EXAMEN DE MATURITE 2008

Corrigé

Exercice 1

a) A résoudre: $y' + \frac{1}{x}y = \frac{5}{x^2}$, $x > 0$.
C'est une équation du type $y' + f(x)y = g(x)$ et on va appliquer la technique décrite dans Formulaires et Tables p. 84.
La solution générale de $y' + f(x)y = g(x)$ est la somme d'une solution particulière p de l'équation et de la solution générale de l'équation sans second membre $y' + f(x)y = 0$.
La solution générale de $y' + f(x)y = 0$ est $y = ce^{-F(x)}$, où F est une primitive de f et c une constante.
La solution particulière p peut être trouvée en posant $p(x) = c(x)e^{-F(x)}$, où $c(x)$ est à déterminer en remplaçant y par p dans $y' + f(x)y = g(x)$.

Ici, $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{5}{x^2}$.
Une primitive de f est $F(x) = \ln(|x|) = \ln(x)$ puisque $x > 0$.
La solution générale de $y' + \frac{1}{x}y = 0$ est donc $y = ce^{-\ln(x)} = ce^{\ln(\frac{1}{x})} =$
$= c \cdot \frac{1}{x}$, c étant une constante.
On pose $p(x) = c(x)e^{-\ln(x)} = c(x)e^{\ln(\frac{1}{x})} = c(x) \cdot \frac{1}{x}$.
On a $p'(x) = c'(x) \cdot \frac{1}{x} - c(x) \cdot \frac{1}{x^2}$.
Ainsi $y' + \frac{1}{x}y = \frac{5}{x^2} \Rightarrow p' + \frac{1}{x}p = \frac{5}{x^2} \Rightarrow c'(x) \cdot \frac{1}{x} - c(x) \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}c(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2}$
$\Rightarrow c'(x) \cdot \frac{1}{x} - c(x) \cdot \frac{1}{x^2} + c(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{5}{x^2} \Rightarrow c'(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2} \Rightarrow c'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x}$
$\Rightarrow c(x) = 5\ln(|x|) \Rightarrow c(x) = 5\ln(x) \quad (x > 0)$.
Une solution particulière de $y' + \frac{1}{x}y = \frac{5}{x^2}$ est donc $p(x) = 5\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{5\ln(x)}{x}$.

Par conséquent, la solution générale de $y' + \frac{1}{x}y = \frac{5}{x^2}$ est $y = \frac{c}{x} + \frac{5\ln(x)}{x} = \frac{5\ln(x) + c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$.

b) On a $f : x \mapsto y = \frac{5\ln(x) + 1}{x}$.

Domaine de définition: $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.
Zéros: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{5\ln(x)+1}{x} = 0 \Rightarrow 5\ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -\frac{1}{5} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{5}}$.

Asymptotes verticales: on doit étudier $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$: on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{5\ln(x)+1}{x} = \frac{-\infty}{0+} = -\infty$;

ainsi $x = 0$ est une asymptote verticale lorsque $x \underset{>}{\to} 0$.

Asymptote horizontales on doit étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5\ln(x)+1}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$;

cependant, $5\ln(x)+1$ perd vis-à-vis de x; ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;
donc $y = 0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

Dérivée: on a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 5\ln(x)+1$ et $v = x$; on a $u' = \frac{5}{x}$ et $v' = 1$ et,

donc, $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{5}{x} \cdot x - (5\ln(x)+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{5 - 5\ln(x) - 1}{x^2} =$
$= \frac{4 - 5\ln(x)}{x^2}$; son domaine est $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$.

