Lycée Denis-de-Rougemont

Mathématiques de niveau 1

EXAMEN DE MATURITÉ 2009
CORRIGÉ

Problème 1

On a la fonction $f: x \longmapsto y = (ax^2 + 2ax) \cdot e^{-x}$, avec $a \neq 0$.

a) Cherchons les intersections du graphe de f avec l'axe des abscisses, ce qui revient à résoudre $f(x) = 0$:

$$(ax^2+2ax)\cdot e^{-x} = 0 \qquad \left| \; : e^{-x} \; (e^{-x} > 0 \text{ pour toute valeur de } x) \right.$$

$$ax^2 + 2ax = 0 \qquad | \text{ mise en évidence}$$

$$ax(x+2) = 0 \qquad | \; : a \; (a \neq 0)$$

$$x(x+2) = 0$$

Un produit étant nul uniquement si un des 2 facteurs est nul, on a alors : soit $x = 0$, soit $x + 2 = 0$, i.e. $x = -2$.

Ainsi, pour toute valeur de a, <u>f coupe l'axe des abscisses en 2 points : $x = 0$ et $x = -2$.</u>

b) Cherchons les points à tangente horizontale de f, i.e. les x tels que $f'(x) = 0$.
On a $f(x) = u \cdot v$, avec $u = ax^2 + 2ax$ et $v = e^{-x}$.
On obtient : $u' = 2ax + 2a$ et $v' = -e^{-x}$.
Ainsi $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = (2ax + 2a) \cdot e^{-x} + (ax^2 + 2ax) \cdot (-e^{-x}) =$

$$= (2ax + 2a) \cdot e^{-x} + (-ax^2 - 2ax) e^{-x} =$$

$$= (2ax + 2a - ax^2 - 2ax) e^{-x} =$$

$$= (-ax^2 + 2a) e^{-x}.$$

Résolvons $f'(x) = 0$:

$$(-ax^2 + 2a)\, e^{-x} = 0 \qquad \left| \; : e^{-x} \; (e^{-x} > 0 \text{ pour toute valeur de } x) \right.$$

$$-ax^2 + 2a = 0 \qquad | \text{ mise en évidence}$$

$$a(-x^2 + 2) = 0 \qquad | \; : a \; (a \neq 0)$$

$$-x^2 + 2 = 0 \qquad | + x^2$$

$$x^2 = 2 \qquad | \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Ainsi, pour toute valeur de a, <u>f a deux points à tangentes horizontales : $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.</u>

c) La tangente au graphe de f à l'origine est de la forme $y = mx + h$, où $m = f'(0)$.
On a : $f'(0) = (-a \cdot 0^2 + 2a)\underbrace{e^{-0}}_{1} = 2a$.
Ainsi la tangente est $y = 2ax + h$.

Comme la tangente passe par l'origine, i.e. $(0;0)$, par substitution,
$0 = 2a \cdot 0 + h$. Ainsi $h = 0$.
Ainsi la tangente au graphe de f à l'origine est $y = 2ax$.
Comme on veut qu'elle soit $y = -2x$, on doit avoir $2a = -2$, i.e. $\underline{a = -1}$.

La fonction f est maintenant $f : x \longmapsto y = (-x^2 - 2x)e^{-x}$.

d) ① Domaine de définition: Comme f peut être calculée pour n'importe quelle valeur de x, on a $\underline{D = \mathbb{R}}$.

② Intersections avec les axes:
axe x: d'après la question a), les zéros de f sont $\underline{x = 0 \text{ et } x = -2}$.
axe y: on calcule $f(0) = (-0^2 - 2 \cdot 0)e^{-0} = \underline{0}$.
Ainsi $\underline{f \text{ coupe les axes en } (0;0) \text{ et } (-2;0)}$.

③ Tableau de signes: Les zéros de f sont $x = 0$ et $x = -2$. Il n'y a pas d'exclu.
Le tableau de signe se présente donc comme suit:

x		-2		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

pour $x = -3$, $f(x) = (-(-3)^2 - 2 \cdot (-3))e^{+3} = (-9+6)e^{+3} = -3e^{+3} < 0$;
pour $x = -1$, $f(x) = (-(-1)^2 - 2 \cdot (-1))e^{+1} = (-1+2)e^{+1} = e^{+1} > 0$;
pour $x = 1$, $f(x) = (-1^2 - 2 \cdot 1)e^{-1} = (-1-2)e^{-1} = -3e^{-1} < 0$.

④ Asymptotes: Comme il n'y a pas d'exclu, $\underline{\text{il n'y a pas d'asymptote verticale}}$.
On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{(-x^2 - 2x)}_{\downarrow \atop -\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow \atop +\infty} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{(-x^2 - 2x)}_{\downarrow \atop -\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow \atop 0_+} = 0_-$ car l'exponentielle gagne sur les polynômes.

Ainsi $\underline{y = 0 \text{ est une asymptote horizontale à droite et } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0_-}$.

⑤ Dérivée: Selon la question b), avec $a = -1$, on a:
$f'(x) = (x^2 - 2)e^{-x}$.

6. Points à tangente horizontale: Selon le point b), les points à tangente horizontale de f sont : $x=-\sqrt{2}$ et $x=\sqrt{2}$.

7. Tableau de croissance: Les zéros de f' (points à tangente horizontale) sont $x=-\sqrt{2}$ et $x=\sqrt{2}$. Il n'y a pas d'exclu.
Le tableau de croissance se présente comme suit :

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

pour $x=-2$, $f'(x)=((-2)^2-2)e^2=(4-2)e^2=2e^2>0$;
pour $x=0$, $f'(x)=(0^2-2)e^{-0}=-2<0$;
pour $x=2$, $f'(x)=(2^2-2)e^{-2}=(4-2)e^{-2}=2e^{-2}>0$.

