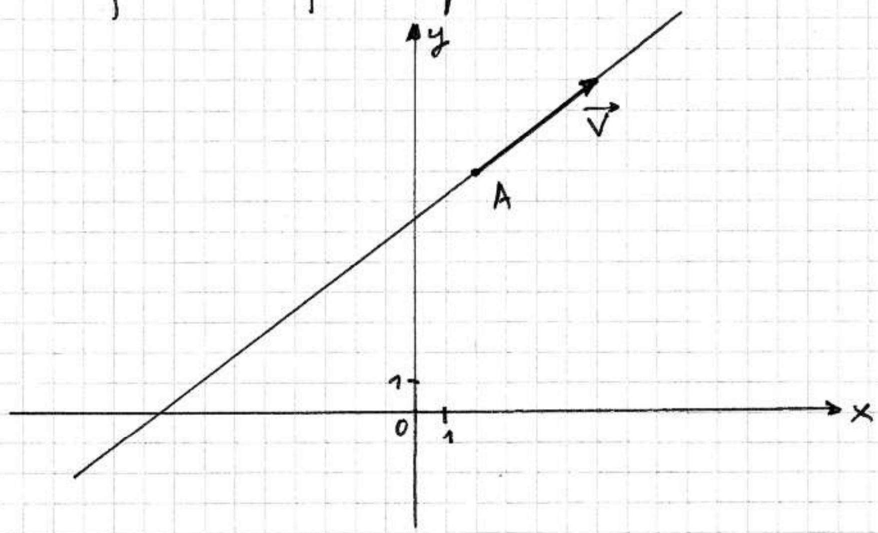
Lycée Jean-Piaget
Neuchâtel

Mathématiques

Examen de maturité 2008
Corrigé

Exercice A

1. Le centre du cercle $\mathcal{C}$ est $K(x_0;5)$ et son rayon est $r=\sqrt{100}=10$.
On ne peut donc représenter que la droite d :



2. Comme d passe par $A(2;8)$ et a $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, ses équations paramétriques sont : $\begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = 8+3\lambda \end{cases}$.
On a alors $3x-4y = 3\cdot2-4\cdot8 = -26 \Rightarrow 3x-4y+26=0$ équation cartésienne de d.

3. La droite d est tangente au cercle $\mathcal{C}$ si $\text{dist}(K;d)=r$ (rayon du cercle).
Avec $K(x_0;5)$, $d: 3x-4y+26=0$ et $r=10$, on obtient :
$$\frac{|3\cdot x_0-4\cdot5+26|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3x_0+6|}{5} = 10 \Rightarrow |3x_0+6| = 50$$
$\Rightarrow$ soit $3x_0+6=50 \Rightarrow 3x_0=44 \Rightarrow x_0=\frac{44}{3}$,
soit $3x_0+6=-50 \Rightarrow 3x_0=-56 \Rightarrow x_0=-\frac{56}{3}$.
Comme on veut $x_0>0$, on obtient donc $x_0=\frac{44}{3}$.

4. Le point de tangence T est tel que la droite d' passant par K et T est perpendiculaire à d. On sait que $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. $\vec{v}$ est donc un vecteur normal à d'. Ainsi l'équation cartésienne de d' s'écrit $4x+3y+c=0$. Avec $K\left(\frac{44}{3};5\right)$, on obtient $4\cdot\frac{44}{3}+3\cdot5+c=0 \Rightarrow c=-\frac{176}{3}-15=-\frac{221}{3}$. Ainsi l'équation cartésienne de d' est $4x+3y-\frac{221}{3}=0 \Rightarrow 12x+9y-221=0$.

T est l'intersection de d et d'. Autrement dit les coordonnées x et y de T sont solutions du système

$$\begin{cases} 3x-4y+26=0 & \xrightarrow{\cdot 9} & 27x-36y+234=0 \\ 12x+9y-221=0 & \xrightarrow{\cdot 4} & 48x+36y-884=0 \end{cases}$$

$$75x - 575 = 0$$

$$\Rightarrow 75x = 575 \Rightarrow x = \frac{23}{3}$$

$\Rightarrow 4y = 3x+26 = 3\cdot\frac{23}{3}+26 = 23+26 = 49.$

On a ainsi $T\left(\frac{23}{3} ; 49\right)$.