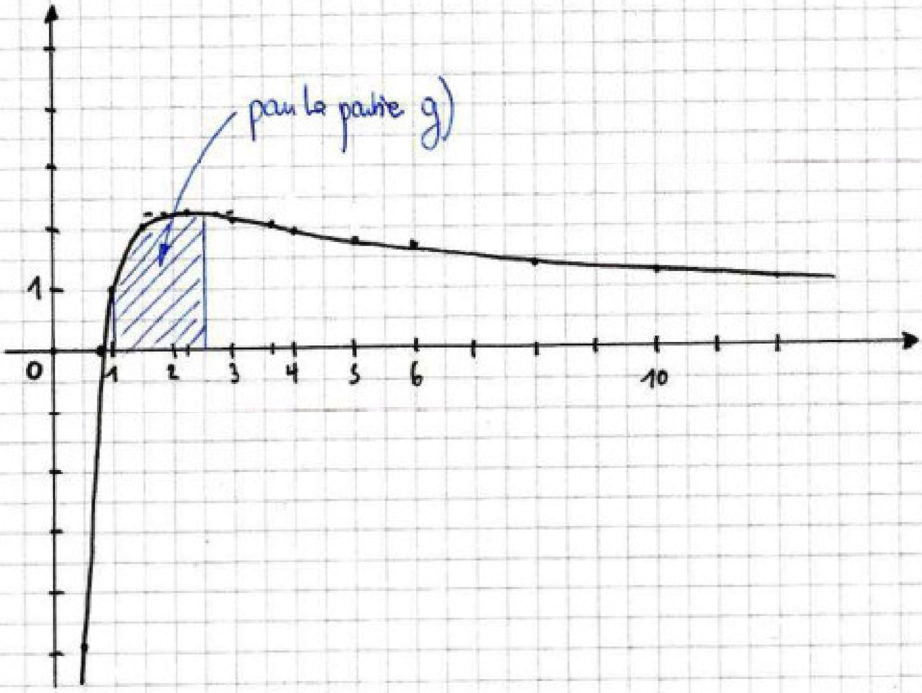
Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4-5\ln(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow 4 - 5\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = \frac{4}{5}$
$\Rightarrow x = e^{4/5}$; avec $x = e^{4/5}$, on a $f(x) = \frac{5\ln(e^{4/5})+1}{e^{4/5}} =$
$= (5 \cdot \frac{4}{5} + 1)e^{-4/5} = 5e^{-4/5}$; le point à tangente horizontale est $(e^{4/5}; 5e^{-4/5})$.

Deuxième dérivée: on a $f'(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 4 - 5\ln(x)$ et $v = x^2$; on a $u' = -\frac{5}{x}$ et $v' = 2x$

et, donc, $f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-\frac{5}{x} \cdot x^2 - (4 - 5\ln(x)) \cdot 2x}{(x^2)^2} =$
$= \frac{-5x - (4 - 5\ln(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-5 - 2(4 - 5\ln(x))}{x^3} = \frac{-5 - 8 + 10\ln(x)}{x^3} =$
$= \frac{10\ln(x) - 13}{x^3}$; son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}_+^*$.

Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{10\ln(x) - 13}{x^3} = 0 \Rightarrow 10\ln(x) - 13 = 0 \Rightarrow \ln(x) = \frac{13}{10}$
$\Rightarrow x = e^{13/10}$; avec $x = e^{13/10}$, on a $f(x) = \frac{5\ln(e^{13/10})+1}{e^{13/10}} =$
$= (5 \cdot \frac{13}{10} + 1)e^{-13/10} = \frac{15}{2}e^{-13/10}$; le point d'inflexion est $(e^{13/10}; \frac{15}{2}e^{-13/10})$.

