Lycée Denis-de-Rougemont

Mathématiques de niveau 2

EXAMEN DE MATURITE 2007

Corrigé

Problème 1

a) A résoudre: $y' - \frac{1}{x}y = 2\ln(x)$, $x > 0$.

C'est une équation linéaire que l'on va résoudre avec la méthode de Formulaires et Tables p. 84. Sa solution générale est la somme d'une solution particulière p de l'équation et de la solution générale de l'équation sans second membre. Cette dernière sera donnée par $y = ce^{-F(x)}$, où F est une primitive de $-\frac{1}{x}$ et c est une constante. La solution particulière p sera trouvée en posant $p(x) = c(x)e^{-F(x)}$, où $c(x)$ est à déterminer en remplaçant y par p dans $y' - \frac{1}{x}y = 2\ln(x)$.

On a $F(x) = -\ln(|x|) = -\ln(x)$ (puisque $x > 0$).

La solution générale de l'équation sans second membre est ainsi $y = ce^{+\ln(x)} =$
$= cx$.

On a $p(x) = c(x)e^{+\ln(x)} = c(x)\cdot x$ et $p'(x) = c'(x)\cdot x + c(x)\cdot 1 =$
$= c'(x)\cdot x + c(x)$.

Par substitution dans $y' - \frac{1}{x}y = 2\ln(x)$, on obtient $c'(x)\cdot x + c(x) - \frac{1}{x}c(x)\cdot x = 2\ln(x)$
$\Rightarrow c'(x)\cdot x + c(x) - c(x) = 2\ln(x) \Rightarrow c'(x)\cdot x = 2\ln(x) \Rightarrow c'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$.

On a alors $c(x) = 2\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$.

On va utiliser la formule d'intégration par parties: $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$.

En posant $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \ln(x)$, on a $u = \ln(x)$ et $v' = \frac{1}{x}$, on a:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx = (\ln(x))^2 - \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$$

Ainsi $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = (\ln(x))^2 - \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx \Rightarrow 2\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = (\ln(x))^2$.

Par conséquent, $c(x) = (\ln(x))^2$, et $p(x) = (\ln(x))^2\cdot x$.

La solution générale de $y' - \frac{1}{x}y = 2\ln(x)$ est donc $y = cx + (\ln(x))^2\cdot x =$
$= (c + (\ln(x))^2)\cdot x$, $c \in \mathbb{R}$.

b) On a $f(x) = x\ln^2(x) + kx$, $k \in \mathbb{R}$, $x > 0$

On doit étudier $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

puisque $x > 0$

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(x\ln^2(x) + kx\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln^2(x) = 0 \cdot \infty$, ce qui est indéterminé.

On va utiliser le théorème de l'Hospital, p.73 de Formulaires et Tables.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln^2(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\ln^2(x)}{1/x} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{(\ln^2(x))'}{(1/x)'} =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{-1/x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{x} \cdot 2\ln(x)}{\frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{2\ln(x)}{-1/x} = \dfrac{-\infty}{-\infty} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{(2\ln(x))'}{(-1/x)'} =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1/x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2x = 0_+$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0_+$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\ln^2(x) + kx\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln^2(x) + k\right) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) On a $f(x) = x\ln^2(x) + kx$. Ainsi $f'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} + k =$
$= \ln^2(x) + 2\ln(x) + k$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\ln^2(x) + 2\ln(x) + k\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\ln(x)(\ln(x)+2) + k\right) =$
$= \left(-\infty \cdot (-\infty + 2) + k\right) = +\infty + k = +\infty$.

Ainsi, $f'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + k$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = +\infty$.

d) Les points à tangente horizontale sont les $(x; f(x))$ tels que $f'(x) = 0$.
On a $f'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + k$.
Ainsi $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln^2(x) + 2\ln(x) + k = 0$.
En posant $u = \ln(x)$, on obtient l'équation $u^2 + 2u + k = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $au^2 + bu + c = 0$ où $a = 1$, $b = 2$ et $c = k$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 4 - 4k = 4(1-k)$.
Ainsi, si $k < 1$, on a $\Delta > 0$, donc 2 solutions, d'où 2 points à tangente horizontale.
Si $k = 1$, on a $\Delta = 0$, donc 1 solution, d'où 1 point à tangente horizontale.
Si $k > 1$, on a $\Delta < 0$, donc aucune solution, d'où pas de point à tangente horizontale.

Ainsi, f a un seul point à tangente horizontale si $k = 1$ et 2 points à tangente horizontale si $k < 1$.

e) On considère $f_0(x) = x\ln^2(x)$, $x > 0$.