5) L'angle α entre $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{AK}$ est donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{AK}}{\|\overrightarrow{OK}\|\cdot\|\overrightarrow{AK}\|}$.

On a $\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 44/3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{OK}\| = \sqrt{\left(\frac{44}{3}\right)^2+5^2} = \sqrt{\frac{2161}{9}} = \frac{\sqrt{2161}}{3}$,

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 44/3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38/3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{AK}\| = \sqrt{\left(\frac{38}{3}\right)^2+(-3)^2} =$

$= \sqrt{\frac{1525}{9}} = \frac{\sqrt{1525}}{3}$.

De plus, $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 44/3 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 38/3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{44}{3}\cdot\frac{38}{3} + 5\cdot(-3) = \frac{1672}{9} - 15 = \frac{1537}{9}$.

Ainsi, $\cos(\alpha) = \dfrac{1537/9}{\frac{\sqrt{2161}}{3}\cdot\frac{\sqrt{1525}}{3}} = \dfrac{1537}{\sqrt{2161}\cdot\sqrt{1525}} \cong \dfrac{1537}{1815,36} \cong 0,847 \Rightarrow \alpha \cong 32,15°$.

L'angle entre $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{AK}$ est donc $\sim 32,15°$.

Exercice B

1. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

On a $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\k-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\k+1\end{pmatrix}=5\cdot(-2)+(k-2)\cdot(k+1)=-10+k^2+k-2k-2=$
$=k^2-k-12$.

$k^2-k-12=0 \Rightarrow k=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{1\pm7}{2}=\begin{cases}4\\-3\end{cases}$.

Ainsi, si $k=-3$ ou 4, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

2. L'aire du parallélogramme construit par $\vec{c}$ et $\vec{d}$ est $|\det(\vec{c};\vec{d})|$. On doit donc avoir $|\det(\vec{c};\vec{d})|=12$.

On a $\det(\vec{c};\vec{d})=\begin{vmatrix}2\lambda & -4\\ -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=2\lambda(\lambda-1)-3\cdot(-4)=2\lambda^2-2\lambda+12$.

$|\det(\vec{c};\vec{d})|=12 \Rightarrow |2\lambda^2-2\lambda+12|=12$

$\Rightarrow$ soit $2\lambda^2-2\lambda+12=12 \Rightarrow 2\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0$
$\Rightarrow \lambda=0$ ou $\lambda=1$,

soit $2\lambda^2-2\lambda+12=-12 \Rightarrow 2\lambda^2-2\lambda+24=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda+12=0$, ce qui n'a pas de solution car $(-1)^2-4\cdot1\cdot12<0$.

Ainsi, si $\lambda=0$ ou 1, l'aire du parallélogramme vaut 12.

3. Si on nomme Q le point $(6;0)$, on a $\vec{v}=\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}x\\\sqrt{x}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-6\\\sqrt{x}\end{pmatrix}$.

Alors, $\|\vec{v}\|=\sqrt{(x-6)^2+(\sqrt{x})^2}=\sqrt{x^2-12x+36+x}=\sqrt{x^2-11x+36}$.

On cherche x tel que $\|\vec{v}\|$ soit minimale.

Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x^2-16x+36}$. On a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-16x+36}}\cdot(2x-16)=\dfrac{2x-16}{2\sqrt{x^2-16x+36}}=$
$=\dfrac{x-8}{\sqrt{x^2-16x+36}}$. Ainsi $f'(x)=0 \Rightarrow x-8=0 \Rightarrow x=8$.

Tableau de croissance:

x		8	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ainsi f, et donc $\|\vec{v}\|$, sont minimales en $x=8$.
Les coordonnées de P sont alors $(8;\sqrt{8})=(8;2\sqrt{2})$.

Exercice C

On a $f(x) = \dfrac{ax+3}{x+3}$

1. $P(5;6)$: $x=5$, $f(x)=6 \Rightarrow 6 = \dfrac{5a+3}{5+3} \Rightarrow 5a+3 = 48 \Rightarrow 5a = 45 \Rightarrow a = 9$.
   Ainsi, si $a=9$, $P(5;6)$ appartient au graphe de f.

