LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITÉ
Mathématiques de niveau I
Session 2008

Problème 1 (poids 2)

Première partie

On considère la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{(x+d)^2}$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

a) Le graphe de f présente une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 3$; de plus, f s'annule en $x = -4$ et son graphe passe par l'origine. Trouver a, b, c et d en justifiant chaque réponse.

On considère maintenant la fonction

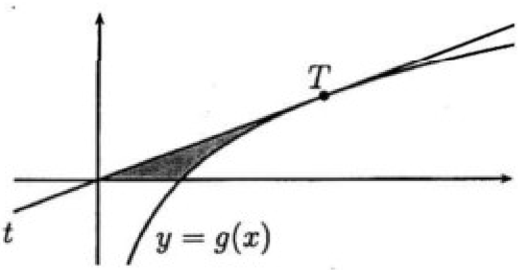
$$f : x \longmapsto y = \frac{3x^2 + 12x}{(x+1)^2}.$$

b) Montrer que la derivée de f est $f'(x) = \dfrac{6(2-x)}{(x+1)^3}$.

c) Etudier complètement la fonction f sans oublier de calculer les coordonnées des éventuels points d'intersection du graphe et de son asymptote horizontale.

Deuxième partie

Sur le graphique ci-dessous sont représentés le graphe de la fonction $g : x \mapsto y = \ln(x)$ et sa tangente t au point T d'abscisse e.



d) Trouver l'équation de la tangente t et vérifier que t passe par l'origine.

e) Calculer l'aire du domaine gris.

Problème 2 (poids 2)

On considère le triangle de sommets $A(2;3;2)$, $B(-2;3;6)$ et $C(6;-5;2)$, ainsi que le plan $\pi : 2x + y + 2z - 7 = 0$.

a) Calculer l'aire du triangle ABC.

b) Trouver une équation cartésienne du plan μ contenant le triangle ABC.

c) Expliquer pourquoi les plans μ et π sont strictement parallèles, puis calculer la plus courte distance qui les sépare.

d) Calculer l'angle aigu formé par l'axe des x et le plan π.

e) Avec deux couleurs différentes, représenter sur le quadrillage donné en annexe
  - le plan π
  - la droite d constituée des points de π dont la cote (hauteur) vaut 2.