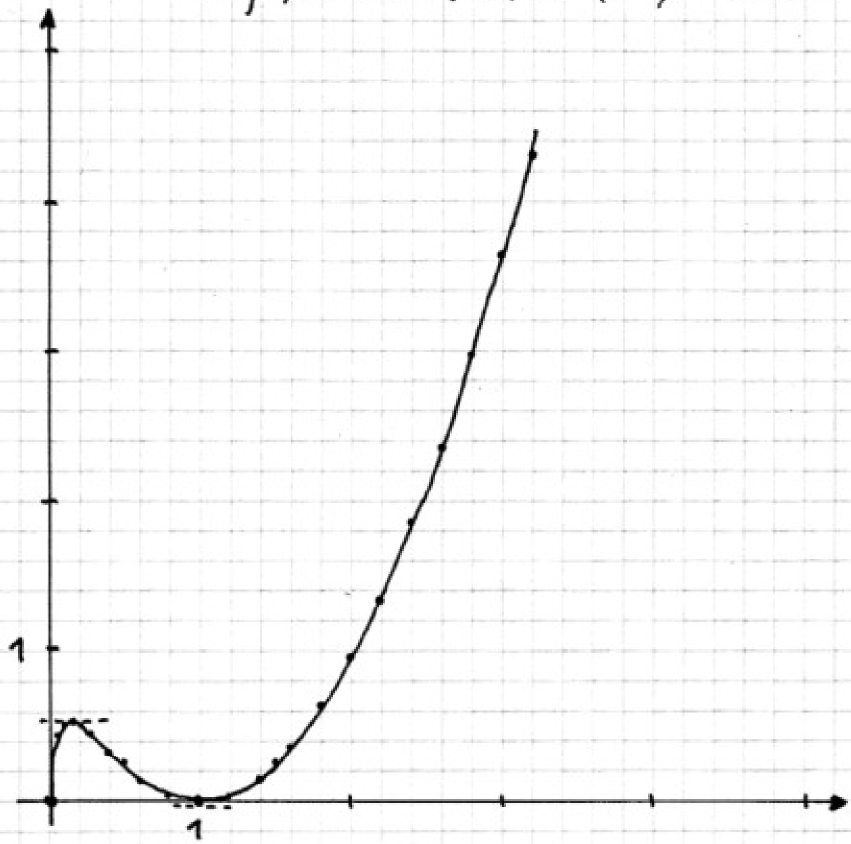
Signe : on a clairement $f_0(x) > 0$ puisque $x > 0$.

Comportement en zéro : d'après b), on a $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_0(x) = 0$.

Comportement à l'infini : d'après b), on a $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = +\infty$.

Points à tangente horizontale : d'après d), comme $k = 0 < 1$, on a 2 points à tangente horizontale ; on a alors $\Delta = 4$ et $\sqrt{\Delta} = 2$; les solutions de $u^2 + 2u = 0$ sont alors $u_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2}{2} = 0$ et $u_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2-2}{2} = -2$; avec $u_1 = 0$ et $u = \ln(x)$, on obtient $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$; avec $u_2 = -2$ et $u = \ln(x)$, on obtient $\ln(x) = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$; avec $x = 1$, on a $f_0(x) = 1 \cdot \ln^2(1) = 1 \cdot 0 = 0$; avec $x = e^{-2}$, on a $f_0(x) = e^{-2}\ln^2(e^{-2}) = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2}$; les points à tangente horizontale de f_0 sont donc $(1;0)$ et $(e^{-2};4e^{-2}) \cong (0{,}135 ; 0{,}541)$

Graphe :



f) On va utiliser la formule d'intégration par parties : $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$.

On pose $v = \ln^2(x)$ et $u' = x$. On a alors $v' = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}$ et $u = \frac{x^2}{2}$.

Ainsi $\int x \ln^2(x)\,dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,dx =$
$= \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int x \ln(x)\,dx$.

On pose maintenant $v = \ln(x)$ et $u' = x$. On a alors $v' = \frac{1}{x}$ et $u = \frac{x^2}{2}$.

Ainsi $\int x \ln(x)\,dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx =$
$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$.

Par conséquent, une primitive de f_0 est donnée par $F_0(x) = \int x \ln^2(x)\,dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\right).$$

g) On a $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \int_a^1 f_0(x)\,dx.$

Comme $F_0(1) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\ln^2(1)}_{0} - \underbrace{\ln(1)}_{0} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et $F_0(a) = \frac{a^2}{2}\left(\ln^2(a) - \ln(a) + \frac{1}{2}\right)$, on a

$$\int_a^1 f_0(x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{2}\left(\ln^2(a) - \ln(a) + \frac{1}{2}\right) \quad \text{et}$$

$$\int_0^1 f_0(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{4} - \frac{a^2}{2}\left(\ln^2(a) - \ln(a) + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} a^2\left(\ln^2(a) - \ln(a) + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} a^2\ln(a)(\ln(a)-1) - \frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} a^2\ln(a)(\ln(a)-1).$$

On a $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} a^2\ln(a)(\ln(a)-1) = 0\cdot(-\infty)\cdot(-\infty)$, ce qui est indéterminé.