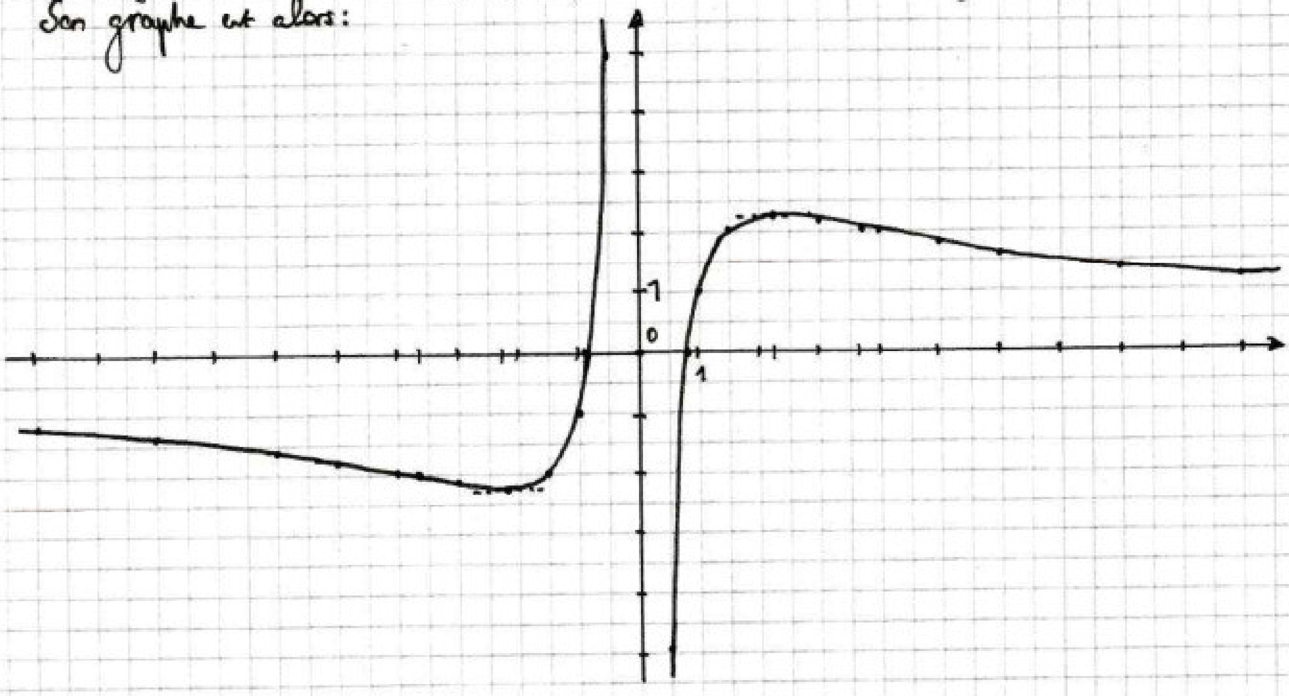
Graphe:



c) Avec $g(x) = \frac{5\ln(|x|)+1}{x}$, on a $g(-x) = \frac{5\ln(|-x|)+1}{-x} = -\frac{5\ln(|x|)+1}{x} = -g(x)$.

Ainsi $g(x)$ est impaire. Son graphe possède donc un centre de symétrie à l'origine.

Son graphe est alors:



d) On a $\int f(x)dx = \int \frac{5\ln(x)+1}{x}dx$. En posant $u = \ln(x)$, on a $u' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$.

Ainsi $\int f(x)dx = \int (5u+1)du = 5\frac{u^2}{2} + u + c = \frac{5}{2}(\ln(x))^2 + \ln(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Une primitive de $f(x)$ est donc $F(x) = \frac{5}{2}(\ln(x))^2 + \ln(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

On a alors $\int_1^e f(x)dx = F(e) - F(1) = \frac{5}{2}(\underbrace{\ln(e)}_{1})^2 + \underbrace{\ln(e)}_{1} + c - \left(\frac{5}{2}(\underbrace{\ln(1)}_{0})^2 + \underbrace{\ln(1)}_{0} + c\right) =$

$= \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$.

e) On a $\int_a^e f(x)dx = F(e)-F(a) = \frac{5}{2}(\underbrace{\ln(e)}_{1})^2 + \underbrace{\ln(e)}_{1} + c - \left(\frac{5}{2}(\ln(a))^2 + \ln(a) + c\right) =$

$= \frac{5}{2}+1-\frac{5}{2}(\ln(a))^2 - \ln(a) = -\frac{5}{2}(\ln(a))^2 - \ln(a) + \frac{7}{2}$.

Ainsi $\int_a^e f(x)\,dx = 0 \Rightarrow -\frac{5}{2}(\ln(a))^2 - \ln(a) + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 5(\ln(a))^2 + 2\ln(a) - 7 = 0$.

En posant $u = \ln(a)$, on obtient l'équation $5u^2+2u-7=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $Au^2+Bu+C=0$ avec $A=5$, $B=2$ et $C=-7$. On a $\Delta = B^2-4AC =$ $= 2^2-4\cdot5\cdot(-7) = 4+140 = 144$ et $\sqrt{\Delta} = 12$. Les solutions de $5u^2+2u-7=0$ sont alors $u_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-2+12}{2\cdot5} = \frac{10}{10} = 1$ et $u_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-2-12}{2\cdot5} = \frac{-14}{10} = -\frac{7}{5}$.

