GYMNASES CANTONAUX VAUDOIS

EXAMENS D'ADMISSION MAI 2007

Examen de 1D

MATHEMATIQUES

Corrigé

Durée : 180 minutes

Consignes :

Le candidat prépare la rédaction des solutions des 16 problèmes sur les feuilles de brouillon. Au stylo ou à la plume, il met cette rédaction au propre dans les rectangles prévus à cet effet sous chaque problème.

Les calculs et les raisonnements qui mènent au résultat doivent impérativement faire partie de cette rédaction dans les rectangles. La réponse doit être mise en évidence.

Le candidat met son nom également sur les feuilles de brouillon et il les rendra avec les rédactions demandées.

Matériel autorisé : Calculatrice non programmable et sans écran graphique.
Formulaire officiel non annoté.

Nom et prénom du candidat : ....

Date : ....

---

1) Calculer $6 \cdot [(19 - 3 \cdot 8) + (-\frac{1}{4}) \cdot (-28)] - 2^3$

$6 \cdot \left[(19 - 3 \cdot 8) + (-\frac{1}{4}) \cdot (-28)\right] - 2^3 =$

$6 \cdot [19 - 24 + 7] - 8 = 6 \cdot 2 - 8 = 12 - 8 = \underline{\underline{2}}$

2) Calculer $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{7}{6}$, résultat en fraction simplifiée

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{7}{6} = \frac{8}{15} - \frac{7}{6} = \frac{16}{30} - \frac{35}{30} = \underline{\underline{-\frac{19}{30}}}$

3) Transformer 23 dm^2 a) en m^2 b) en mm^2

a) $23\ dm^2 = 23 \cdot 10^{-2}\ m^2$
$= \underline{\underline{0{,}23\ m^2}}$

b) $23\ dm^2 = 23 \cdot 10^4\ mm^2$
$= \underline{\underline{230'000\ mm^2}}$

4) Transformer 50 cm^3 a) en mm^3 b) en l (litres)

a) $50\ cm^3 = 50 \cdot 10^3\ mm^3$
$= \underline{\underline{50'000\ mm^3}}$

b) $50\ cm^3 = 50 \cdot 10^{-3}\ dm^3$
$= 0{,}05\ dm^3$
$= \underline{\underline{0{,}05\ \ell}}$

5) Exprimer, en CHF (francs suisses), le prix d'une marchandise qui coûte 140 UE (unités étrangères), sachant que 7 CHF valent 4 UE.

CHF	UE
7	4
$\frac{7}{4}$	1
$\frac{7}{4} \cdot 140$	140

$\xrightarrow{:4}$ $\xrightarrow{\cdot 140}$

$$\frac{7}{4} \cdot 140 = \frac{7}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{140}^{35}}{1} = \frac{245}{1}$$

$$= \underline{\underline{245 \text{ CHF}}}$$

6) Un ours blanc se déplace de 560 km en 8 semaines. En moyenne il consacre 1 heure et 20 minutes par jour à cette migration. Le reste du temps, il dort et il chasse.

a) Exprimer la vitesse moyenne de la migration en km/h

560 km en 8 semaines
70 km en 1 semaine = 7 jours
10 km en 1 jour
$\Rightarrow$ 10 km en 1h20mn $= (1 + \frac{1}{3})h = \frac{4}{3}h$
$\Rightarrow \frac{10}{4/3}$ km en 1h

$$\frac{10}{4/3} = 10 : \frac{4}{3} = 10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{10}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5$$

$\Rightarrow \underline{\underline{7{,}5 \text{ km/h}}}$

b) Exprimer la vitesse moyenne de la migration en m/s

7,5 km/h : 7,5 km en 1h
7500 m en 3600 s
$\frac{7500}{3600}$ m en 1 s

$$\frac{7500}{3600} = \frac{25}{12} = 2{,}08\overline{3}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{25}{12} \text{ m/s} = 2{,}08\overline{3} \text{ m/s}}}$

7) Une personne laisse sa fortune à quatre héritiers. Elle lègue le tiers de sa fortune au premier, le tiers du reste au deuxième et le tiers de ce qu'il reste au troisième. Il reste alors 40'000 francs au quatrième. Quelle est la fortune de cette personne ?