On a:

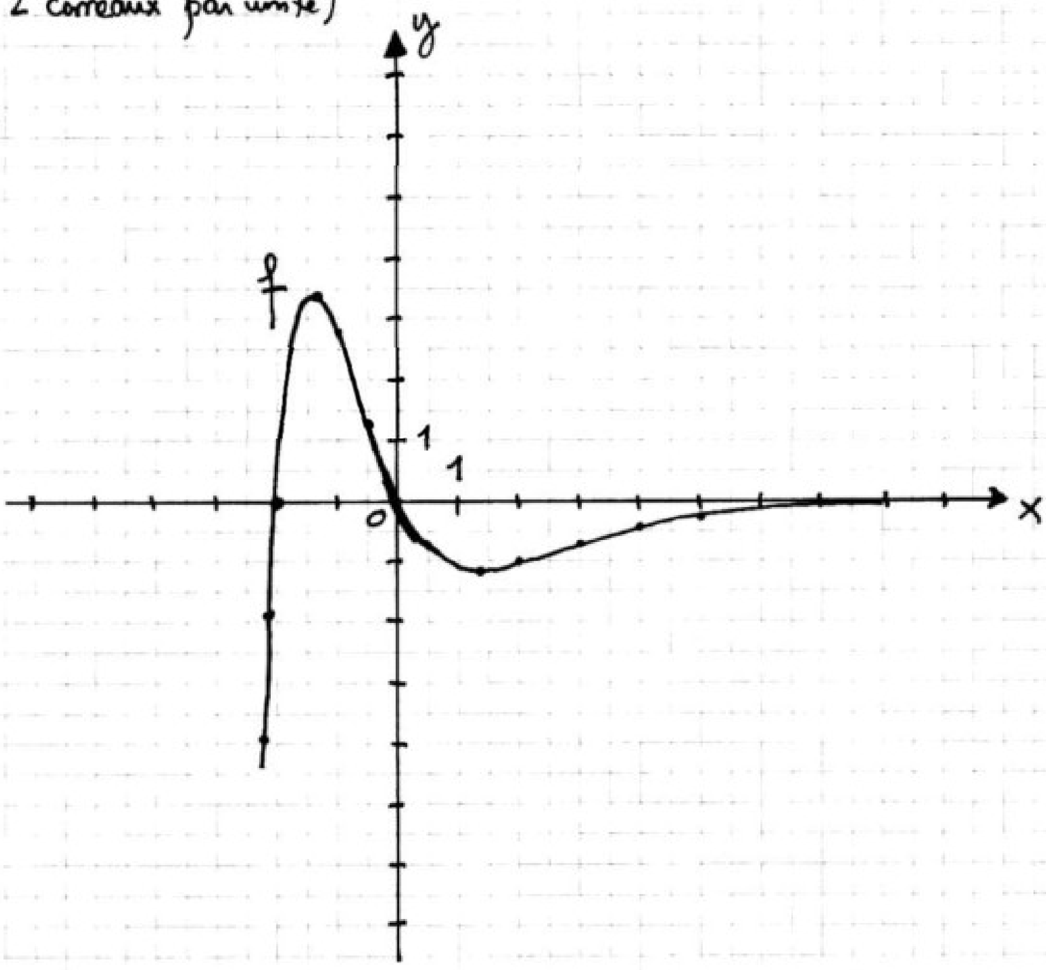
$$f(-\sqrt{2})=\left(-(-\sqrt{2})^2-2\cdot(-\sqrt{2})\right)e^{-(-\sqrt{2})}=\left(-2+2\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}}\cong 3{,}41\ ;$$

$$f(\sqrt{2})=\left(-(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}=\left(-2-2\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}\cong -1{,}17.$$

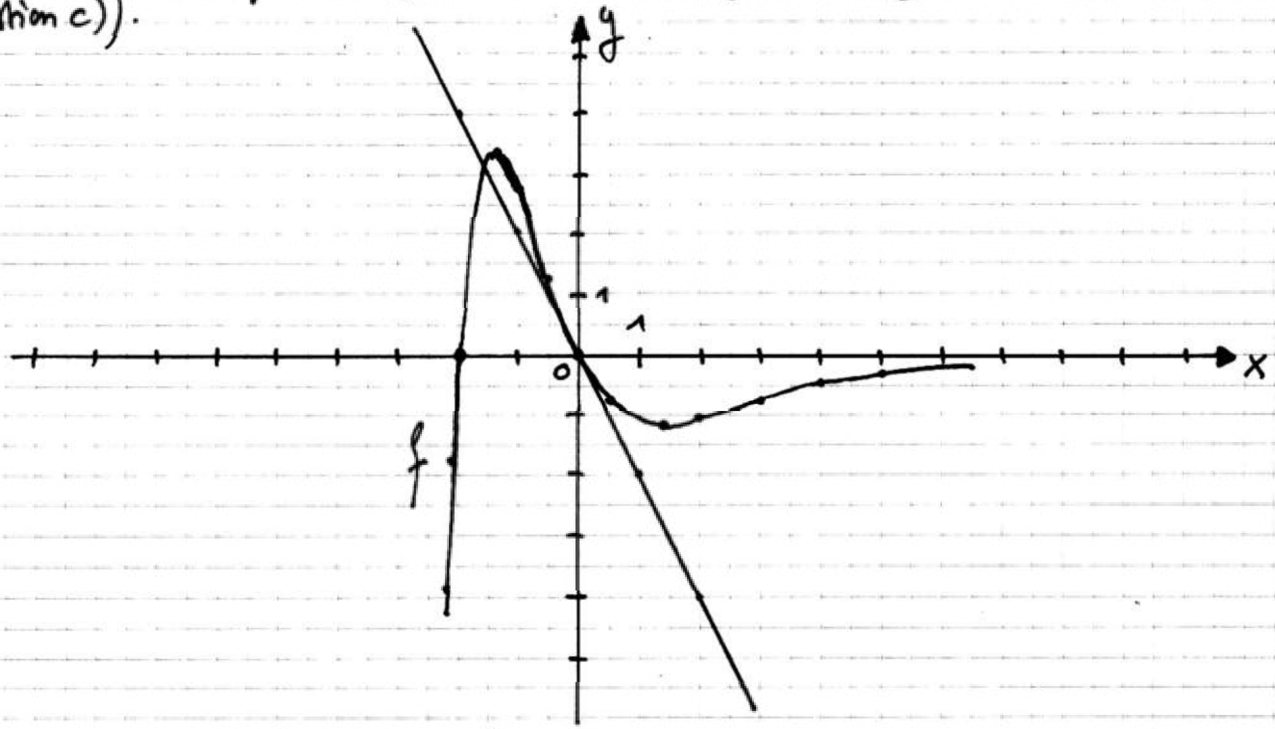
Ainsi f a un maximum en $(-\sqrt{2}\,;3{,}41)$ et un minimum en $(\sqrt{2}\,;-1{,}17)$.