Avec $u_1 = 1$ et $u = \ln(a)$, on obtient $\ln(a) = 1 \Rightarrow a = e \cong 2{,}7183$.
Avec $u_2 = -\frac{7}{5}$ et $u = \ln(a)$, on obtient $\ln(a) = -\frac{7}{5} \Rightarrow a = e^{-7/5} \cong 0{,}2466$.
Puisqu'on cherche a compris entre 0 et 1, on obtient donc $a = e^{-7/5}$.

f) H sera une primitive de h si $H' = h$.
On a $H(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = A\ln^2(x) + B\ln(x) + C$ et $v = x$.
Comme $u' = 2A\ln(x)\cdot\frac{1}{x} + B\cdot\frac{1}{x}$ et $v' = 1$, on a :

$$H'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{\left(2A\ln(x)\cdot\frac{1}{x}+B\cdot\frac{1}{x}\right)x - \left(A\ln^2(x)+B\ln(x)+C\right)\cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{2A\ln(x)+B-A\ln^2(x)-B\ln(x)-C}{x^2} = \frac{-A\ln^2(x)+(2A-B)\ln(x)+B-C}{x^2}$$

Comme on veut $H'(x) = h(x) = \frac{25\ln^2(x)+10\ln(x)+1}{x^2}$, on doit avoir, par identification des termes :
$$\begin{cases} -A = 25 \\ 2A-B = 10 \\ B-C = 1. \end{cases}$$

On en déduit que $A = -25$, $B = 2A-10 = -50-10 = -60$ et $C = B-1 = -60-1 = -61$.
Ainsi $A = -25$, $B = -60$ et $C = -61$.

g) D'après Formulaires et Tables p. 82, le volume engendré par la surface en question est $V = \pi\int_1^b (f(x))^2\,dx$.

D'après f), une primitive de $(f(x))^2 = h(x)$ est $H(x) = \frac{-25\ln^2(x)-60\ln(x)-61}{x}$. $\ln(1)=0$

On a ainsi $V = \pi\left(H(b)-H(1)\right) = \pi\left(\frac{-25\ln^2(b)-60\ln(b)-61}{b} - \frac{-25\ln^2(1)-60\ln(1)-61}{1}\right) =$

$= \pi\left(\frac{-25\ln^2(b)-60\ln(b)-61}{b} + 61\right)$.

Si $b = e$, on a $\ln(b) = \ln(e) = 1$ et le volume vaut alors:

$$V = \pi\left(\frac{-25-60-61}{e}+61\right) = \pi\left(61-\frac{146}{e}\right) \cong 7,2896\,\pi \cong 22,901.$$

h) D'après g), on a $V = \pi\left(\frac{-25\ln^2(b)-60\ln(b)-61}{b}+61\right)$.

Comme $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{-25\ln^2(b)-60\ln(b)-61}{b}\right) = 0$ puisque $(-25\ln^2(b)-60\ln(b)-61)$ perd vis-à-vis de b, on obtient $\lim\limits_{b\to+\infty} V = \pi(0+61) = 61\pi \cong 191,637$.

Exercice 2

a) On a, dans la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\3/5\\4/5\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

3 vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ forment une base orthonormée si $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ (autrement dit $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires 2 à 2) et si $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|=1$.

On va prendre $\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\3/5\\4/5\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4/5\\-3/5\end{pmatrix}$.

On a $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\3/5\\4/5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0$. Par définition du produit vectoriel, on a $\vec{c}\perp\vec{a}$ et $\vec{b}\perp\vec{c}$. Ainsi $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

En outre, $\|\vec{a}\|=\sqrt{0^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}=1$, $\|\vec{b}\|=1$ et $\|\vec{c}\|=\sqrt{0^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{9}{25}}=1$.

Ainsi, $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\3/5\\4/5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\4/5\\-3/5\end{pmatrix}$ constituent une base orthonormée.

b) On a : $\vec{a}=\frac{3}{5}\vec{u_2}+\frac{4}{5}\vec{u_3}$, $\vec{b}=\vec{u_1}$ et $\vec{c}=\frac{4}{5}\vec{u_2}-\frac{3}{5}\vec{u_3}$.

Ainsi, $\vec{u_1}=\vec{b}$.

De plus, $3\vec{a}+4\vec{c}=\left(\frac{9}{5}+\frac{16}{5}\right)\vec{u_2}=5\vec{u_2}$, d'où $\vec{u_2}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{c}$.