On va utiliser le théorème de l'Hospital, p.73 de Formulaires et Tables.

$$\text{On a } \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} a^2\ln(a)(\ln(a)-1) = \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \frac{\ln(a)(\ln(a)-1)}{1/a^2} = \frac{(-\infty)(-\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \frac{\left(\ln(a)(\ln(a)-1)\right)'}{(1/a^2)'} = \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \frac{\frac{1}{a}(\ln(a)-1) + \ln(a)\cdot\frac{1}{a}}{-2/a^3} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ >}}\left(\frac{2}{a}\ln(a) - \frac{1}{a}\right)\left(-\frac{a^3}{2}\right) = \lim_{\substack{a\to 0\\ >}}\left(\frac{a^2}{2} - a^2\ln(a)\right) = -\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} a^2\ln(a) = -0\cdot(-\infty) =$$

$$= -\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \frac{\ln(a)}{1/a^2} = -\frac{-\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = -\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \frac{(\ln(a))'}{(1/a^2)'} = -\lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \frac{1/a}{-2/a^3} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \frac{1}{a}\cdot\frac{a^3}{2} = \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \frac{a^2}{2} = 0.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$

h) Avec $k = -1$, on a $f_{-1}(x) = x\ln^2(x) - x$, $x > 0$.

Signe: On a $f_{-1}(x) = x\left(\ln^2(x) - 1\right)$; ainsi, comme $x > 0$, le signe de $f_{-1}(x)$ sera celui de $\ln^2(x) - 1$; on a $\ln^2(x) - 1 = 0$ si $\ln^2(x) = 1$, d'où $\ln(x) = \pm 1$ $\Rightarrow x = e$ ou $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$; ainsi $\ln^2(x) - 1 < 0$ si $x \in \left]\frac{1}{e}; e\right[$ et $\ln^2(x) - 1 > 0$ si $x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]e; +\infty\right[$; par conséquent, $f_{-1}(x) > 0$ si $x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]e; +\infty\right[$, $f_{-1}(x) = 0$ si $x = e$ ou $x = \frac{1}{e}$ et $f_{-1}(x) < 0$ si $x \in \left]\frac{1}{e}; e\right[$.

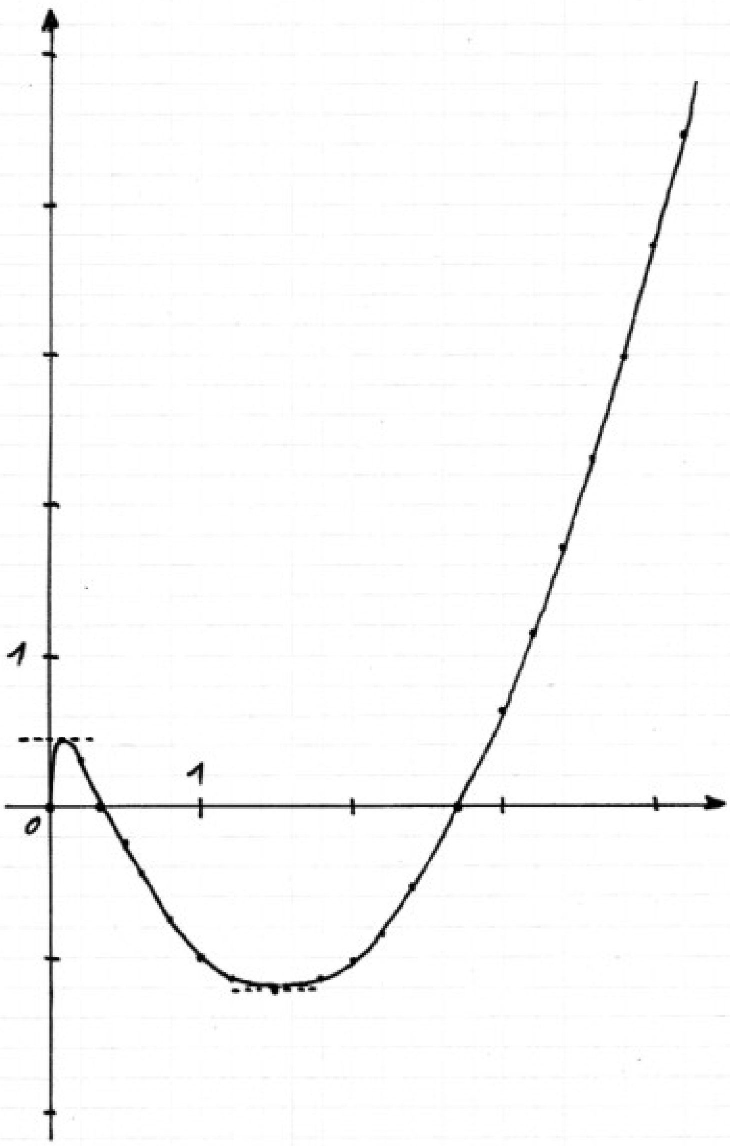
Comportement en zéro: d'après b), on a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f_{-1}(x) = 0$.