8. Graphe: (2 carreaux par unité)

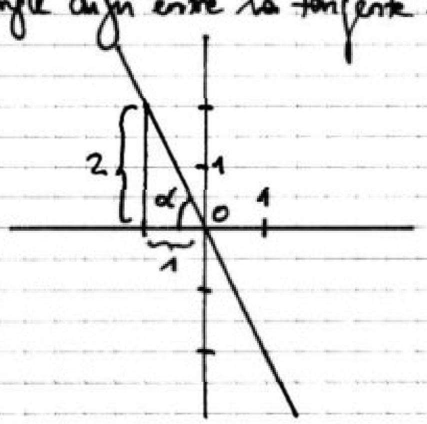
x	$f(x)$
-3	$-60{,}26$
$-2{,}5$	$-15{,}23$
$-2{,}1$	$-1{,}71$
$-2{,}2$	$-3{,}97$
-1	$2{,}72$
$-0{,}5$	$1{,}24$
$0{,}5$	$-0{,}76$
2	$-1{,}08$
3	$-0{,}75$
4	$-0{,}44$
5	$-0{,}24$



e) L'équation de la tangente au graphe de f à l'origine est : $y = -2x$ (voir question c)).



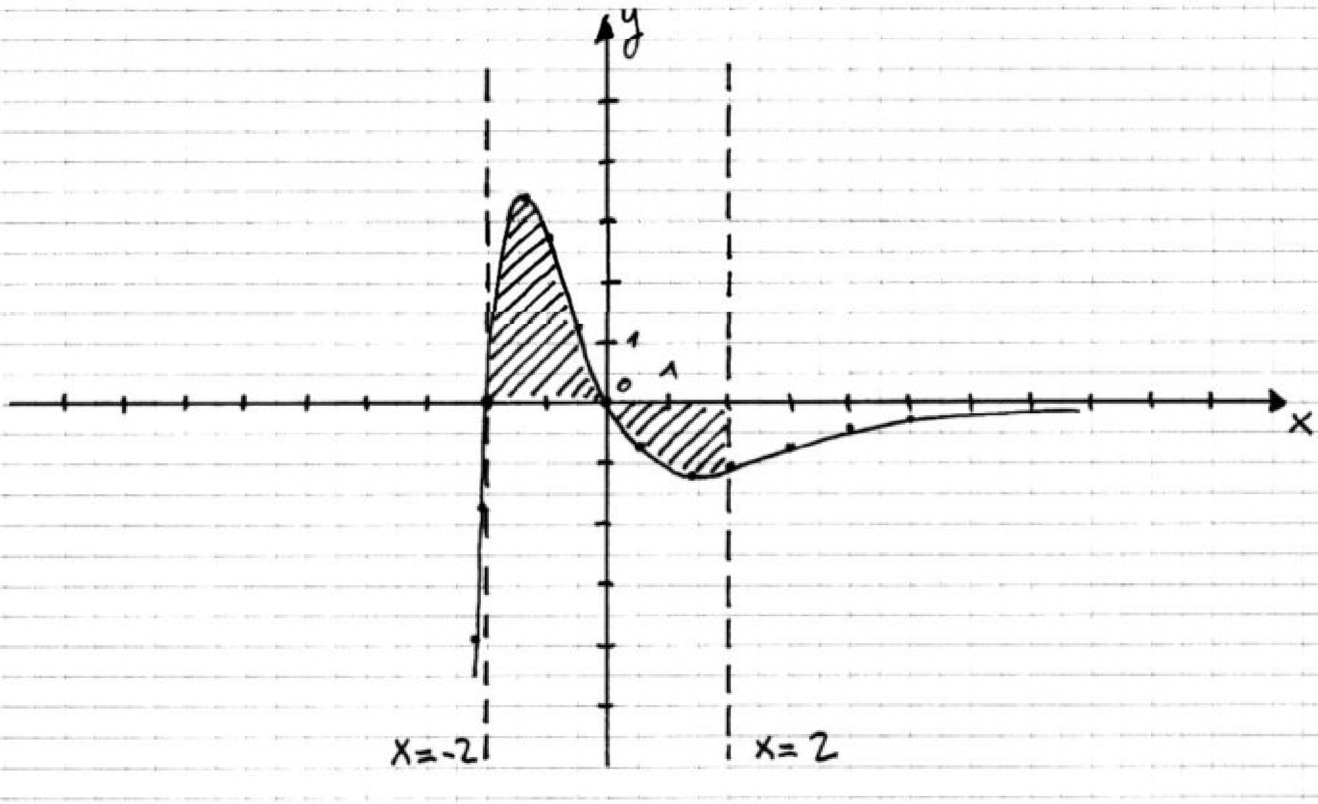
L'angle aigu entre la tangente et l'axe des abscisses est :



$\tan(\alpha) = \frac{2}{1} = 2$, i.e.

