EXAMEN DE MATURITÉ 2008
CORRIGÉ

Problème 1

a) On a $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{(x+d)^2}$.

f a une asymptote verticale en $x=-1$. Ainsi le dénominateur de f doit être nul si $x=-1$: $(-1+d)^2=0$, i.e. $-1+d=0$, i.e. $\underline{d=1}$.

f a une asymptote horizontale en $y=3$. Cette asymptote horizontale va correspondre au quotient du numérateur de f par son dénominateur.

On a $(x+d)^2 = x^2+2dx+d^2$.

Ainsi $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+2dx+d^2}$.

Effectuons la division:

$$\begin{array}{r|l} ax^2+bx+c & x^2+2dx+d^2 \\ \cline{2-2} -(ax^2+2adx+ad^2) & a \\ \cline{1-1} (b-2ad)x+c-ad^2 & \end{array}$$

On doit donc avoir $\underline{a=3}$.

On peut donc écrire $f(x) = \dfrac{3x^2+bx+c}{(x+1)^2}$.

Le graphe de f passe par l'origine, i.e. $f(0)=0$.

On a $f(0) = \dfrac{3.0^2+b.0+c}{(0+1)^2} = \dfrac{c}{1^2} = c$. Donc $\underline{c=0}$.

D'où $f(x) = \dfrac{3x^2+bx}{(x+1)^2}$.

f s'annule en $x=-4$, i.e. $f(-4)=0$.

On a $f(-4) = \dfrac{3.(-4)^2+b.(-4)}{(-4+1)^2} = \dfrac{3.16-4b}{3^2} = \dfrac{48-4b}{9}$.

On doit donc avoir :

$$\begin{array}{rl|l} \dfrac{48-4b}{9} &= 0 & \cdot 9 \\ 48-4b &= 0 & +4b \\ 4b &= 48 & :4 \\ \underline{b} &\underline{= 12} & \end{array}$$

Ainsi : $f(x) = \dfrac{3x^2+12x}{(x+1)^2}$.

b) $f(x)=\frac{u}{v}$ où $u=3x^2+12x$ et $v=(x+1)^2=x^2+2x+1$.

Ainsi $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. On a $u'=6x+12$ et $v'=2x+2=2(x+1)$.

Donc $f'(x)=\frac{(6x+12)(x+1)^2-(3x^2+12x)\cdot 2(x+1)}{((x+1)^2)^2}=$

$$=\frac{(6x+12)(x+1)^2+(-6x^2-24x)(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(6x+12)(x+1)-6x^2-24x}{(x+1)^3}=$$

$$=\frac{6x^2+6x+12x+12-6x^2-24x}{(x+1)^3}=\frac{-6x+12}{(x+1)^3}=\underline{\underline{\frac{6(2-x)}{(x+1)^3}}}.$$

c) On a $f(x)=\frac{3x^2+12x}{(x+1)^2}$.

<u>Domaine de définition:</u> Comme f est une fonction rationnelle (polynôme sur polynôme), il faut que le dénominateur soit différent de zéro, i.e. $(x+1)^2\neq 0$, i.e. $x+1\neq 0$, i.e. $x\neq -1$.

Ainsi $\underline{D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$

<u>Parité:</u> On a $f(-x)=\frac{3(-x)^2+12\cdot(-x)}{(-x+1)^2}=\frac{3x^2-12x}{(-x+1)^2}$.

Comme $f(-x)\neq f(x)$ et $f(-x)\neq -f(x)$, <u>f n'est ni paire ni impaire.</u>

<u>Periodicité:</u> Comme f ne contient pas de fonction trigonométrique, <u>f n'est pas périodique.</u>

<u>Intersections avec l'axe x:</u> On doit résoudre $f(x)=0$, i.e.

$\frac{3x^2+12x}{(x+1)^2}=0$	$\cdot(x+1)^2$
$3x^2+12x=0$	factorisation
$3x(x+4)=0$	$:3$
$x(x+4)=0$	

Un produit nul implique qu'un des facteurs est nul. Ainsi soit $x=0$, soit $x+4=0$, i.e. $x=-4$. Les <u>zéros de f sont donc $x=0$ et $x=-4$.</u>

<u>Intersections avec l'axe y:</u> On doit calculer $f(0)$. On a $f(0)=\frac{3\cdot 0^2+12\cdot 0}{(0+1)^2}=0$.