2. Pour que $y=-3$ soit asymptote horizontale de f, il faut que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -3$.
   On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax+3}{x+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(a+\frac{3}{x})}{x(1+\frac{3}{x})} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a+\frac{3}{x}}{1+\frac{3}{x}} = \dfrac{a}{1} = a$.
   Ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -3 \Rightarrow a = -3$.

   Donc, si $a=-3$, $y=-3$ est asymptote horizontale de f.

3. La pente de la tangente au graphe de f en $x=3$ est $m = f'(3)$.
   On doit donc avoir $f'(3) = \dfrac{1}{3}$.

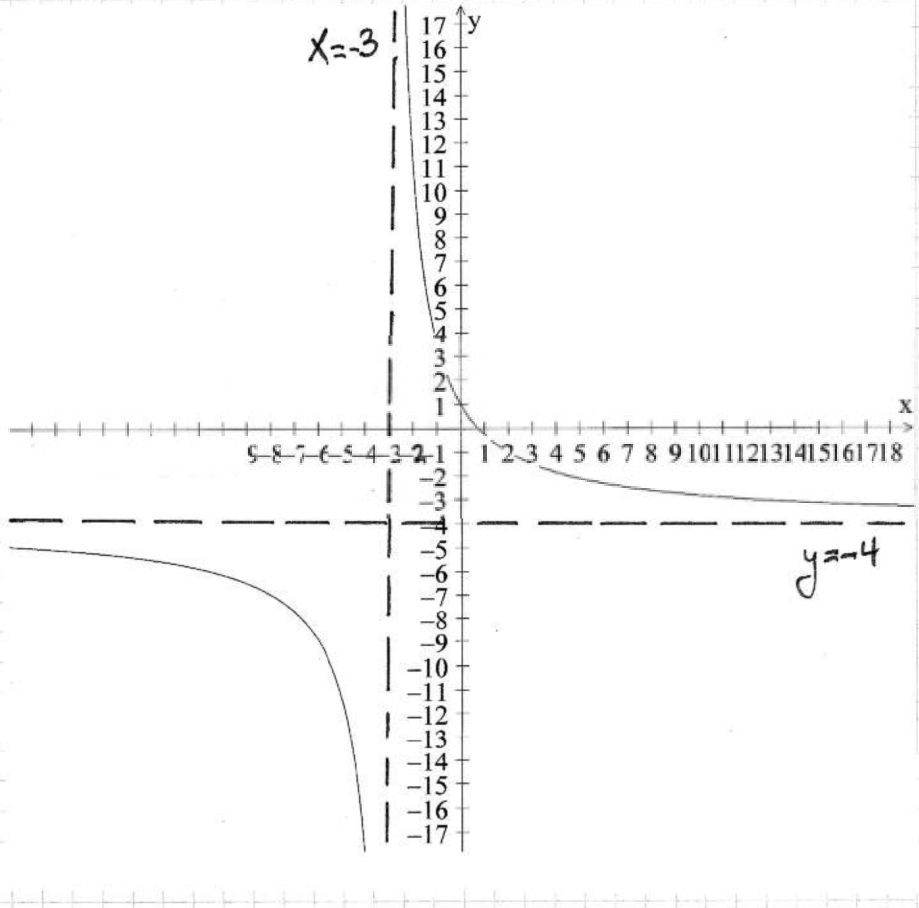
   On a $f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = ax+3$ et $v = x+3$. On a $u' = a$ et $v' = 1$.

   Ainsi, $f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{a(x+3)-(ax+3)\cdot 1}{(x+3)^2} = \dfrac{ax+3a-ax-3}{(x+3)^2} = \dfrac{3a-3}{(x+3)^2}$.

   $f'(3) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{3a-3}{6^2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3a-3 = 12 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$.

   Ainsi, si $a=5$, la pente de la tangente en $x=3$ est $\dfrac{1}{3}$.

4. $f(x) = \dfrac{-4x+3}{x+3}$:



Exercice D

A) On a $f(x) = (x^2 - 2x - 3)e^{\frac{x}{2}}$.