$\alpha = \tan^{-1}(2) = \underline{\underline{63,435^\circ}}$.

f)



On doit décomposer l'aire hachurée en 2 parties :

1) L'aire entre $x=-2$ et $x=0$;

2) L'aire entre $x=0$ et $x=2$.

On additionnera finalement ces 2 aires.

Commençons par trouver une primitive de $f(x)=(-x^2-2x)e^{-x}$.

On sait qu'elle sera de la forme $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

On va déterminer a, b et c grâce à la relation $F'(x)=f(x)$.

$F(x)$ est de la forme $u\cdot v$, avec $u=ax^2+bx+c$ et $v=e^{-x}$.

On a : $u'=2ax+b$ et $v'=-e^{-x}$.

Ainsi
$$F'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=(2ax+b)e^{-x}+(ax^2+bx+c)\cdot(-e^{-x})=$$
$$=(2ax+b)e^{-x}+(-ax^2-bx-c)e^{-x}=$$
$$=(2ax+b-ax^2-bx-c)e^{-x}=$$
$$=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}.$$

Comme on doit avoir $F'(x)=f(x)$, on doit avoir :
$$(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}=$$
$$=(-x^2-2x\qquad)e^{-x}.$$

Par identification des termes, on obtient :
$$a=1 \quad ①$$
$$2a-b=-2 \quad ②$$
$$b-c=0 \quad ③$$

Avec ①, ② devient $2-b=-2$, i.e. $b=4$.

Avec $b=4$, ③ devient $4-c=0$, i.e. $c=4$.

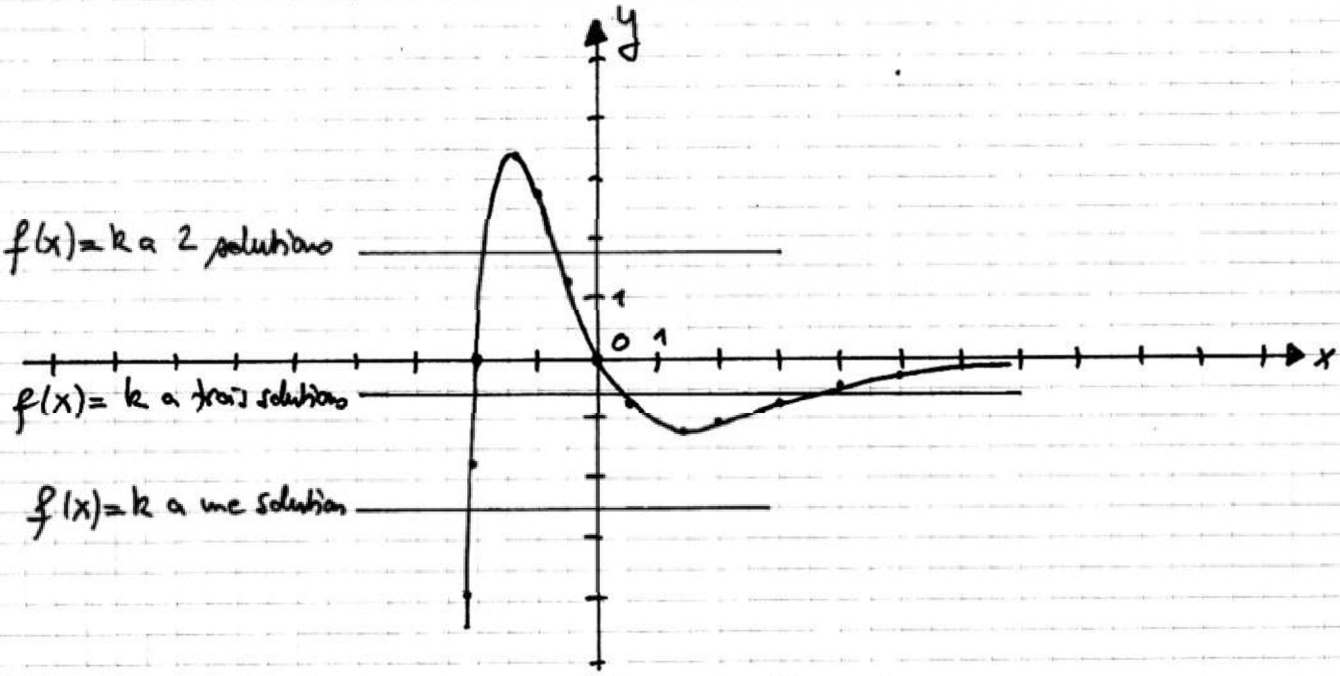
Une primitive de $f(x)$ est donc $F(x)=(x^2+4x+4)e^{-x}$.

1) L'aire entre $x=-2$ et $x=0$ est :
$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=F(0)-F(-2)=$$
$$=(0^2+4\cdot0+4)e^{-0}-((-2)^2+4\cdot(-2)+4)e^{-(-2)}=$$
$$=4-(4-8+4)e^2=4-0\cdot e^2=4.$$

2) L'aire entre $x=0$ et $x=2$, puisque le graphe de f est au-dessous de l'axe x, sera
$$\left|\int_0^2 f(x)\,dx\right|=\left|F(2)-F(0)\right|=$$
$$=\left|(2^2+4\cdot2+4)e^{-2}-(0^2+4\cdot0+4)e^{-0}\right|=$$
$$=\left|(4+8+4)e^{-2}-4\right|=\left|8e^{-2}-4\right|=4-8e^{-2}.$$

Ainsi l'aire hachurée vaut : $4 + 4 - 8e^{-2} = \underline{\underline{8 - 8e^{-2} \cong 6,917.}}$

g)



Les valeurs de k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ possède une seule solution est $\underline{\underline{k \in \left]-\infty ; -1,17\right[}}$.