Comportement à l'infini : d'après b), on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_{-1}(x) = +\infty$

Points à tangente horizontale: d'après d), comme $k = -1 < 1$, on a 2 points à tangente horizontale ; on a alors $\Delta = 4(1-k) = 4\cdot 2 = 8$ et $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$;

les solutions de $u^2+2u-1=0$ sont alors $u_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-1$ et $u_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$; avec $u_1=\sqrt{2}-1$ et $u=\ln(x)$, on obtient $\ln(x)=\sqrt{2}-1 \Rightarrow x=e^{\sqrt{2}-1}$; avec $u_2=-1-\sqrt{2}$ et $u=\ln(x)$, on obtient $\ln(x)=-1-\sqrt{2} \Rightarrow x=e^{-1-\sqrt{2}}$; avec $x=e^{\sqrt{2}-1}\cong 1{,}513$, on a $f_{-1}(x)=e^{\sqrt{2}-1}(\ln(e^{\sqrt{2}-1}))^2-e^{\sqrt{2}-1}=e^{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}-1)^2-e^{\sqrt{2}-1}=$ $=e^{\sqrt{2}-1}(2-2\sqrt{2}+1-1)=2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}\cong -1{,}254$; avec $x=e^{-1-\sqrt{2}}\cong 0{,}089$, on a $f_{-1}(x)=e^{-1-\sqrt{2}}(\ln(e^{-1-\sqrt{2}}))^2-e^{-1-\sqrt{2}}=$ $=e^{-1-\sqrt{2}}(-1-\sqrt{2})^2-e^{-1-\sqrt{2}}=e^{-1-\sqrt{2}}(1+2\sqrt{2}+2-1)=2(1+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}\cong$ $\cong 0{,}432$; les points à tangente horizontale de f_{-1} sont donc $(e^{\sqrt{2}-1} ; 2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1})\cong(1{,}513 ; -1{,}254)$ et $(e^{-1-\sqrt{2}} ; 2(1+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}})\cong(0{,}089 ; 0{,}432)$.

Graphe :



Problème 2

a) La matrice M de f est inversible si $\det(M) \neq 0$.

On a $\det(M) = \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} = c - c^3 = c(1-c^2)$.

Ainsi $\det(M) = 0$ si $c(1-c^2) = 0 \Rightarrow$ soit $c = 0$, soit $1 - c^2 = 0 \Rightarrow c = \pm 1$.

Par conséquent, M est inversible si $c \neq 0$, $c \neq -1$ et $c \neq 1$.

b) Les valeurs propres de M sont les λ solutions de $\det(M - \lambda I) = 0$.

On a $\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} c-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & c \\ 0 & c & 1-\lambda \end{vmatrix} = (c-\lambda)(1-\lambda)^2 - c^2(c-\lambda) =$

$= (c-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - c^2\right)$.

Ainsi $\det(M - \lambda I) = 0 \Rightarrow (c-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - c^2\right) = 0$

$\Rightarrow$ soit $c - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = c$,

soit $(1-\lambda)^2 - c^2 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = c^2 \Rightarrow 1 - \lambda = \pm c \Rightarrow \lambda = 1 \pm c$.

Les valeurs propres de f sont donc $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = 1 + c$, $\lambda_3 = 1 - c$.

Pour qu'elles soient distinctes, on doit avoir $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$ et $\lambda_2 \neq \lambda_3$.

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow c \neq 1 + c \Rightarrow 0 \neq 1$, ce qui est toujours vrai.

$\lambda_1 \neq \lambda_3 \Rightarrow c \neq 1 - c \Rightarrow 2c \neq 1 \Rightarrow c \neq \frac{1}{2}$.

$\lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow 1 + c \neq 1 - c \Rightarrow 2c \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$.