Soit x la fortune totale.
Le 1er héritier touche $\frac{1}{3}$ de la fortune : $\frac{1}{3}x$.
Il reste alors : $x - \frac{1}{3}x = (1-\frac{1}{3})x = \frac{2}{3}x$.
Le 2e héritier touche $\frac{1}{3}$ du reste $= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{2}{9}x$.
Il reste alors : $\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x = \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\right)x = \left(\frac{6}{9}-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}x$.
Le 3e héritier touche $\frac{1}{3}$ du reste $= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}x = \frac{4}{27}x$.
Il reste alors : $\frac{4}{9}x - \frac{4}{27}x = \left(\frac{4}{9}-\frac{4}{27}\right)x = \left(\frac{12}{27}-\frac{4}{27}\right)x = \frac{8}{27}x$.
Le reste est les 40'000.– pour le 4e : $\frac{8}{27}x = 40'000$
$\Rightarrow x = 40'000 : \frac{8}{27} = \frac{\cancel{40'000}^{5000}}{1} \cdot \frac{27}{\cancel{8}_1} = 5000 \cdot 27 = \underline{\underline{135'000.–}}$

8) Une équipe de tapissiers commence son travail à 7h10. Ils doivent retapisser 7 chambres (identiques) d'un hôtel. A 9h20, quand ils entament une pause d'une demi-heure, ils ont terminé 2 des 7 chambres commandées. A midi, ils font une interruption d'une heure et demie. A quelle heure de l'après-midi auront-ils terminé la commande ?

Temps pour retapisser 2 chambres : 9h20 – 7h10 = 2h10.
$\Rightarrow$ temps pour une chambre : 2h10 : 2 = 1h05.
$\Rightarrow$ temps pour les 7 chambres : 7 · 1h05 = 7h35.
De 7h10 à 12h00, il y a 12h00 – 7h10 = 4h50.
On a 7h35 – 4h50 = 2h45.
D'où 13h30 + 2h45 = 16h15.
$\Rightarrow$ ils terminent à $\underline{\underline{16h15}}$.

9) Résoudre l'équation $\frac{x+2}{7} = \frac{x-\frac{1}{2}}{2}$

$\frac{x+2}{7} = \frac{x-\frac{1}{2}}{2}$	$\cdot 2$
$\frac{2x+4}{7} = x - \frac{1}{2}$	$\cdot 7$
$2x+4 = 7x - \frac{7}{2}$	$\cdot 2$
$4x+8 = 14x - 7$	$-14x$
$-10x + 8 = -7$	-8
$-10x = -15$	$:(-10)$
$x = \frac{-15}{-10} = \frac{15}{10}$	
$= \frac{3}{2}$	

10) Résoudre l'équation $(2x-1)^2 - (x-2)^2 = 3x^2 - 4x + 9$

$(2x-1)^2 - (x-2)^2 = 3x^2 - 4x + 9$	distributivité
$4x^2 - 4x + 1 - (x^2 - 4x + 4) = 3x^2 - 4x + 9$	distributivité
$4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 3x^2 - 4x + 9$	réduction
$3x^2 - 3 = 3x^2 - 4x + 9$	$-3x^2$
$-3 = -4x + 9$	-9
$-12 = -4x$	$:(-4)$
$x = \frac{-12}{-4} = 3$	

11) Soit le système de deux équations $\left\{\begin{matrix} 5x+3y=7 \\ 2x-5y=40 \end{matrix}\right\}$

a) Calculer la solution du système

$$\begin{array}{l|l|l} 5x+3y=7 & \cdot 5 & \cdot 2 \\ 2x-5y=40 & \cdot 3 & \cdot(-5) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 25x+15y=35 & \\ 6x-15y=120 & + \\ \hline 31x=155 & \\ x=\frac{155}{31}=5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 10x+6y=14 & \\ -10x+25y=-200 & + \\ \hline 31y=-186 & \\ y=\frac{-186}{31}=-6 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x=5 \text{ et } y=-6}}$