Ainsi <u>le graphe de f coupe l'axe y en $y=0$.</u>

<u>Tableau de signes:</u> Les zéros de f sont $x=0$ et $x=-4$. L'exclu est $x=-1$.

Le tableau de signes se présente comme suit:

x		-4		-1		0	
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

pour $x=-5$, $f(x)=\frac{3\cdot(-5)^2+12\cdot(-5)}{(-5+1)^2}=\frac{75-60}{4^2}>0$; pour $x=-0{,}5$, $f(x)=\frac{3\cdot(-0{,}5)^2+12\cdot(-0{,}5)}{(-0{,}5+1)^2}<0$;

pour $x=-2$, $f(x)=\frac{3\cdot(-2)^2+12\cdot(-2)}{(-2+1)^2}=\frac{12-24}{1^2}<0$; pour $x=1$, $f(x)=\frac{3\cdot 1^2+12\cdot 1}{(1+1)^2}>0$.

Asymptotes verticales: Comme $x=-1$ est un exclu, $x=-1$ est asymptote verticale.

Si $x \underset{<}{\longrightarrow} -1$, on prend $x=-1{,}000001$ et $f(x) = -9\cdot 10^{12} \longrightarrow -\infty$.

Si $x \underset{>}{\longrightarrow} -1$, on prend $x=-0{,}999999$ et $f(x) = -9\cdot 10^{12} \longrightarrow -\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$.

Asymptotes non verticales: Comme f est une fonction rationnelle, on effectue la division : on a $f(x) = \dfrac{3x^2+12x}{x^2+2x+1}$.

Ainsi:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+12x & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -(3x^2+6x+3) & 3 \\ \cline{1-1} 6x-3 & \end{array}$$

Donc : $y=3$ est asymptote horizontale.

On peut écrire $f(x) = 3 + \dfrac{6x-3}{x^2+2x+1}$.

Si $x \longrightarrow -\infty$, $\dfrac{6x-3}{x^2+2x+1} < 0$.

Si $x \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{6x-3}{x^2+2x+1} > 0$.

Donc f s'approche de $y=3$ au-dessous à $-\infty$ et au-dessus à $+\infty$.

Intersections avec l'asymptote horizontale: Comme $y=3$ est l'asymptote horizontale, on doit résoudre $f(x)=3$:

$$\begin{array}{rl|l} \dfrac{3x^2+12x}{x^2+2x+1} &= 3 & \cdot\,(x^2+2x+1) \\ 3x^2+12x &= 3(x^2+2x+1) & \text{distributivité} \\ 3x^2+12x &= 3x^2+6x+3 & -3x^2 \\ 12x &= 6x+3 & -6x \\ 6x &= 3 & :6 \\ x &= \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

Ainsi f coupe son asymptote horizontale $y=3$ en $x=\frac{1}{2}$.

Dérivée: D'après b), $f'(x) = \dfrac{6(2-x)}{(x+1)^3}$.

Points à tangente horizontale: On doit résoudre $f'(x)=0$:

$$\frac{6(2-x)}{(x+1)^3} = 0 \quad \Big| \cdot (x+1)^3$$

$$6(2-x) = 0 \quad \Big| : 6$$

$$2-x = 0 \quad \Big| +x$$

$$x = 2$$

Ainsi, le point à tangente horizontale de f (zéro de f') est $x=2$

Tableau de croissance: Le zéro de f' est $x=2$. L'exclu est $x=-1$. Le tableau de croissance se présente comme suit:

x		-1		2	
$f'(x)$	$-$	///	$+$		$-$
$f(x)$	↘	///	↗	max.	↘

pour $x=-2$, $f'(x) = \frac{6(2+2)}{(-2+1)^3} = \frac{24}{(-1)^3} < 0$;