Ainsi, les valeurs propres de f sont distinctes si $c \neq 0$ et $c \neq \frac{1}{2}$.

c) Si $\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = c$, on a

$M\vec{p} = c\vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ac \\ a+b+c^2 \\ bc+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ c^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} ac = ac \\ a+b+c^2 = bc \\ bc + c = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c^2 = bc \\ b = c - 1 \end{cases}$.

Avec $b = c - 1$, on a $a + b + c^2 = bc \Rightarrow a + c - 1 + c^2 = (c-1)c$

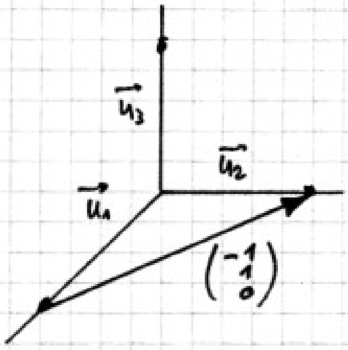
$\Rightarrow a + c - 1 + c^2 = c^2 - c \Rightarrow a + c - 1 = -c \Rightarrow a = 1 - 2c$

Par conséquent, avec $a = 1 - 2c$ et $b = c - 1$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda = c$.

d) Si $c = 0$, on a $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base standard $(\vec{u_1}; \vec{u_2}; \vec{u_3})$.

Ainsi, on a $f(\vec{u_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u_2}$, $f(\vec{u_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u_2}$ et $f(\vec{u_3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u_3}$.

On a donc la situation suivante:



Ainsi, f est la projection sur le plan contenant $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ et l'origine (plan $x=0$) parallèlement au vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) D'après b), les valeurs propres de f sont $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = 1+c$ et $\lambda_3 = 1-c$.
Avec $c = \frac{1}{2}$, on obtient $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2}$.
Dans ce cas-ci, f a donc 2 valeurs propres : $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.
Cherchons les vecteurs propres associés :

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$: $M\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} v_1 \\ v_1 + v_2 + \frac{1}{2} v_3 = \frac{1}{2} v_2 \\ \frac{1}{2} v_2 + v_3 = \frac{1}{2} v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3 = 0 \\ \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_3 = -v_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ -v_2 \end{pmatrix}$; avec $v_2 = 1$, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = \frac{3}{2}$: $M\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} v_1 = \frac{3}{2} v_1 \\ v_1 + v_2 + \frac{1}{2} v_3 = \frac{3}{2} v_2 \\ \frac{1}{2} v_2 + v_3 = \frac{3}{2} v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1 - \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3 = 0 \\ \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$; avec $v_2 = 1$, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

f) Comme f ne possède que 2 vecteurs propres $\left(\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (et pas 3), elle n'est pas diagonalisable.

g) On a maintenant $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(= \vec{v_2} \text{ de e)})$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(= -\vec{v_1} \text{ de e)})$.
$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ correspondent respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ $(= \lambda_2 \text{ de e)})$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ $(= \lambda_1 \text{ de e)})$.
Dans la base $(\vec{v_1} ; \vec{v_2} ; \vec{v_3})$, la matrice de f sera de la forme $M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & p \\ 0 & \lambda_2 & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & p \\ 0 & 1/2 & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$.

On a $\vec{v_3} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 - 1.(-1) \\ 1.0 - 0.1 \\ 0.(-1) - 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u_2} + \vec{u_3}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{u_2} + \vec{u_3}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{u_1}$.

La matrice de passage de la base standard $(\vec{u_1}; \vec{u_2}; \vec{u_3})$ à la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$ est $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On aura alors $M' = P^{-1}MP$.

On a $\det(P) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - (-2) = 4$.

Construisons P^{-1} : on a $P_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $P_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, $P_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$,

$P_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $P_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, $P_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, $P_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$,

$P_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $P_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

Ainsi, $P^{-1} = \frac{1}{4} {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, la matrice de f dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$ est

$M' = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Problème 3

On a $z \mapsto w = f(z) = z + \frac{i}{z}$, $z \neq 0$.

a) Zéros de f : $f(z) = 0 \Rightarrow z + \frac{i}{z} = 0 \Rightarrow z = -\frac{i}{z} \Rightarrow z^2 = -i$
$\Rightarrow z = \pm\sqrt{-i}$; cherchons les racines carrées de $-i$;
on a $-i = r\,cis(\varphi)$ avec $r=1$ et $\varphi = 270°$; ainsi les racines carrées de $-i$ sont $\sqrt{r}\,cis\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $\sqrt{r}\,cis\left(\frac{\varphi}{2}+180°\right)$;
elles valent donc $\sqrt{1}\,cis\left(\frac{270°}{2}\right) = \cos(135°) + i\sin(135°) =$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $\sqrt{1}\,cis\left(\frac{270°}{2}+180°\right) = \cos(315°) + i\sin(315°) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; on a donc $z = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$;
ainsi, les zéros de f sont $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Points fixes de f : $f(z) = z \Rightarrow z + \frac{i}{z} = z \Rightarrow \frac{i}{z} = 0 \Rightarrow i = 0$ impossible ;
ainsi, f n'a pas de points fixes.