Finalement $\vec{u_3}=\frac{5}{4}\left(\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{u_2}\right)=\frac{5}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{u_2}=\frac{5}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{c}\right)=$
$=\frac{5}{4}\vec{a}-\frac{9}{20}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{c}=\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{c}$.

On a donc $\vec{u_1}=\vec{b}$, $\vec{u_2}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{c}$ et $\vec{u_3}=\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{c}$.

c) Dans la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$, la matrice de f, symétrie axiale dont l'axe est donné par le vecteur $\vec{a}$ est :
$$A'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

d) La matrice de passage de la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ à la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ est
$P_1=\begin{pmatrix}0&3/5&4/5\\1&0&0\\0&4/5&-3/5\end{pmatrix}$. La matrice de passage de la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ à la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ est $P_2=P_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\3/5&0&4/5\\4/5&0&-3/5\end{pmatrix}$.

La matrice de f relativement à la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ est alors donnée par
$$A=P_2A'P_1=P_1^{-1}A'P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\3/5&0&4/5\\4/5&0&-3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3/5&4/5\\1&0&0\\0&4/5&-3/5\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\3/5&0&4/5\\4/5&0&-3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3/5&4/5\\-1&0&0\\0&-4/5&3/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-7/25&24/25\\0&24/25&7/25\end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de f, relativement à la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ est $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-7/25&24/25\\0&24/25&7/25\end{pmatrix}$.

e) Dans la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$, on a $B=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25&0&0\\0&9&k\\0&k&16\end{pmatrix}$ et $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\3/5\\4/5\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$.

$\vec{a}$ sera valeur propre de B s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $B\vec{a}=\lambda\vec{a}$.

$$B\vec{a}=\lambda\vec{a} \Rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25&0&0\\0&9&k\\0&k&16\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}=\lambda\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25&0&0\\0&9&k\\0&k&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix}0\\27+4k\\3k+64\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\lambda\\4\lambda\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}27+4k=75\lambda \xrightarrow{\cdot 4} 108+16k=300\lambda\\ 3k+64=100\lambda \xrightarrow{\cdot(-3)} -192-9k=-300\lambda\end{cases} \xrightarrow{+} -84+7k=0$$

$$\Rightarrow 7k=84 \Rightarrow k=12.$$

Avec $k=12$, on a $75\lambda=27+4k=27+48=75 \Rightarrow \lambda=1$.

Ainsi, $\vec{a}$ est vecteur propre de B si $k=12$ et la valeur propre correspondante est $\lambda=1$.

f) On a $B=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25&0&0\\0&9&12\\0&12&16\end{pmatrix}$.

D'après e), on sait que $\lambda_1=1$ est une valeur propre de B et que le vecteur propre associé est $\vec{a}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de B sont les solutions de l'équation $\det(B-\lambda I)=0$.

$$\det(B-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&\frac{9}{25}-\lambda&\frac{12}{25}\\0&\frac{12}{25}&\frac{16}{25}-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left(\frac{9}{25}-\lambda\right)\left(\frac{16}{25}-\lambda\right)-(1-\lambda)\frac{12}{25}\cdot\frac{12}{25}=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\left(\left(\frac{9}{25}-\lambda\right)\left(\frac{16}{25}-\lambda\right)-\frac{144}{625}\right)=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\left(\frac{144}{625}-\frac{9}{25}\lambda-\frac{16}{25}\lambda+\lambda^2-\frac{144}{625}\right)=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda(1-\lambda)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1 \text{ et } \lambda_2=0.$$

Avec $\lambda_1=1$, on a $B\vec{v}=\lambda_1\vec{v} \Rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25&0&0\\0&9&12\\0&12&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}25v_1=25v_1\\9v_2+12v_3=25v_2\\12v_2+16v_3=25v_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}12v_3=16v_2\\12v_2=9v_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_3=\frac{4}{3}v_2\\v_3=\frac{4}{3}v_2\end{cases} \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\frac{4}{3}v_2\end{pmatrix};$$

en posant $v_1=1$ et $v_2=0$, on obtient le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{u_1}$; en posant $v_1=0$ et $v_2=\frac{3}{5}$, on obtient le vecteur $\begin{pmatrix}0\\3/5\\4/5\end{pmatrix}=\vec{a}$.

