on trouve finalement $n>\frac{\log(0,001)}{\log(1/4)}\cong 4,98$.

Ainsi, Jeremy doit lancer son dé au moins 5 fois.

d) Si le nombre total de lancers est supérieur à 4, cela signifie que, sur les 4 premiers lancers, ni Marie ni Jeremy n'a obtenu un six. Comme ils lancent à tour de rôle, cela signifie que Marie et Jeremy ont obtenu tous les deux à chaque fois autre chose que six.
La probabilité est alors $\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{16}=\frac{25}{576}\cong$
$\cong 0,0434=4,34\,\%$.

e) $p(\text{même nombre de points})=p(1;1)+p(2;2)+p(3;3)+p(4;4)+p(5;5)+p(6;6)$.
On a $p(1;1)=p(2;2)=p(3;3)=p(4;4)=p(5;5)$.
La probabilité que Marie obtienne le nb i, $1\leq i\leq 6$, est $\frac{1}{6}$.
La probabilité que Jeremy obtienne le nb i, $1\leq i\leq 5$, est $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$.
Ainsi, pour $1\leq i\leq 5$, $p(i;i)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{120}$.

On a donc $p(\text{même nombre de points}) = 5 \cdot \frac{1}{120} + p(6;6) = \frac{1}{24} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} =$
$= \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6} \cong 0{,}1667 = 16{,}67\%$.

f) Supposons que la probabilité de Jeremy obtienne un "6" soit x, $0 < x < 1$.
La probabilité que Jeremy obtienne autre chose que "6" est $1-x$.
La probabilité que Jeremy obtienne le nb i, $1 \leq i \leq 5$, est $\frac{1}{5}(1-x) = \frac{1-x}{5}$.
Dans ce cas, similairement à e, pour $1 \leq i \leq 5$, $p(i;i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1-x}{5} = \frac{1-x}{30}$
On a alors $p(\text{même nombre de points}) = 5 \cdot \frac{1-x}{30} + \frac{1}{6} \cdot x = \frac{1-x}{6} + \frac{x}{6} = \frac{1}{6}$.

Ainsi, la probabilité ne change pas (il y a toujours 1 chance sur 6 que Marie obtienne le même résultat que Jeremy).

g) $p(\text{1 seul joueur obtient "6"}) = p(\text{Marie obtient "6" et Jeremy autre chose}) +$
$p(\text{Jeremy obtient "6" et Marie autre chose}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{24} + \frac{15}{24} =$
$= \frac{16}{24} \cong 0{,}6667 = 66{,}67\%$.

h) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Ici, A est Jeremy a obtenu "6" et B est un des 2 joueurs a obtenu "6".
On a $A \cap B$ = Jeremy a obtenu "6", $p(A \cap B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ et $p(B) = \frac{16}{24} =$
$= \frac{2}{3}$ (voir g)).
Ainsi, $P(A|B) = \frac{5/8}{2/3} = \frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{16} = 0{,}9375 = 93{,}75\%$.