b) $f(z) = 1+2i \Rightarrow z + \frac{i}{z} = 1+2i \Rightarrow z^2 + i = (1+2i)z \Rightarrow z^2 - (1+2i)z + i = 0$;
c'est une équation du 2e degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a=1$, $b = -(1+2i)$ et $c = i$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (1+2i)^2 - 4.1.i =$
$= 1 + 4i + 4i^2 - 4i = 1 - 4 = -3$; ainsi $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$; les solutions de $z^2 - (1+2i)z + i = 0$ sont donc $z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+2i+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{2}i$
et $z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+2i-\sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$.

Les solutions de $f(z) = 1+2i$ sont donc $z = \frac{1}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{2}i$ et $z = \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$.

c) $f(z) = m \Rightarrow z + \frac{i}{z} = m \Rightarrow z^2 + i = mz \Rightarrow z^2 - mz + i = 0$; c'est une équation du 2e degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -m$ et $c = i$;
on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4.1.i = m^2 - 4i$.
$f(z) = m$ aura une unique solution si $\Delta = 0$.
$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4i = 0 \Rightarrow m^2 = 4i \Rightarrow m = \pm\sqrt{4i} = \pm 2\sqrt{i}$; cherchons les racines carrées de i ; on a $i = r\,cis(\varphi)$ avec $r = 1$ et $\varphi = 90°$; ainsi les racines carrées de i sont $\sqrt{r}\,cis\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $\sqrt{r}\,cis\left(\frac{\varphi}{2}+180°\right)$; elles valent donc
$\sqrt{1}\,cis\left(\frac{90°}{2}\right) = \cos(45°) + i\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $\sqrt{1}\,cis\left(\frac{90°}{2}+180°\right) =$
$= \cos(225°) + i\sin(225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$;
ainsi $\Delta = 0 \Rightarrow m = \pm 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \pm(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$.
Par conséquent si $m = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ou $m = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $f(z) = m$ n'a qu'une solution.
Avec $m = \pm(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$, la solution de $f(z) = m$ est alors donnée par

$z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-m}{2} = \frac{m}{2}$.

Ainsi, si $m = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, la solution est $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, et, si $m = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, la solution est $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

d) En posant $z = x + iy$ et $w = u + iv$, on a $w = f(z) = z + \frac{i}{z} = x + iy + \frac{i}{x+iy} =$

$= x + iy + \frac{i(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = x + iy + \frac{ix - i^2y}{x^2 - i^2y^2} = x + iy + \frac{ix+y}{x^2+y^2} =$

$= x + iy + \frac{x}{x^2+y^2}i + \frac{y}{x^2+y^2} = x + \frac{y}{x^2+y^2} + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)i = u + iv$

avec $u = x + \frac{y}{x^2+y^2}$ et $v = y + \frac{x}{x^2+y^2}$.

e) L'image par f de l'axe réel privé de l'origine correspond à l'image des $z = x + iy$ avec $y = 0$ et $x \neq 0$.

Avec $y = 0$ et $x \neq 0$, on obtient $u = x + \frac{y}{x^2+y^2} = x$ et $v = y + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}$

Ainsi, l'image par f de l'axe réel privé de l'origine est la courbe donnée par $w = u + iv = x + \frac{1}{x}i$, ce qui correspond à la fonction $u \longmapsto \frac{1}{u}$, ce qui est une hyperbole.

f) On doit avoir $v = u$: $y + \frac{x}{x^2+y^2} = x + \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{x-y}{x^2+y^2} = x - y$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} = 1$ (pour autant que $x \neq y$, sinon on a clairement $u = v$ de toute manière $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Ainsi, les nombres $z = x + iy$ dont l'image est sur la droite $v = u$ sont ceux vérifiant $x^2 + y^2 = 1$ ou $x = y$, autrement sont sur le cercle centré à l'origine et de rayon 1 ou sur la droite $y = x$.

g) L'image de la droite $y = 1$ est la courbe $z = u + iv$ avec $u = x + \frac{1}{x^2+1}$ et $v = 1 + \frac{x}{x^2+1}$.