Avec $\lambda_2=0$, on a $B\vec{v}=\lambda_2\vec{v} \Rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25&0&0\\0&9&12\\0&12&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}25v_1=0\\9v_2+12v_3=0\\12v_2+16v_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_1=0\\v_2=\frac{-4}{3}v_3\end{cases}$$; en posant $v_3=\frac{-3}{5}$, on obtient le vecteur

$\begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} = \vec{c}$ (voir a)).

Ainsi, $\lambda_1 = 1$ est une valeur propre et les vecteurs propres associés sont $\vec{a}$ et $\vec{u_1}$, et $\lambda_2 = 0$ est l'autre valeur propre de vecteur propre associé $\vec{c}$.

Comme $\vec{c} \perp \vec{a}$ et $\vec{c} \perp \vec{u_1} = \vec{b}$ (puisque $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, voir a)) et comme $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$, on en déduit que g est la projection orthogonale sur le plan parallèle à $\vec{a}$ et $\vec{u_1}$ et contenant l'origine.

g) D'après c), la matrice de f dans la base $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

D'après f), la matrice de g dans la base $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ peut s'écrire $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $A'B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que

$\vec{a}$ est un vecteur 1-propre de $f \circ g$, $\vec{b}$ un vecteur -1-propre et $\vec{c}$ un vecteur 0-propre.

Exercice 3

Partie 1

Un point fixe de f est un $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = z$.

$f(z) = z \Rightarrow az + 17 - a^2 = z \Rightarrow (a-1)z + 17 - a^2 = 0$.

Avec $z = 6i$, on obtient $(a-1)6i + 17 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 6ia - 17 + 6i = 0$.

C'est une équation du 2e degré de la forme $Aa^2 + Ba + C = 0$, avec $A = 1$, $B = -6i$ et $C = -17 + 6i$.

On a $\Delta = B^2 - 4AC = (-6i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17+6i) = 36i^2 + 68 - 24i = -36 + 68 - 24i = 32 - 24i$.

On doit calculer $\sqrt{\Delta}$.

On a $\Delta = r \operatorname{cis}(\varphi)$ où $r = \sqrt{32^2 + (-24)^2} = \sqrt{1024 + 576} = \sqrt{1600} = 40$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{-24}{32}\right) =$
$= \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) \cong -36{,}87°$. On aura alors les 2 racines suivantes:

$w_1 = \sqrt{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{40} \operatorname{cis}(-18{,}435°) = \sqrt{40}\left(\cos(-18{,}435°) + i \sin(-18{,}435°)\right) = 6 - 2i$ et

$w_2 = \sqrt{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\right) = \sqrt{40} \operatorname{cis}(161{,}565°) = \sqrt{40}\left(\cos(161{,}565°) + i \sin(161{,}565°)\right) = -6 + 2i = -w_1$.

On peut alors prendre $\sqrt{\Delta} = 6 - 2i$.

Les solutions de $a^2 - 6ia - 17 + 6i = 0$ sont alors $a_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{6i + 6 - 2i}{2} = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i$ et
$a_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{6i - 6 + 2i}{2} = \frac{8i - 6}{2} = -3 + 4i$.

Ainsi, $6i$ sera un point fixe de f si $a = 3 + 2i$ ou $a = -3 + 4i$.

Partie 2

On a $g : z \longmapsto w = g(z) = i - \frac{2}{z}$, $z \neq 0$.

a) Avec $z = x + iy$, on a $w = g(z) = i - \frac{2}{z} = i - \frac{2}{x+iy} = i - \frac{2(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} =$
$= i - \frac{2(x-iy)}{x^2 - (iy)^2} = i - \frac{2x - 2yi}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)i - 2x + 2yi}{x^2+y^2} = -\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2+2y}{x^2+y^2} i$.

En posant $w = u + iv$, on a alors $u = -\frac{2x}{x^2+y^2}$ et $v = \frac{x^2+y^2+2y}{x^2+y^2}$.

b) $w = g(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \frac{x^2+y^2+2y}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0$
$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$.

Ainsi, les z tels que $g(z) \in \mathbb{R}$ forment un cercle de rayon 1 centré en $(0;-1)$, autrement dit un cercle centré en $-i$ et de rayon 1.

c) Un point quelconque de la droite $y = 1$ est donné par $z = x + i$.