Problème 2

a) Pour montrer que le triangle ABC est isocèle, il faut montrer que 2 côtés ont même longueur. On va donc calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ et $\|\overrightarrow{CA}\|$.

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2+4^2+0^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{0^2+(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}.$$

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, le triangle est isocèle.

b) Pour pouvoir écrire les équations paramétriques d'une droite, on doit avoir un point de la droite et un vecteur directeur de la droite.

On sait que d passe par $C(3;4;4)$.

On sait que la droite est perpendiculaire au plan ABC.

On sait en outre que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, et, donc au plan ABC.

Calculons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$: on a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.4-0.4 \\ 0.0-(-3).4 \\ (-3).4-4.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$.

En divisant ce vecteur par 4, on a le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ qui est perpendiculaire au plan ABC.

On va donc prendre ce vecteur comme vecteur directeur de d.

Donc, des équations paramétriques de d sont : $\begin{cases} x = 3+4\lambda \\ y = 4+3\lambda \\ z = 4-3\lambda. \end{cases}$

c) La trace de d dans le sol correspond à $z=0$.

Ainsi on a : $4-3\lambda=0$, i.e. $3\lambda=4$, i.e. $\lambda=\frac{4}{3}$.

D'où : $x = 3+4\cdot\frac{4}{3} = 3+\frac{16}{3} = \frac{25}{3}$ et $y = 4+3\cdot\frac{4}{3} = 4+4 = 8$.

Ainsi la trace de d dans le sol est $\left(\frac{25}{3};8;0\right)$.

d) Une équation cartésienne d'un plan est de la forme $ax+by+cz+d=0$.
On sait que le vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan.
D'après la question b), le vecteur $\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan α contenant le triangle ABC.
α peut donc s'écrire : $4x+3y-3z+d=0$.
Pour trouver d, on remplace x, y et z par les coordonnées d'un des points du plan, par exemple $A(3;0;0)$:
on obtient $4\cdot3+3\cdot0-3\cdot0+d=0$, i.e. $12+d=0$, i.e. $d=-12$.
L'équation du plan α est donc : $4x+3y-3z-12=0$.

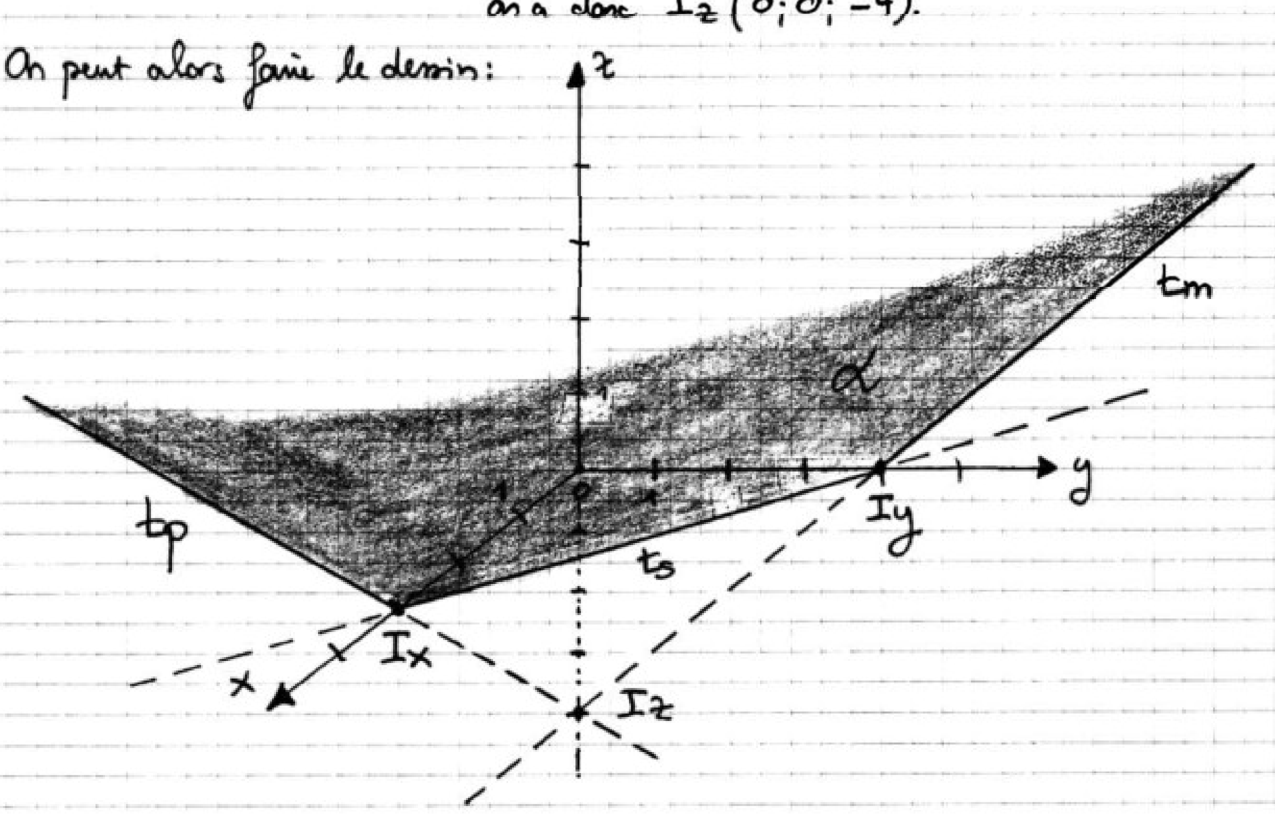
e) Pour dessiner les traces du plan α, on commence par trouver ses intersections avec les axes ; les traces seront reliant ces intersections.

Intersection avec l'axe x : on a $y=z=0$;
ainsi $4x-12=0$, i.e. $4x=12$, i.e. $x=3$;
on a donc $I_x(3;0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on a $x=z=0$;
ainsi $3y-12=0$, i.e. $3y=12$, i.e. $y=4$;
on a donc $I_y(0;4;0)$.

