
Problème 1 (poids 3)

a) Résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{1}{x}y = 2\ln(x)$, x étant positif.

On considère la fonction $f : x \mapsto y = x \cdot \ln^2(x) + kx$, k étant une constante réelle.

b) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers l'infini ?

c) Calculer la dérivée $f'(x)$, puis expliquer pourquoi elle tend vers l'infini lorsque x tend vers 0.

d) Selon la valeur de k, la fonction f présente 0, 1 ou 2 points à tangente horizontale. Déterminer pour quelle valeur de k le graphe de f a un seul point à tangente horizontale et pour quelles valeurs de k il en a deux.

On pose $k = 0$, si bien que la fonction devient $f_0(x) = x \cdot \ln^2(x)$

e) En tenant compte du signe, du comportement en zéro et à l'infini, ainsi que des coordonnées des points à tangente horizontale, tracer le graphe de f_0.

f) Pour trouver une primitive F_0 de la fonction f_0, on procède par une double intégration par parties, la première fois en dérivant $\ln^2(x)$, la seconde en dérivant $\ln(x)$. Déterminer ainsi une expression de $F_0(x)$.

g) Calculer, si elle existe, l'intégrale impropre $\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $k = -1$, si bien que la fonction devient $f_{-1}(x) = x \cdot \ln^2(x) - x$

h) En tenant compte du signe, du comportement en zéro et à l'infini, ainsi que des coordonnées des points à tangente horizontale, tracer le graphe de f_{-1}.

Problème 2 **(poids 3)**

Une transformation linéaire f des vecteurs de l'espace est donnée dans une base orthonormée standard par sa matrice $M = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$. Le nombre c est réel.

a) Pour quelles valeurs de c la matrice M est-elle inversible ?

b) Pour quelles valeurs de c la transformation f a-t-elle trois valeurs propres distinctes ?

c) Si c est différent de zéro, comment faut-il choisir a et b pour que le vecteur $\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda = c$?

d) Dans le cas où $c = 0$, trouver une interprétation géométrique précise de la transformation f en observant l'image des vecteurs de base.

Pour la fin du problème, on pose $c = \frac{1}{2}$.

e) Trouver les valeurs et vecteurs propres de la transformation f.

f) La transformation f est-elle diagonalisable ? Justifier.

g) On considère une nouvelle base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, avec $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

Trouver la matrice de f dans cette nouvelle base.

Problème 3 (poids 2)

On appelle f la fonction complexe qui associe à chaque nombre complexe z non nul un nombre complexe w donné par l'expression $w = f(z) = z + \dfrac{\mathrm{i}}{z}$.

a) Trouver les zéros et les points fixes de la fonction f.

b) Trouver les nombres complexes z tels que $f(z) = 1 + 2\mathrm{i}$.

c) Pour quelles valeurs du nombre complexe m l'équation $f(z) = m$ a-t-elle une seule solution ? Donner dans chaque cas la solution z correspondante.

d) On écrit z sous la forme $z = x + \mathrm{i}\,y$, avec x et y réels. Calculer alors les parties réelle u et imaginaire v de $w = f(z) = u + \mathrm{i}v$.

e) Dessiner l'image par f de l'axe réel privé de l'origine.

f) Où sont dans le plan de Gauss les nombres z dont l'image est sur la droite d'équation $v = u$?

g) L'image de la droite d'équation $y = 1$ est une courbe. Trouver quelques points, puis esquisser la courbe. Tracer précisément l'asymptote de cette courbe.

Problème 4 (poids 2)

Un chapeau contient 7 fiches : trois rouges et quatre bleues.

On tire successivement trois fiches du chapeau sans remettre la fiche tirée.

a) Quelle est la probabilité qu'on obtienne trois fiches de la même couleur ?

b) Quelle est la probabilité qu'on obtienne plus de fiches rouges que de fiches bleues ?

c) Quelle est la probabilité qu'on obtienne deux fiches bleues si l'on sait que la seconde fiche est rouge ?

On tire 5 fiches du chapeau en remettant chaque fois la fiche tirée.

d) Quelle est la probabilité qu'on obtienne trois fiches rouges et deux fiches bleues ?

e) Quelle est la probabilité que les couleurs des fiches soient alternées ?

En remettant chaque fois la fiche tirée dans le chapeau, on tire des fiches jusqu'à l'obtention d'une fiche rouge. On appelle X le nombre de tirages nécessaires.

f) Calculer les probabilités suivantes : $p(X=1)$, $p(X=2)$, $p(X=3)$, $p(X=n)$.

g) Quelle est la probabilité que X soit pair ?

Pour jouer, on paye un montant m ($m > 0$). On tire alors deux fiches du chapeau en remettant chaque fois la fiche tirée. Si les deux fiches sont rouges, on reçoit le cube de m, si une seule fiche est rouge, on reçoit la moitié de m et si aucune fiche n'est rouge, on ne reçoit rien.

h) Quel doit être le montant m pour que le jeu soit financièrement équitable ?