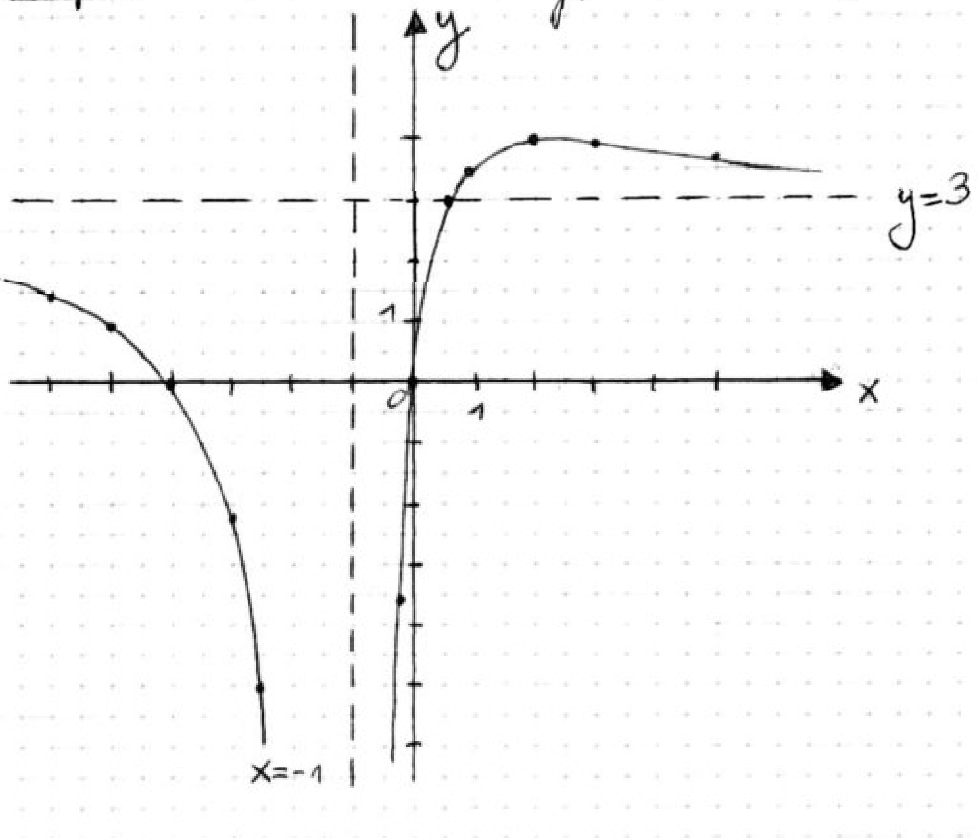
pour $x=0$, $f'(x) = \frac{6\cdot 2}{1^3} > 0$

pour $x=3$, $f'(x) = \frac{6(2-3)}{(3+1)^3} = \frac{-6}{4^3} < 0$.

On a $f(2) = \frac{3\cdot 2^2 + 12\cdot 2}{(2+1)^2} = \frac{12+24}{3^2} = \frac{36}{9} = 4$.

Ainsi $(2;4)$ est un maximum.

Graphe: En utilisant toutes les informations trouvées, on a:



x	$f(x)$
-5	0,94
-6	1,44
-3	$-2{,}25$
-2	-12
$-2{,}5$	-5
$-0{,}5$	-21
$-0{,}2$	$-3{,}56$
1	3,75
3	3,94
6	3,67

d) L'équation de t est de la forme $y = mx + h$, où $m = g'(e)$ $(T(e; f(e))$.

On a $g'(x) = \frac{1}{x}$ puisque $g(x) = \ln(x)$.

Ainsi $m = g'(e) = \frac{1}{e}$.

L'équation de t est donc : $y = \frac{1}{e}x + h$.

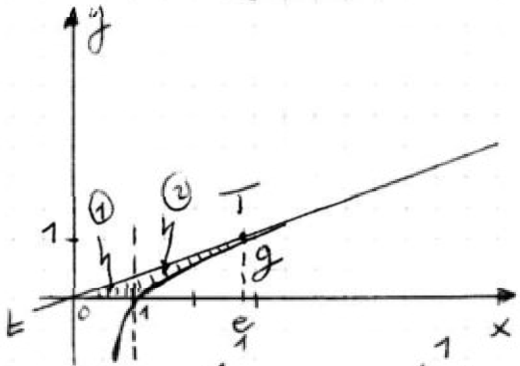
Comme $f(e) = \ln(e) = 1$. Ainsi t passe le point $T(e; 1)$.

Par substitution dans l'équation de t, on doit avoir :

$1 = \frac{1}{e} \cdot e + h$, i.e. $1 = 1 + h$, i.e. $h = 0$.