Intersection avec l'axe z : on a $x=y=0$;
ainsi $-3z-12=0$, i.e. $3z=-12$, i.e. $z=-4$;
on a donc $I_z(0;0;-4)$.

On peut alors faire le dessin :



f) Pour calculer l'aire du triangle ABC, on utilise une propriété du produit vectoriel : $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$ est égal à l'aire du parallélogramme formé avec $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Ainsi l'aire du triangle ABC sera $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ (par exemple).

D'après la question b), on a $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{256 + 144 + 144} = \sqrt{544} \cong 23{,}32$.

Par conséquent, l'aire du triangle ABC est $\frac{\sqrt{544}}{2} = \sqrt{\frac{544}{4}} = \sqrt{136} \cong 11{,}66$.

g) A nouveau, pour dessiner les traces de β, il faut trouver ses intersections avec les axes.

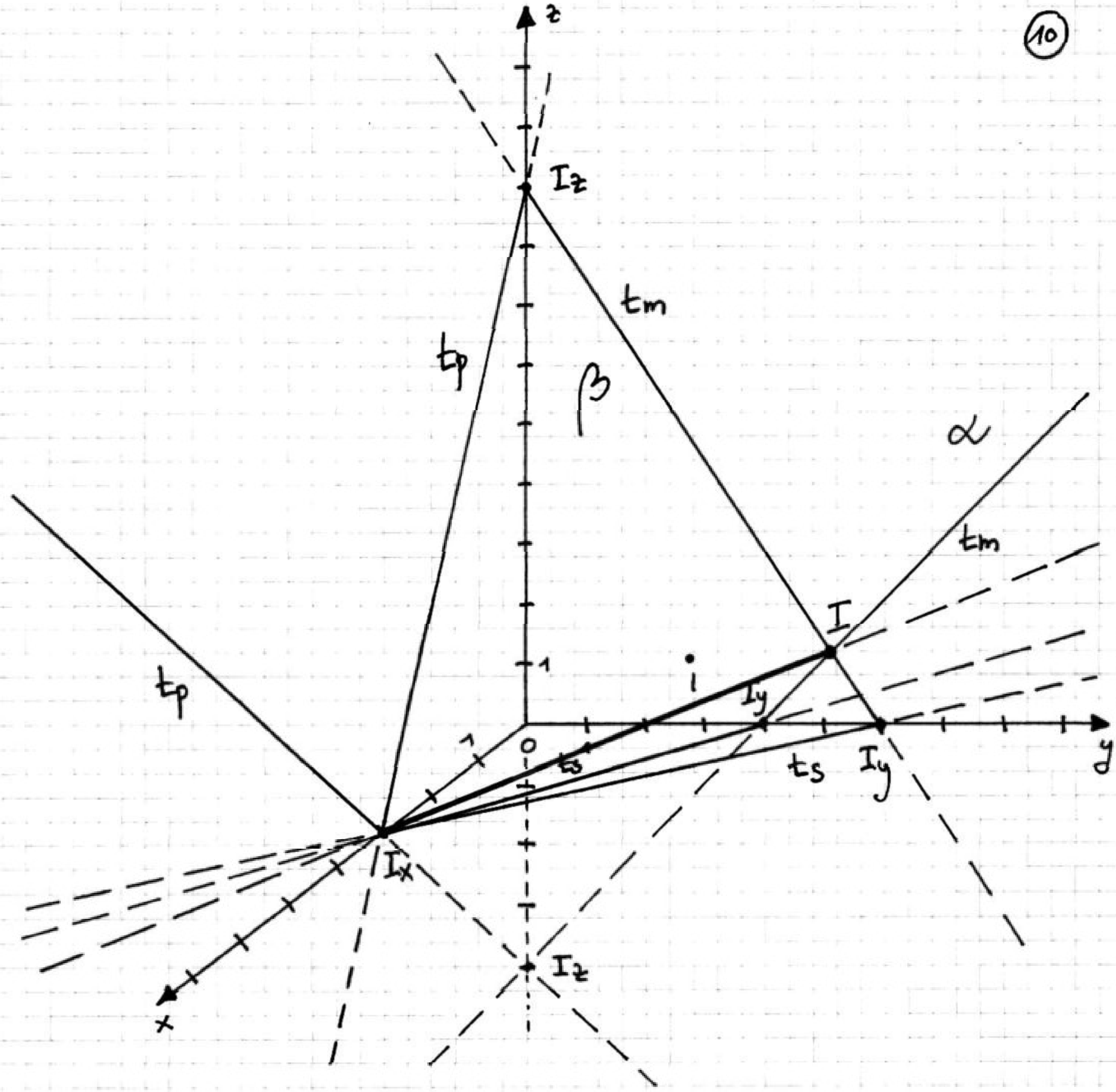
Intersection avec l'axe x : on a $y = z = 0$;
ainsi $6x - 18 = 0$, i.e. $6x = 18$, i.e. $x = 3$;
on a donc $I_x(3;0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on a $x = z = 0$;
ainsi $3y - 18 = 0$, i.e. $3y = 18$, i.e. $y = 6$;
on a donc $I_y(0;6;0)$.

Intersection avec l'axe z : on a $x = y = 0$;
ainsi $2z - 18 = 0$, i.e. $2z = 18$, i.e. $z = 9$;
on a donc $I_z(0;0;9)$.

On peut alors dessiner les traces de β.