1. Domaine de définition: $D = \mathbb{R}$.

Zéros: Ce sont les x tels que $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ puisque $e^{\frac{x}{2}} > 0$ pour tout x

$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$.

Ainsi, les zéros de f sont en $x = -1$ et $x = 3$.

Comportement asymptotique: Comme $D = \mathbb{R}$, il n'y a pas d'exclu et donc pas d'asymptote verticale.

On a de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 2x - 3) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 2x - 3) = 0 \cdot +\infty$; c'est une indéterminée, mais on sait que l'exponentielle gagne toujours ; on a donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 2x - 3) = 0$ avec $f(x)$ toujours au-dessus de l'axe x ($f(x) > 0$ si x suffisamment proche de $-\infty$). Ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$.

Il n'y a pas d'asymptote horizontale ou oblique lorsque $x \to +\infty$ à cause de l'exponentielle.

Dérivée: On a $f(x) = u \cdot v$ avec $u = e^{\frac{x}{2}}$ et $v = x^2 - 2x - 3$.

Comme $u' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ et $v' = 2x - 2$, on a $f'(x) = u'v + uv' =$

$= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 2x - 3) + e^{\frac{x}{2}}(2x - 2) = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} + 2x - 2\right) =$

$= e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x^2 + 2x - 7)$.

Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x^2 + 2x - 7) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 7 = 0$ puisque $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} > 0$ pour tout $x \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+28}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} =$

$= -1 \pm 2\sqrt{2} \cong \begin{cases} 1{,}8285 \\ -3{,}8285 \end{cases}$.

Avec $x = -1 + 2\sqrt{2}$, on a $f(x) \cong -8{,}267$.

Avec $x = -1 - 2\sqrt{2}$, on a $f(x) \cong 2{,}848$.

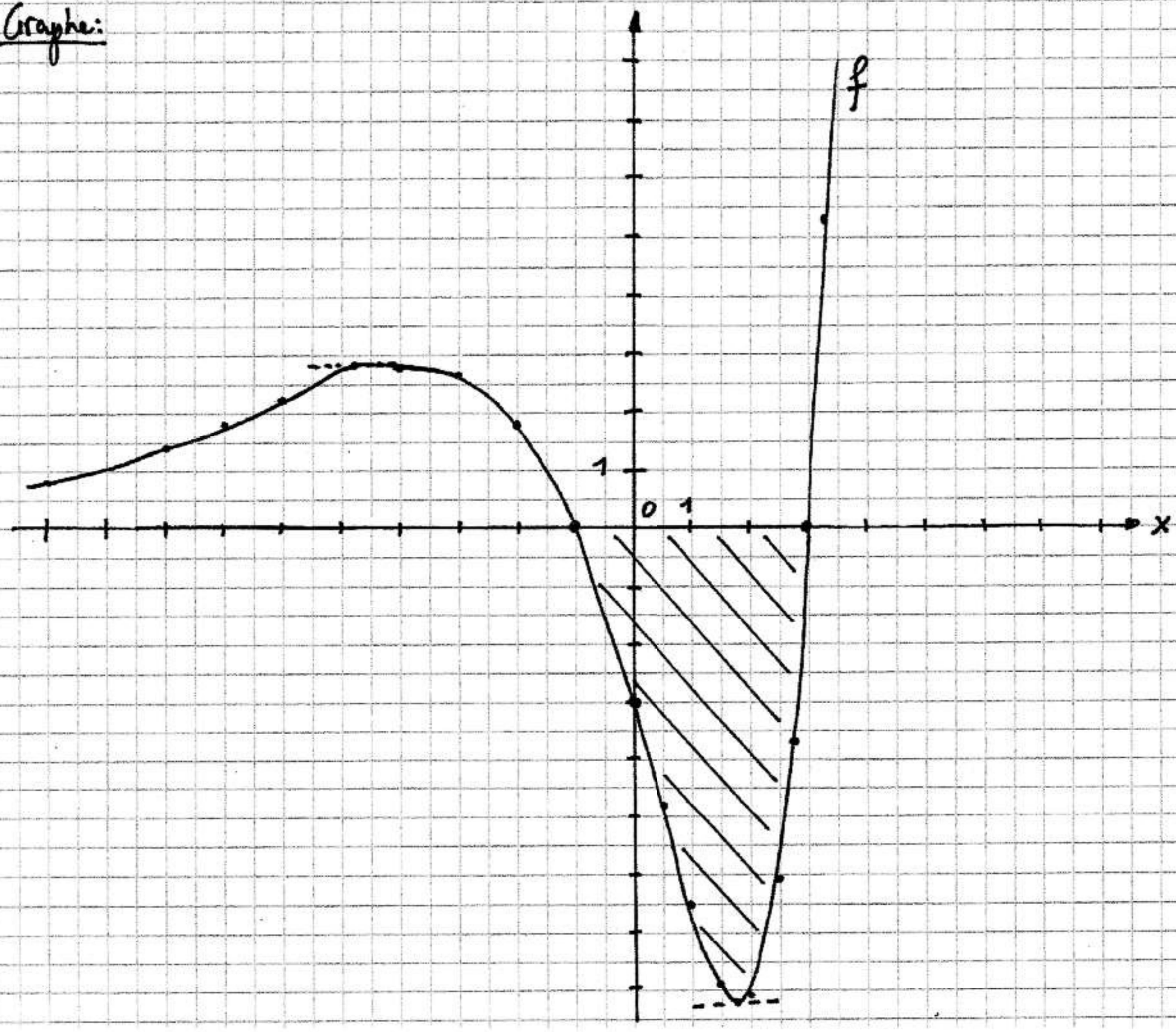
Les points à tangente horizontale sont donc $(-3{,}8285 ; 0{,}009)$ et $(1{,}8285 ; -8{,}267)$.