Ainsi t est : $\underline{\underline{y = \frac{1}{e}x}}$.

e)



On divise l'aire hachurée en 2 parties :

(1) l'aire entre $x = 0$ et $x = 1$

(2) l'aire entre $x = 1$ et $x = e$.

On a : $(1) = \int_0^1 t(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{e}x\,dx = \frac{1}{e}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{e}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 =$

$= \frac{1}{e}\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2e}$;

$(2) = \int_1^e \big(t(x) - g(x)\big)\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{e}x - \ln(x)\right)dx =$

$= \int_1^e \frac{1}{e}x\,dx - \int_1^e \ln(x)\,dx = \frac{1}{e}\int_1^e x\,dx - \int_1^e \ln(x)\,dx =$

$= \frac{1}{e}\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e - \left. x(\ln(x) - 1)\right|_1^e$ (voir "Formulaires et tables" p. 78)

$= \frac{1}{e}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - \Big(e(\ln(e) - 1) - 1(\ln(1) - 1)\Big) =$

$= \frac{1}{e}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \Big(e(1 - 1) - 1(0 - 1)\Big) = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1$.

Ainsi l'aire hachurée est $\frac{1}{2e} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1 = \underline{\underline{\frac{e}{2} - 1 \cong 0{,}359}}$.

Problème 2

On a $A(2;3;2)$, $B(-2;3;6)$, $C(6;-5;2)$ et $\Pi : 2x+y+2z-7=0$.

a) On sait que $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ est égal à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
Ainsi l'aire du triangle ABC sera, par exemple, $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$.
On a:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}6\\-5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-8\\0\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0-4\cdot(-8)\\4\cdot4-(-4)\cdot0\\-4\cdot(-8)-0\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\16\\32\end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{32^2+16^2+32^2}=\sqrt{1024+256+1024}=\sqrt{2304}=48.$$

Ainsi l'aire du triangle ABC est $\frac{48}{2}=\underline{\underline{24.}}$

b) μ est le plan contenant ABC et est de la forme $\mu : ax+by+cz+d=0$.
On sait que le vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est perpendiculaire à μ.
On sait aussi que $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.
Ainsi $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire à μ.
D'après a), on a $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}32\\16\\32\end{pmatrix}$.

Par division par 16, on peut dire que le vecteur $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est perpendiculaire à μ.
On peut prendre ce vecteur pour $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.
L'équation du plan μ est donc: $2x+y+2z+d=0$.
Pour trouver d, on utilise un des points du plan, par exemple $A(2;3;2)$.
Par substitution dans l'équation de μ, on doit avoir $2\cdot2+3+2\cdot2+d=0$, i.e.
$4+3+4+d=0$, i.e. $11+d=0$, i.e. $d=-11$.

Ainsi l'équation de μ est: $\underline{\underline{2x+y+2z-11=0.}}$

c) Un vecteur normal à Π est $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.
Un vecteur normal à μ est $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.
Comme ces vecteurs sont égaux, on en conclut que Π et μ sont des plans parallèles.
Comme $\Pi : 2x+y+2z-7=0$ et $\mu : 2x+y+2z-11=0$ et comme $-7\neq-11$, on en conclut que $\underline{\Pi \text{ et } \mu \text{ sont strictement parallèles.}}$

La plus courte distance qui les sépare sera donnée par la distance d'un point d'un

des plans à l'autre plan.
Ainsi la distance entre Π et μ (la plus courte distance entre Π et μ) est, par exemple, la distance de A (point de μ) à Π.
On a $A(2;3;2)$ et $\Pi: 2x+y+2z-7=0$.
En utilisant la formule de la distance d'un point à un plan, on obtient:

$$\text{distance de } \Pi \text{ à } \mu = \frac{|2\cdot 2+3+2\cdot 2-7|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|4+3+4-7|}{\sqrt{9}} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$$

d) L'angle entre une droite et un plan est donné par:

90° − l'angle entre un vecteur directeur de la droite et un vecteur normale du plan.