Voici quelques points: $x = 0 \Rightarrow u = 1$ et $v = 1 \Rightarrow (1;1)$;

$x = 1 \Rightarrow u = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $v = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$;

$x = -1 \Rightarrow u = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ et $v = 1 + \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

$x = 2 \Rightarrow u = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$ et $v = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow \left(\frac{11}{5}; \frac{7}{5}\right)$;

$x = -2 \Rightarrow u = -2 + \frac{1}{5} = -\frac{9}{5}$ et $v = 1 + \frac{-2}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \left(-\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right)$;

$x = 3 \Rightarrow u = 3 + \frac{1}{10} = \frac{31}{10}$ et $v = 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10} \Rightarrow \left(\frac{31}{10}; \frac{13}{10}\right)$;

$x = -3 \Rightarrow u = -3 + \frac{1}{10} = -\frac{29}{10}$ et $v = 1 + \frac{-3}{10} = \frac{7}{10} \Rightarrow \left(-\frac{29}{10}; \frac{7}{10}\right)$.

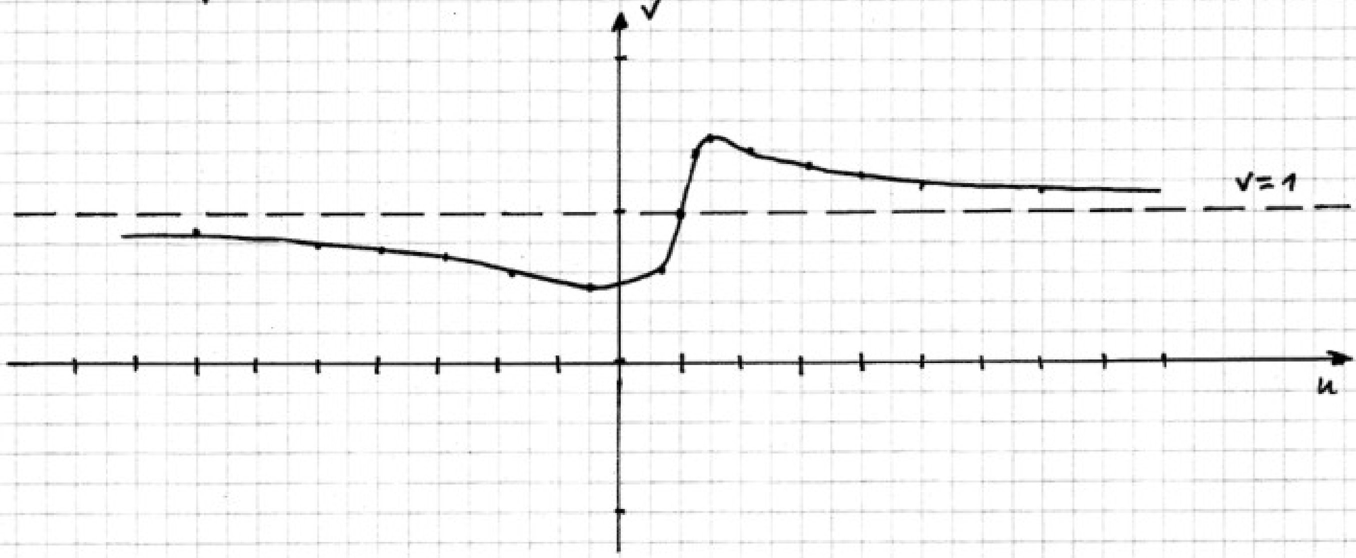
De plus, si $x \to +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} u = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x^2+1} \right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} v =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{x^2+1} \right) = 1$.

Si $x \to -\infty$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} u = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{x^2+1} \right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} v = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{x}{x^2+1} \right) = 1$.

L'asymptote de la courbe obtenue est $v = 1$ (asymptote horizontale).

La courbe se présente donc comme suit:



Problème 4

a) $p(3$ fiches de la même couleur$) = p(3$ fiches rouges ou 3 fiches bleues$) =$
$= p(3$ fiches rouges$) + p(3$ fiches bleues$) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{210} + \frac{24}{210} =$
$= \frac{30}{210} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \cong 0{,}1429 = 14{,}29\%$.

b) $p($plus de rouges que de bleues$) = p(3$ fiches rouges et 0 bleue ou 2 rouges et 1 bleue$) =$
$= p(3$ rouges et 0 bleues$) + p(2$ rouges et 1 bleue$) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}$ (RRB) $+$
$+ \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}$ (RBR) $+ \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}$ (BRR) $= \frac{6}{210} + 3\cdot\frac{24}{210} = \frac{78}{210} = \frac{13}{35} \cong$
$\cong 0{,}3714 = 37{,}14\ \%$ (R = fiche rouge et B = fiche bleue).