b) Effectuer la vérification (contrôle) de la solution trouvée

$x=5$, $y=-6$

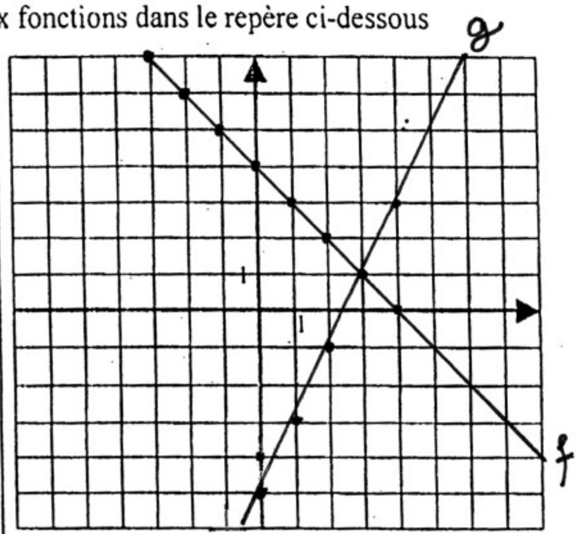
$5\cdot 5+3\cdot(-6)=25-18=7$ OK

$2\cdot 5-5\cdot(-6)=10+30=40$ OK.

12) Soit les deux fonctions $y = f(x) = -x + 4$ et $y = g(x) = 2x - 5$

a) Représenter graphiquement les deux fonctions dans le repère ci-dessous

x	−x+4	2x−5
−4	8	−13
−3	7	−11
−2	6	−9
−1	5	−7
0	4	−5
1	3	−3
2	2	−1
3	1	1
4	0	3



b) Calculer les cordonnées du point d'intersection I des deux graphiques.

On doit avoir $f(x) = g(x)$:

$$-x+4 = 2x-5 \quad \Big| \; -2x$$
$$-3x+4 = -5 \quad \Big| \; -4$$
$$-3x = -9 \quad \Big| \; :(-3)$$
$$x = 3$$

et $f(3) = -3+4 = 1$

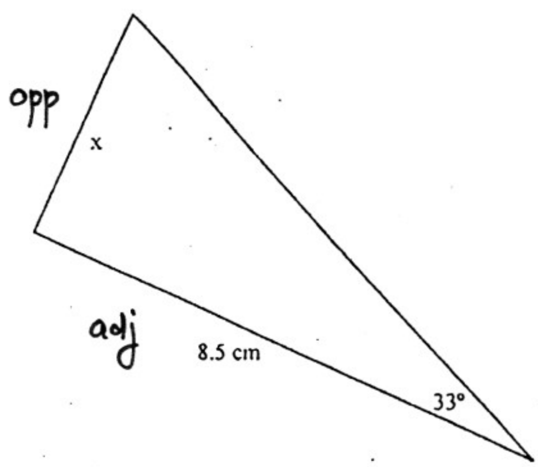
$(g(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1)$

$\Longrightarrow \underline{\underline{I(3;1)}}$

13) Simplifier l'expression $\frac{m}{4} \cdot (10m + 5) - \frac{m}{2} \cdot (m - 3)$

$$\frac{m}{4} \cdot (10m+5) - \frac{m}{2} \cdot (m-3)$$
$$= \frac{10m^2}{4} + \frac{5m}{4} - \left(\frac{m^2}{2} - \frac{3m}{2}\right)$$
$$= \frac{10m^2}{4} + \frac{5m}{4} - \frac{m^2}{2} + \frac{3m}{2}$$
$$= \frac{5m^2}{2} + \frac{5m}{4} - \frac{m^2}{2} + \frac{6m}{4}$$
$$= \frac{4m^2}{2} + \frac{11m}{4} = \underline{\underline{2m^2 + \frac{11m}{4}}}$$

14) Deux éléments du triangle rectangle ci-dessous sont donnés dans la figure. Il s'agit de calculer le segment désigné par x . Résultat arrondi au dixième de mm.