Un vecteur directeur de l'axe des x est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
Un vecteur normale de Π est $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.
L'angle entre ces 2 vecteurs (l'angle aigu) est donné par:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\|} = \frac{|1\cdot 2+0\cdot 1+0\cdot 2|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{1}\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

On obtient $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \cong 48{,}19°$.
Ainsi l'angle entre l'axe x et le plan Π est $90° - 48{,}19° = \underline{\underline{41{,}81°}}$.

e) Voir feuille annexe.
Pour représenter Π, on cherche ses intersections avec les axes:

intersection avec l'axe x: on a $y = z = 0$;
ainsi $2x-7=0$, i.e. $2x=7$, i.e. $x=3{,}5$;
donc $I_x(3{,}5;0;0)$;

intersection avec l'axe y: on a $x=z=0$,
ainsi $y-7=0$, i.e. $y=7$;
donc $I_y(0,7;0)$;

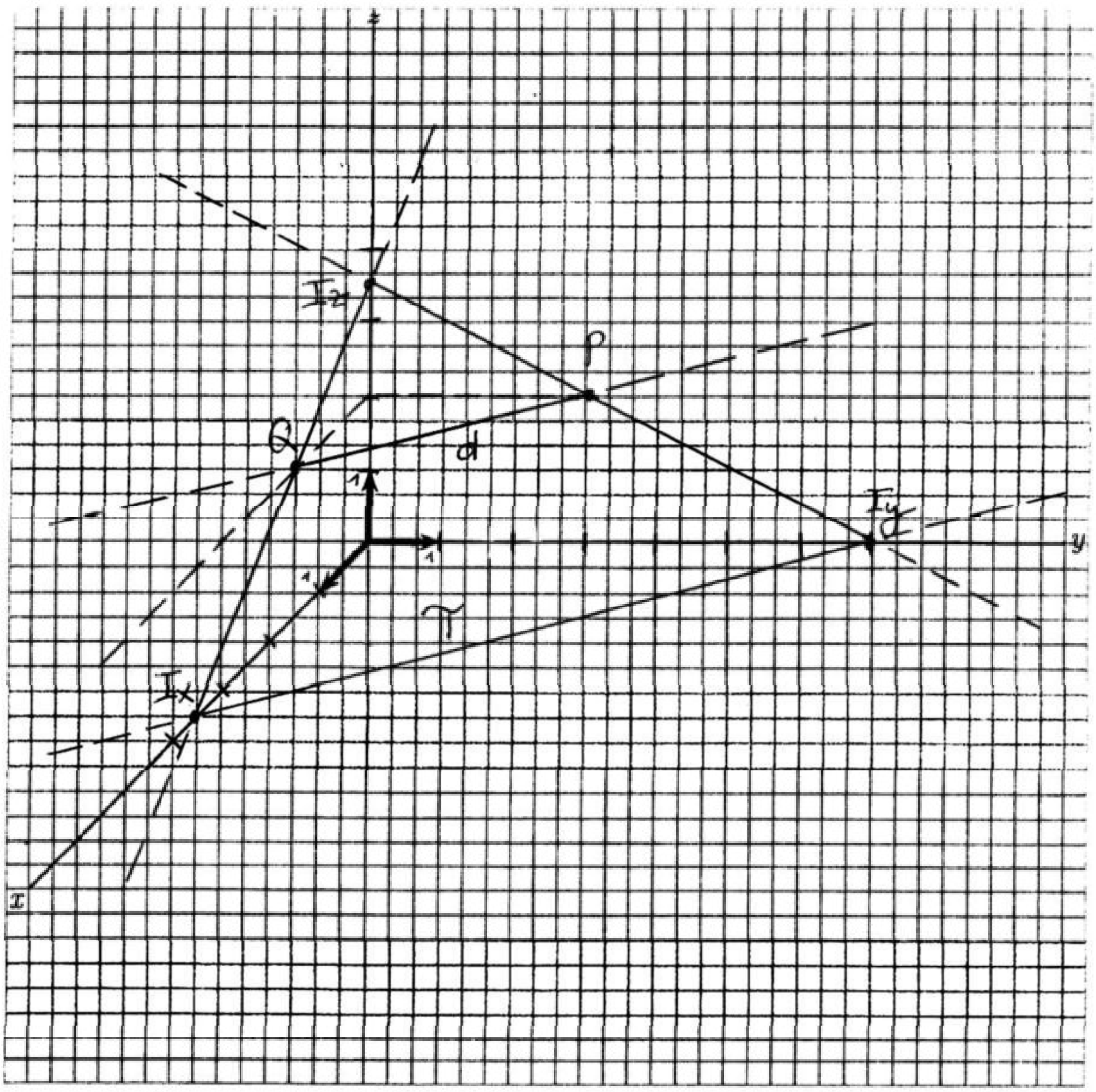
intersection avec l'axe z: on a $x=y=0$;
ainsi $2z-7=0$, i.e. $2z=7$, i.e. $z=3{,}5$,
donc $I_z(0;0;3{,}5)$

La droite d est dans Π et sa cote est 2.
Elle passe donc au point P de cote 2 de la trace dans le mur de Π et au point Q de cote 2 de la trace dans la paroi de Π.

LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITÉ
Mathématiques de niveau I
Session 2008

Annexe pour le problème 2



f) Cherchons les coordonnées de P et Q.

On a Π : $2x+y+2z-7=0$.

La trace dans le mur de Π revient à poser $x=0$.

On obtient $y+2z-7=0$.

Comme $z=2$ (cote 2), on obtient $y+4-7=0$, i.e. $y-3=0$, i.e. $y=3$.

Ainsi $P(0;3;2)$.

La trace dans la paroi de Π revient à poser $y=0$.

On obtient $2x+2z-7=0$.

Comme $z=2$ (cote 2), on obtient $2x+4-7=0$, i.e. $2x=3$, i.e. $x=1,5$.

Ainsi $Q(1,5;0;2)$

Un vecteur directeur de d est un vecteur parallèle à $\overrightarrow{PQ}$.

On a $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1,5\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5\\-3\\0\end{pmatrix}$.

Ce vecteur est parallèle à $\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix}$, qui est parallèle à $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

On va prendre ce dernier vecteur comme vecteur directeur de d.

Comme P est un point de d, on peut alors écrire des équations paramétriques de d :
$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=2. \end{cases}$$

g) Vérifions que D appartient à d :

$20=\lambda \Rightarrow \lambda=20$

$-37=3-2\lambda \Rightarrow 2\lambda=40 \Rightarrow \lambda=20$

$2=2$ ok.

$\Rightarrow$ D appartient à d

Vérifions que E appartient à d :

$-10=\lambda \Rightarrow \lambda=-10$

$23=3-2\lambda \Rightarrow 2\lambda=-20 \Rightarrow \lambda=-10$

$2=2$ ok

$\Rightarrow$ E appartient à d

h) La sphère S doit être centrée sur la droite d et tangente à la fois au mur et à la paroi.

Si $K(x;y;z)$ est le centre de la sphère, on doit avoir $\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=2 \end{cases}$ pour une certaine valeur de λ et $\text{dist}(K;\text{mur})=\text{dist}(K;\text{paroi})$.

L'équation du mur est $x=0$. L'équation de la paroi est $y=0$.

En utilisant la formule de calcul de la distance d'un point à un plan, on a :

$\text{dist}(K; \text{mur}) = \frac{|x|}{1} = |x|$ et $\text{dist}(K; \text{paroi}) = \frac{|y|}{1} = |y|$.

Comme $\text{dist}(K; \text{mur}) = \text{dist}(K; \text{paroi})$, on doit avoir $|x| = |y|$.

Ainsi, on a $z = 2$ et on doit trouver x et y tel que $x = \lambda$, $y = 3 - 2\lambda$ pour une certaine valeur de λ et $|x| = |y|$.

On doit donc avoir $|\lambda| = |3 - 2\lambda|$.

On a 2 possibilités :

1) $\lambda = 3 - 2\lambda \Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1$;

2) $\lambda = -(3 - 2\lambda) \Rightarrow \lambda = -3 + 2\lambda \Rightarrow -\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = 3$.

Si $\lambda = 1$, on a : $x = 1$, $y = 3 - 2\cdot 1 = 1$ et $z = 2$.

Si $\lambda = 3$, on a : $x = 3$, $y = 3 - 2\cdot 3 = -3$ et $z = 2$.

On a donc <u>2 sphères possibles</u> :

a) centre : $K(1; 1; 2)$ et rayon $= 1$;

b) centre : $K(3; -3; 2)$ et rayon $= 3$.