Tableau de croissance:

x		$-3{,}8285$		$1{,}8285$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

Ainsi, f est croissante sur $]-\infty;-3{,}8285[$, atteint son maximum (local) au point $(-3{,}8285;2{,}848)$, est décroissante sur $]-3{,}8285;1{,}8285[$, atteint son minimum au point $(1{,}8285;-8{,}267)$ et est croissante sur $]1{,}8285;+\infty[$.

Graphe:



2. Procédons par intégration par parties: $\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$.

$$\int (x^2-2x-3)e^{\frac{x}{2}}dx = \int uv'dx = (x^2-2x-3)\,2e^{\frac{x}{2}} - \int (2x-2)\,2e^{\frac{x}{2}}dx =$$

$$= 2(x^2-2x-3)e^{\frac{x}{2}} - 4\int (x-1)e^{\frac{x}{2}}dx = 2(x^2-2x-3)e^{\frac{x}{2}} - 4\int uv'dx =$$

$$= 2(x^2-2x-3)e^{\frac{x}{2}} - 4\left((x-1)\,2e^{\frac{x}{2}} - \int 1\cdot 2e^{\frac{x}{2}}dx\right) =$$

$$= 2(x^2-2x-3)e^{\frac{x}{2}} - 8(x-1)e^{\frac{x}{2}} + 8\int e^{\frac{x}{2}}dx =$$

$$= 2(x^2-2x-3)e^{\frac{x}{2}} - 8(x-1)e^{\frac{x}{2}} + 16e^{\frac{x}{2}} + C =$$

$$= (2x^2-4x-6-8x+8+16)e^{\frac{x}{2}} + C =$$

$$= (2x^2-12x+18)e^{\frac{x}{2}} + C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

3. L'aire à calculer est celle hachurée ci-dessus. Comme, dans l'intervalle $[-1;3]$, $f(x) \leq 0$, on aura $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx < 0$. L'aire sera alors $\left| \int_{-1}^{3} f(x)\,dx \right|$.

On a $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = F(3) - F(-1)$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

D'après 2., une primitive de $f(x)$ est $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 6x + 9)$.