La droite d'intersection i des plans α et β reliera les intersections de leurs traces dans le sol, leurs traces dans la paroi et leurs traces dans le mur :



h) Pour trouver un vecteur directeur de la droite i, il faut en connaître 2 points. Le premier sera $I_x(3;0;0)$.
Le second sera l'intersection des 2 traces dans le mur.
La trace dans le mur de α : $4x+3y-3z-12=0$, correspond à mettre $x=0$: on obtient $3y-3z-12=0$, i.e. $y-z-4=0$.
La trace dans le mur de β : $6x+3y+2z-18=0$, correspond à mettre $x=0$: on obtient $3y+2z-18=0$.
L'intersection des 2 traces dans le mur est la solution de $\begin{cases} y-z-4=0 \\ 3y+2z-18=0, \end{cases}$
système de 2 équations à 2 inconnues.
On a :
$$\begin{array}{r|l} y-z-4=0 & \cdot 2 \\ 3y+2z-18=0 & \cdot 1 \\ \hline 5y-26=0 & \end{array}$$
, i.e. $5y=26$, i.e. $y=\frac{26}{5}$

et: $\begin{array}{r|l} y - z - 4 = 0 & \cdot 3 \\ 3y + 2z - 18 = 0 & \cdot(-1) \\ \hline -5z + 6 = 0 & \end{array}$, i.e. $5z = 6$, i.e $z = \frac{6}{5}$

Ainsi l'intersection des traces dans le mur est $I\left(0; \frac{26}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

On peut alors trouver un vecteur directeur de i:

On a:

$$\overrightarrow{I_x I} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 26/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 26/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}.$$

En multipliant ce vecteur par 5, on peut prendre comme vecteur directeur de i le vecteur $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -15 \\ 26 \\ 6 \end{pmatrix}}}$.

Ainsi des équations paramétriques de i sont: $\underline{\underline{\begin{cases} x = 3 - 15\lambda \\ y = 26\lambda \\ z = 6\lambda. \end{cases}}}$

i) Pour calculer l'angle aigu entre 2 plans, on calcule l'angle aigu entre 2 vecteurs normaux aux plans.

On a: $\beta: 6x + 3y + 2z - 18 = 0$; vecteur normal $= \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

mur: $x = 0$; vecteur normal $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi l'angle entre β et le mur est donné par $\cos(\gamma) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|}$

$$= \frac{|6\cdot1 + 3\cdot0 + 2\cdot0|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{6}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{1}} = \frac{6}{7}$$

et l'angle cherché est $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) \cong \underline{\underline{31^\circ}}$.

j) Pour montrer que la sphère S_1 ne coupe pas β, on va montrer que la distance du centre de S_1 au plan β est supérieure au rayon de S_1.

L'équation de S_1 est: $(x-7)^2 + (y-9)^2 + (z+1)^2 = 36$.

Son centre est $K(7; 9; -1)$ et son centre est 6 $(6^2 = 36)$.

L'équation de β est: $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

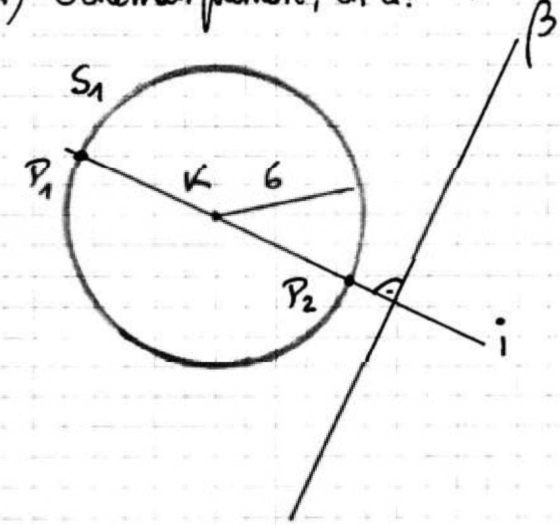
En utilisant la formule de distance d'un point à un plan, on a:

$$\text{distance de } K \text{ à } \beta = \frac{|6\cdot7 + 3\cdot9 + 2\cdot(-1) - 18|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{|42 + 27 - 1 - 18|}{\sqrt{36+9+4}} =$$

$$= \frac{50}{\sqrt{49}} = \frac{50}{7} \cong 7,14.$$

Comme $7{,}14 >$ rayon de la sphère $S_1 = 6$, on en conclut que <u>S_1 ne coupe pas β.</u>

k) Schématiquement, on a :



On va chercher les équations paramétriques de la droite i passant par K, centre de la sphère S_1 et perpendiculaire à β. On cherchera ensuite les intersections P_1 et P_2 de i avec S_1. On prendra alors pour P le point P_1 ou P_2 le plus proche de β.

La droite i passe par $K(7;9;-1)$ et est parallèle à un vecteur normal à β. Un vecteur normal à β est $\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$. On peut donc prendre ce vecteur comme vecteur directeur de i.

Les équations paramétriques de i sont donc :
$$\begin{cases} x = 7 + 6\lambda \\ y = 9 + 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda. \end{cases}$$

L'équation de S_1 est $(x-7)^2 + (y-9)^2 + (z+1)^2 = 36$.

Par substitution, on obtient :

$$(7+6\lambda-7)^2 + (9+3\lambda-9)^2 + (-1+2\lambda+1)^2 = 36 \qquad \text{calculs}$$
$$(6\lambda)^2 + (3\lambda)^2 + (2\lambda)^2 = 36 \qquad \text{calculs}$$
$$36\lambda^2 + 9\lambda^2 + 4\lambda^2 = 36 \qquad \text{réduction}$$
$$49\lambda^2 = 36 \qquad : 49$$
$$\lambda^2 = \frac{36}{49} \qquad \sqrt{}$$
$$\lambda = \frac{6}{7} \text{ ou } \lambda = -\frac{6}{7}$$

Si $\lambda = \frac{6}{7}$, on a : $x = 7 + 6\,\frac{6}{7} = 7 + \frac{36}{7} = \frac{85}{7}$;

$y = 9 + 3\,\frac{6}{7} = 9 + \frac{18}{7} = \frac{81}{7}$;

$z = -1 + 2\cdot\frac{6}{7} = -1 + \frac{12}{7} = \frac{5}{7}$;

donc $P_1\left(\frac{85}{7} ; \frac{81}{7} ; \frac{5}{7}\right)$.