Les équations des sphères demandées sont :

a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$;

b) $\underline{\underline{(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 9}}$

Problème 3

a) La probabilité que le billet soit perdant est 100% − probabilité de gagner 5.− − probabilité de gagner 10.− − probabilité de gagner 300.− = $= 100\% - 10\% - 5\% - 1\% = \underline{84\%}$.

b) La probabilité qu'un billet permette de gagner 300.− est $p = \frac{1}{100}$.
La probabilité qu'un billet ne permette pas de gagner 300.− est $q = 1 - p = \frac{99}{100}$.
Pour calculer la probabilité que, parmi les 100 billets, il y ait exactement un billet permettant de gagner 300.−, on utilise la loi binomiale:

$$\binom{100}{1}\left(\frac{1}{100}\right)^1\left(\frac{99}{100}\right)^{99} \cong 100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}3697 = 0{,}3697 = \underline{\underline{36{,}97\%}}.$$

c) La probabilité qu'un billet soit gagnant est $p = 10\% + 5\% + 1\% = 16\% = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$.
La probabilité qu'un billet soit perdant est, selon la question a), $84\% = \frac{84}{100} = \frac{21}{25}$.
Pour calculer la probabilité que, parmi les 6 billets, 3 billets (la moitié) soient gagnant, on utilise la loi binomiale:

$$\binom{6}{3}\left(\frac{4}{25}\right)^3 \cdot \left(\frac{21}{25}\right)^3 = 20 \cdot 0{,}004096 \cdot 0{,}592704 \cong \underline{\underline{0{,}0486 = 4{,}86\%}}.$$

d) En achetant 2 billets, perdre de l'argent signifie que:
1) soit les 2 billets sont perdants;
2) soit le premier permet de gagner 5.− et le second est perdant;
3) soit le premier est perdant et le deuxième permet de gagner 5.−.
Toutes les autres possibilités permettent de rester dans ses fonds ou de faire un bénéfice.
1) probabilité $= \frac{84}{100} \cdot \frac{84}{100} = \frac{441}{625} = 0{,}7056$;
2) probabilité $= \frac{10}{100} \cdot \frac{84}{100} = \frac{21}{250} = 0{,}084$;
3) probabilité $= \frac{84}{100} \cdot \frac{10}{100} = 0{,}084$.

Ainsi, au total, la probabilité est $0{,}7056 + 0{,}084 \cdot 2 = \underline{\underline{0{,}8736 = 87{,}36\%}}$.

e) La séquence de gain/perte des billets de Sarah sera:
perdu − perdu − perdu − perdu − gagné.
La probabilité est donc $\left(\frac{84}{100}\right)^4 \cdot \left(\frac{16}{100}\right)^1 \cong 0{,}49787 \cdot 0{,}16 = \underline{\underline{0{,}0796 = 7{,}96\%}}$.

f) On va commencer par calculer le nombre de fois que David doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois le gros lot de 300.− soit supérieure à

80%.

On a : probabilité de gagner au moins une fois 300.- =

= 1 − probabilité de gagner zéro fois 300.-.

Si n est le nombre de fois que David joue, on a :

probabilité de gagner au moins une fois 300.- $= 1-\left(\frac{99}{100}\right)^n$.

Cherchons n pour lequel $1-\left(\frac{99}{100}\right)^n = 0{,}8$ (= 80%).

On a : $1-\left(\frac{99}{100}\right)^n = 0{,}8$	$+\left(\frac{99}{100}\right)^n$, $-0{,}8$
$\left(\frac{99}{100}\right)^n = 0{,}2$	on prend le log des 2 côtés
$\log\left[\left(\frac{99}{100}\right)^n\right] = \log(0{,}2)$	propriété du log
$n\log\left(\frac{99}{100}\right) = \log(0{,}2)$	$:\log\left(\frac{99}{100}\right)$
$n = \frac{\log(0{,}2)}{\log\left(\frac{99}{100}\right)} \cong 160{,}14$	

David va donc devoir jouer au moins 161 fois.

Il va donc dépenser, au minimum, $161\cdot 5 = \underline{\underline{805.-}}$.

g) On doit calculer une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, avec :

A = Sophie empoche le gros lot et B = le billet est gagnant.

On a : $A\cap B$ = Sophie empoche le gros lot et le billet est gagnant =

= le billet de Sophie est celui qui lui permet de gagner le gros lot ;

$p(A\cap B) = \frac{1}{100}$;

$p(B) = \frac{16}{100}$.

Ainsi $P(A|B) = \frac{1/100}{16/100} = \frac{1}{16} = \underline{\underline{0{,}0625 = 6{,}25\%}}$.