D'après a) avec $y = 1$, on a $u = -\frac{2x}{x^2+1}$ et $v = \frac{x^2+1+2}{x^2+1} = \frac{x^2+3}{x^2+1}$.

On a alors $u^2 + (v-2)^2 = \left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x^2+3}{x^2+1} - 2\right)^2 = \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} + \left(\frac{x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}\right)^2 =$

$= \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} + \left(\frac{-x^2+1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{(-x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = 1 = 1^2$.

Ainsi, l'image est bien un cercle centré en $(0;2)$ et de rayon 1.

Exercice 4

a) $p = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{24}{10'000} = 0{,}0024 = 0{,}24\%$.

b) Il faut multiplier la réponse de a) (qui tient compte de l'ordre) par le nombre de possibilités de permuter 4 éléments, à savoir 4! : $p = 4! \cdot \frac{24}{10'000} = 24 \cdot \frac{24}{10'000} = \frac{576}{10'000} = 0{,}0576 =$
$= 5{,}76\%$.

c) La probabilité d'obtenir au moins 1 as est 1 − la probabilité d'obtenir zéro as.
Comme, en tirant une carte, la probabilité d'obtenir zéro as, autrement dit d'obtenir autre chose qu'un as est $\frac{9}{10}$, la probabilité d'obtenir au moins 1 as est $1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} =$
$= 1 - \frac{6561}{10'000} = \frac{3439}{10'000} = 0{,}3439 = 34{,}39\%$.

d) Sur $n \times 4$ tirages, la probabilité d'obtenir au moins 1 as $= 1 -$ la probabilité d'obtenir zéro as $=$
$= 1 - \left(\left(\frac{9}{10}\right)^4\right)^n = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{4n}$
On doit donc trouver n tel que $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{4n} > 98\% = 0{,}98$.
$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{4n} > 0{,}98 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{4n} < 0{,}02$.
Comme le log est une fonction croissante $(x < y \Rightarrow \log(x) < \log(y))$, on obtient
$\log\left(\left(\frac{9}{10}\right)^{4n}\right) < \log(0{,}02)$.
Avec la propriété du log : $\log(x^n) = n\log(x)$, on obtient $4n\log\left(\frac{9}{10}\right) < \log(0{,}02)$.
Comme $\log\left(\frac{9}{10}\right) < 0$, on obtient $4n > \frac{\log(0{,}02)}{\log(9/10)} \cong 37{,}13 \Rightarrow n > 9{,}28$.

Il faut donc tirer au minimum 10 fois 4 cartes.

e) $p(1000.-) = p(4\text{as}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10'000} = 0{,}0001 = 0{,}01\%$.
$p(50.-) = p(3\text{as}) = p(3\text{as parmi 4 cartes}) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{4-3} = 4 \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{9}{10} =$
$= \frac{36}{10'000} = 0{,}0036 = 0{,}36\%$.
$p(5.-) = p(2\text{as parmi 4 cartes}) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100} = \frac{486}{10'000} = 0{,}0486 =$
$= 4{,}86\%$.
$p(1.-) = p(1\text{as parmi 4 cartes}) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{4-1} = 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{729}{1000} = \frac{2916}{10'000} = 0{,}2916 =$
$= 29{,}16\%$.

f) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Ici : A = avoir encaissé 1.− et B = on a obtenu un gain.
On a : $A \cap B =$ avoir gagné 1.−, $P(A \cap B) = 0{,}2916$ (voir e)) et
$P(B) = P(1000.-) + P(50.-) + P(5.-) + P(1.-) = 0{,}0001 + 0{,}0036 + 0{,}0486 + 0{,}2916$
$= 0{,}3439$.

Ainsi $P(A|B) = \frac{0{,}2916}{0{,}3439} = 0{,}8479 = 84{,}79\%$.

g) Espérance de gain $= 1000 \cdot p(1000) + 50 \cdot p(50) + 5 \cdot p(5) + 1 \cdot p(1) + 0 \cdot p(0) =$
$= 1000 \cdot 0{,}0001 + 50 \cdot 0{,}0036 + 5 \cdot 0{,}0486 + 1 \cdot 0{,}3439 =$
$= 0{,}1 + 0{,}18 + 0{,}243 + 0{,}3439 = 0{,}8659$.

Ainsi, en jouant 1.–, on peut gagner en moyenne 0,8659 frs.
Ce n'est donc pas intéressant.