On a: $F(3) = 2e^{1,5}(3^2 - 6\cdot 3 + 9) = 0$ et

$$F(-1) = 2e^{-0,5}\left((-1)^2 - 6\cdot(-1) + 9\right) = 2e^{-0,5}\cdot 16 = 32e^{-0,5} = 32\cdot\frac{1}{e^{0,5}} = \frac{32}{\sqrt{e}}.$$

Ainsi, l'aire cherchée est $\left| \int_{-1}^{3} f(x)\,dx \right| = \left| F(3) - F(-1) \right| = \left| 0 - \frac{32}{\sqrt{e}} \right| = \frac{32}{\sqrt{e}} \cong 19,41.$

B. On a $\int_0^{\pi} (2\sin x - \sin 2x)\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_0^{\pi} \sin 2x\,dx =$

$$= 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} =$$

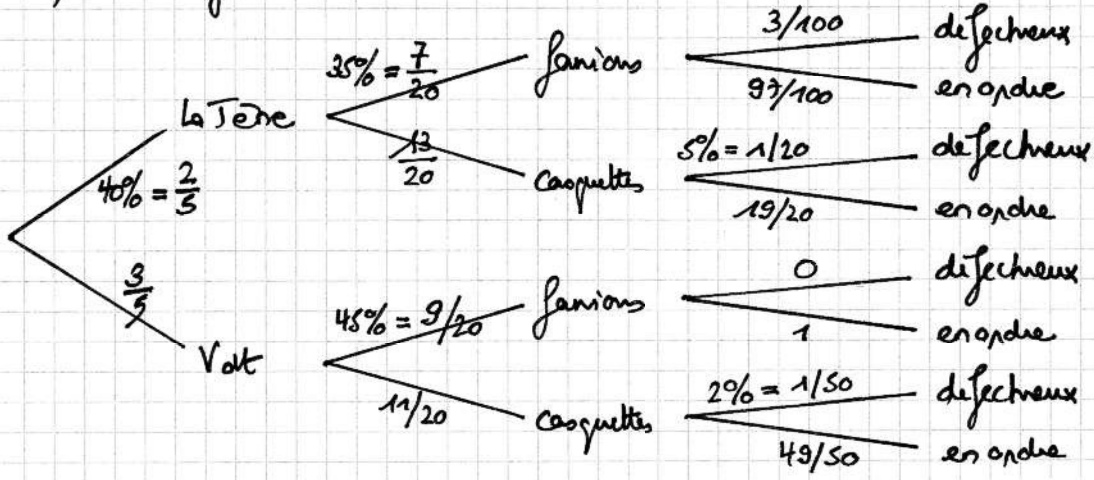
$$= 2\left(-\cos\pi + \cos 0\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2\pi) + \frac{1}{2}\cos 0\right) =$$

$$= 2\,(1+1) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\cdot 2 = 4.$$

Exercice E

I. Si on choisit un article au hasard, on a 3 possibilités successives :
- lieu (La Tène ou VdT = Val-de-Travers)
- genre (fanions ou casquettes)
- état (défectueux ou en ordre).

On peut donc faire l'arbre suivant:



II. 1. $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{20}+\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{20}=\frac{41}{100}=41\%.$

2. $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{3}{100}+\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{20}\cdot\frac{1}{20}=1{,}72\%.$

3. $\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{20}\cdot\frac{1}{20}+\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{1}{50}=1{,}96\ \%.$

4. $$\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{97}{100}+\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{20}\cdot 1}{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{97}{100}+\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{20}\cdot 1+\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{49}{50}}=\frac{0{,}4058}{0{,}9762}\cong 41{,}57\%.$$

5. 0 puisque tous les fanions du VdT sont propres à la vente.

6. a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{49}{50}=32{,}34\%.$

b) $\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{20}\cdot\frac{19}{20}=24{,}70\%.$

III. 1. VdT: $$\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{49}{50}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{49}{50}+\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{20}\cdot\frac{19}{20}}=\frac{0{,}3234}{0{,}5704}=57{,}70\%.$$

La Tène: $100\% - 57{,}70\% = 43{,}30\%.$

2. prob(au moins 1 casquettes de la Tène) = 1 − prob (zéro casquette de la Tène) =
$= 1 -$ prob (les 10 casquettes du VdT) $= 1 - 0{,}577^{10} \cong 0{,}9959 = 99{,}59\%.$

3. $C_5^{10}\ 0{,}577^5\cdot 0{,}443^5 \cong 0{,}2750 = 27{,}50\%$ (loi binomiale).