c) C'est une probabilité conditionnelle : $P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$.
Ici : X = obtenir 2 fiches bleues, Y = seconde fiche est rouge, $X\cap Y$ = 2 fiches bleues et la 2e rouge = BRB.
On a $p(X\cap Y) = p(BRB) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{48}{210} = \frac{8}{35}$ et $P(Y) =$
$= p(RRR) + p(BRR) + p(RRB) + p(BRB) =$
$= \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} =$
$= \frac{6}{210} + \frac{24}{210} + \frac{24}{210} + \frac{48}{210} = \frac{102}{210} = \frac{17}{35}$.
Ainsi, $P(X|Y) = \frac{8/35}{17/35} = \frac{8}{35} : \frac{17}{35} = \frac{8}{35}\cdot\frac{35}{17} = \frac{8}{17} \cong 0{,}4706 = 47{,}06\%$.

d) On va utiliser la loi binomiale : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où X compte le nombre de fiches rouges, $k=3$, $n=5$ et p = la probabilité de tirer une fiche rouge pour un tirage $= \frac{3}{7}$.
Ainsi $P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{3}{7}\right)^3\left(1-\frac{3}{7}\right)^{5-3} = 10\cdot\frac{27}{343}\cdot\frac{16}{49} = \frac{4320}{16807} \cong 0{,}257 =$
$= 25{,}7\%$.

e) $p($couleurs alternées$) = p(BRBRB$ ou $RBRBR) = p(BRBRB) + p(RBRBR) =$
$= \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7} = \frac{432}{16807} + \frac{576}{16807} = \frac{1008}{16807} \cong 0{,}06 =$
$= 6\%$.

f) $p(X=1) = p(R) = \frac{3}{7}$;
$p(X=2) = p(BR) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7} = \frac{12}{49}$;
$p(X=3) = p(BBR) = \left(\frac{4}{7}\right)^2\cdot\frac{3}{7} = \frac{48}{343}$;
$p(X=n) = p(\underbrace{BB\ldots BB}_{n-1 \text{ fois}}R) = \left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{7}$.

g) $p(X \text{ pair}) = p(X=2) + p(X=4) + p(X=6) + \ldots =$

$= \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^3\cdot\frac{3}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^5\cdot\frac{3}{7} + \dots =$

$= \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\left(1+\left(\frac{4}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\left(\frac{4}{7}\right)^6+\dots\right) =$

$= \frac{12}{49}\left(1+\frac{16}{49}+\left(\frac{16}{49}\right)^2+\left(\frac{16}{49}\right)^3+\dots\right).$

Or, on sait que si $|r|<1$, $1+r+r^2+r^3+\dots = \frac{1}{1-r}$.

Ici $r=\frac{16}{49}$ (on a bien $|r|<1$). Ainsi $1+\frac{16}{49}+\left(\frac{16}{49}\right)^2+\left(\frac{16}{49}\right)^3+\dots =$

$= \frac{1}{1-\frac{16}{49}} = \frac{1}{33/49} = \frac{49}{33}.$

Par conséquent, $P(X \text{ pair}) = \frac{12}{49}\cdot\frac{49}{33} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11} \cong 0{,}3636 = 36{,}36\,\%$.

h) Calculons l'espérance de gain si on mise m francs ($m>0$).
Si on tire 2 rouges, on gagne m^3.
Si on tire 1 rouge et 1 bleue (ou 1 bleue et 1 rouge), on gagne $\frac{m}{2}$.
Si on ne tire aucune rouge, on ne gagne rien.
L'espérance de gain est donc $m^3\cdot P(RR) + \frac{m}{2}\left(P(RB)+P(BR)\right) =$

$= m^3\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} + \frac{m}{2}\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\right) = \frac{9}{49}m^3 + \frac{m}{2}\cdot 2\cdot\frac{12}{49} =$

$= \frac{9}{49}m^3 + \frac{12}{49}m.$

Pour que le jeu soit financièrement équitable, il faut que l'espérance de gain soit égale à l'investissement : on doit avoir $\frac{9}{49}m^3+\frac{12}{49}m = m$.

$\frac{9}{49}m^3+\frac{12}{49}m = m \Rightarrow 9m^3+12m = 49m \Rightarrow 9m^3 = 37m \Rightarrow 9m^2 = 37$ (puisque $m>0$) $\Rightarrow m^2 = \frac{37}{9} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{37}{9}} = \frac{\sqrt{37}}{3} \cong 2{,}028$ (puisque $m>0$).

Ainsi, pour que le jeu soit équitable, il faut que $m = \frac{\sqrt{37}}{3} \cong 2{,}028$.