"tan opp adj":

$$\tan 33° = \frac{x}{8,5}$$

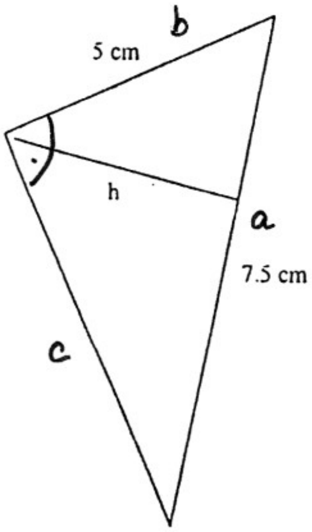
$$\Rightarrow x = 8,5 \cdot \tan 33°$$
$$= 8,5 \cdot 0,6494$$
$$= 5,51996 \text{ cm}$$

au dixième de mm près

$\Rightarrow$ au centième de cm près

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 5,52 \text{ cm}}}$$

15) Deux côtés du triangle rectangle ci-dessous sont donnés dans la figure. Il s'agit de calculer la longueur de la hauteur issue de l'angle droit, désignée par h . Résultat arrondi au dixième de mm.



On utilise tout d'abord le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle :

$a^2 = b^2 + c^2$

$7{,}5^2 = 5^2 + c^2$

$56{,}25 = 25 + c^2$

$\Rightarrow c^2 = 56{,}25 - 25 = 31{,}25$

$\Rightarrow c = \sqrt{31{,}25} = 5{,}59017$ cm

On calcule l'aire du triangle rectangle de 2 manières différentes :

1) aire $= \frac{5{,}59017 \cdot 5}{2} = 13{,}97542$

2) aire $= \frac{7{,}5 \cdot h}{2}$

Ainsi, on doit avoir $\frac{7{,}5 \cdot h}{2} = 13{,}97542 \quad | \cdot 2$

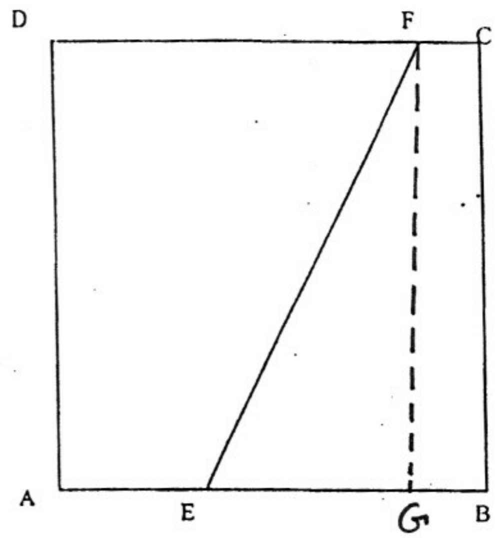
$7{,}5 \cdot h = 27{,}95085 \quad | :7{,}5$

$h = 3{,}72678$ cm.

Au dixième de mm = au centième de cm.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{h = 3{,}73\text{cm}}}$

16) La figure ci-contre montre le carré ABCD avec le segment EF. Le point E se situe sur AB et la longueur de AE est le tiers de la longueur de AB.
Le point F se situe sur CD et la longueur de CF est le cinquième de la longueur de CD.
Calculer l'angle en E du triangle FEB.



Soit G le point de EG tel que BG = CF.
On va travailler dans le triangle rectangle EFG.
On a FG = CB = AB (puisque ABCD est un carré).
De plus EG = EB − CF.
Or $EB = \frac{2}{3} AB$ (puisque $AE = \frac{1}{3} AB$)
et $CF = \frac{1}{5} CD = \frac{1}{5} AB$ (puisque ABCD est un carré).
On utilise "tan opp adj" dans le triangle EFG :

$$\tan(\widehat{FEG}) = \frac{FG}{EG} = \frac{AB}{\frac{2}{3}AB - \frac{1}{5}AB}.$$

On a $\frac{2}{3} AB - \frac{1}{5} AB = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) AB = \left(\frac{10}{15} - \frac{3}{15}\right) AB = \frac{7}{15} AB.$

Ainsi $\tan(\widehat{FEG}) = \frac{AB}{\frac{7}{15} AB} = \frac{1}{7/15} = 1 : \frac{7}{15} = 1 \cdot \frac{15}{7} = \frac{15}{7}.$

Ainsi $\widehat{FEG} = \tan^{-1}\left(\frac{15}{7}\right) = \underline{\underline{64{,}98°}}$