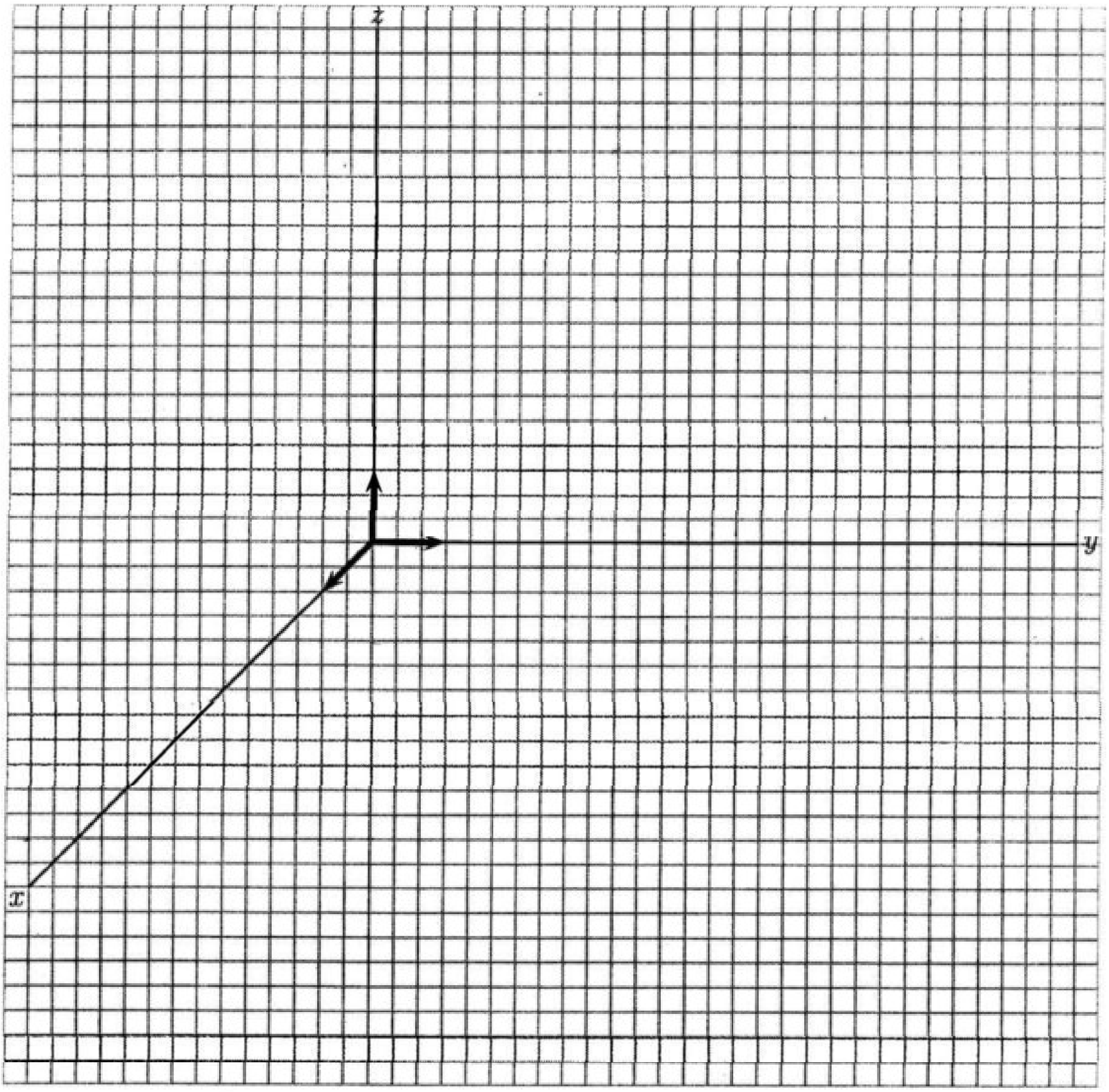
f) Trouver des équations paramétriques de la droite d.

g) Vérifier par calcul que la droite d passe par les points $D(20;-37;2)$ et $E(-10;23;2)$.

Si des équations paramétriques de d n'ont pas pu être trouvées au point f), considérer pour la suite la droite d qui passe par les points D et E donnés ci-dessus.

h) Trouver l'équation d'une sphère S centrée sur la droite d et qui est tangente à la fois au mur et à la paroi. Combien y a-t-il de sphères possibles ?

Annexe pour le problème 2



Problème 3 (poids 1)

Les billets d'une certaine loterie coûtent 5 francs. Pour chaque billet, les probabilités de gain sont données ci-dessous :

- la probabilité de gagner 5 francs vaut 10%,
- la probabilité de gagner 10 francs vaut 5%,
- la probabilité de gagner 300 francs vaut 1%.

Il y a donc trois types de billets gagnants mais quand on gagne 5 francs, on ne fait pas de bénéfice puisque on doit d'abord acheter le billet.

a) Calculer la probabilité qu'un billet soit perdant.

b) Blondie fait le raisonnement suivant : "Si j'ai une chance sur cent de gagner le gros lot avec un billet, je vais acheter 100 billets, ainsi je gagnerai à coup sûr". Ce raisonnement est évidemment faux, mais, parmi 100 billets, quelle est la probabilité d'en trouver exactement un faisant gagner 300 francs ?

c) Jules achète 6 billets. Quelle est la probabilité que la moitié de ses billets soient gagnants ?

d) Caroline achète 2 billets. Quelle est la probabilité qu'elle perde de l'argent ?

e) Sara décide d'acheter des billets jusqu'à ce qu'elle obtienne un billet gagnant. Quelle est la probabilité qu'elle doive acheter 5 billets ?

f) Calculer le montant minimal que David doit dépenser, s'il veut que la probabilité de gagner au moins une fois le gros lot de 300 francs soit supérieure à 80%.

g) Sophie achète un billet et découvre qu'il est gagnant. Quelle est la probabilité qu'elle empoche le gros lot ?