Si $\lambda = -\frac{6}{7}$, on a : $x = 7 + 6\cdot\left(-\frac{6}{7}\right) = 7 - \frac{36}{7} = \frac{13}{7}$;

$y = 9 + 3\cdot\left(-\frac{6}{7}\right) = 9 - \frac{18}{7} = \frac{45}{7}$;

$z = -1 + 2\cdot\left(-\frac{6}{7}\right) = -1 - \frac{12}{7} = -\frac{19}{7}$;

donc $P_2\left(\frac{13}{7} ; \frac{45}{7} ; -\frac{19}{7}\right)$.

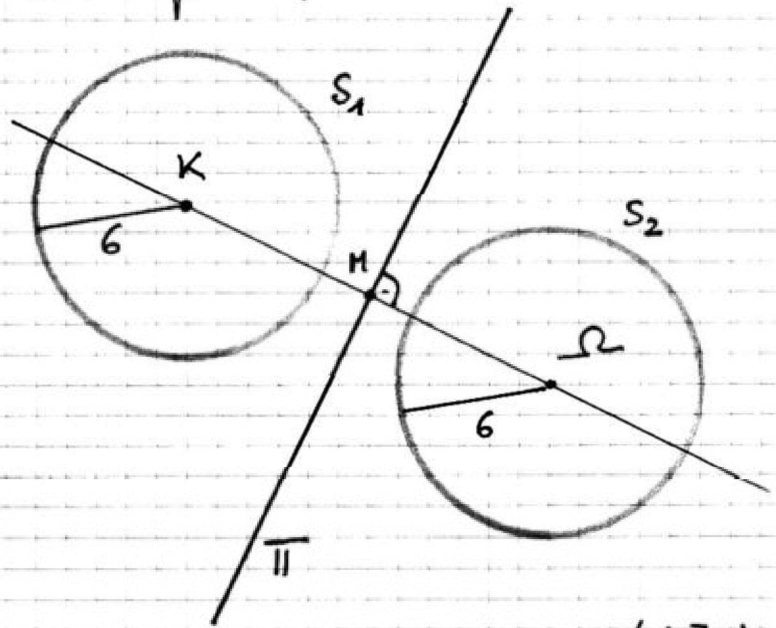
Calculons les distances de P_1 à β et de P_2 à β.
En utilisant la formule de calcul de distance d'un point à un plan, on a:

$$\text{distance de } P_1 \text{ à } \beta = \frac{\left|6\cdot\frac{85}{7}+3\cdot\frac{81}{7}+2\cdot\frac{5}{7}-18\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{91}{\sqrt{49}} = \frac{91}{7} = 13;$$

$$\text{distance de } P_2 \text{ à } \beta = \frac{\left|6\cdot\frac{13}{7}+3\cdot\frac{45}{7}+2\cdot\left(-\frac{19}{7}\right)-18\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{7}{\sqrt{49}} = \frac{7}{7} = 1.$$

Ainsi le point le plus proche de β est $\underline{P\left(\frac{13}{7};\frac{45}{7};-\frac{19}{7}\right)}$ $(=P_2)$.

l) Schématiquement, on a:



S_2 est le symétrique de S_1 par rapport à Π ; ainsi les rayons de S_1 et S_2 sont égaux et vaut 6.
Le plan Π passe par le point M, milieu de $K\Omega$ et est perpendiculaire à $\overrightarrow{K\Omega}$.

On a: $K(7;9;-1)$ et $\Omega(-1;1;3)$

On a: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}7\\9\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\10\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}.$

Ainsi on a: $M(3;5;1)$.

$\overrightarrow{K\Omega} = \overrightarrow{O\Omega}-\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\9\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-8\\4\end{pmatrix}.$

En divisant ce vecteur par (-2), un vecteur perpendiculaire à Π est $\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$.

Ainsi, l'équation de Π est de la forme: $3x+4y-2z+d=0$.
Pour calculer d, on utilise le point $M(3;5;1)$.
Par substitution, on trouve: $3\cdot3+4\cdot5-2\cdot1+d=0$, i.e.
$9+20-2+d=0$, i.e. $27+d=0$, i.e. $d=-27$.

L'équation de Π est donc: $\underline{3x+4y-2z-27=0}$.

Problème 3

a) On doit avoir : 6 / 5 / ... / ... / ... / ...
La probabilité d'obtenir 6 en premier est $\frac{1}{6}$
La probabilité d'obtenir 5 en deuxième est $\frac{1}{5}$ (chaque morceau est lu une seule fois, et, le 6 étant lu en premier, il reste 5 morceaux à écouter après le premier).
La probabilité pour les 4 derniers morceaux est 1, car on est sûr que les 4 derniers morceaux seront joués là.
Ainsi la probabilité est $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{30}}}$.

b) On doit avoir : ... / ... / 3 / ... / ... / ...
Le nombre total de possibilité est $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$.
Le nombre de cas favorables est : $5.4.1.3.2.1 = 120$.

5 choix pour le 1er morceau (puisque le 3 est joué en 3e position)

4 choix pour le 2e morceau (puisque le 1er morceau est choisi et le 3 est joué en 3e position)

etc

Ainsi la probabilité est $\frac{120}{720} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$.

c) Fixons le morceau préféré d'Antoine : le 1.
On doit avoir : $\overline{1}$ / $\overline{1}$ / $\overline{1}$ / $\overline{1}$ / ... / ... .

5 chances sur 6 (pas le 1)

4 chances sur 5

3 chances sur 4

2 chances sur 3 .

Ainsi la probabilité est $\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$.

d) Il y a 1 possibilité sur les 720 possibilités totales.
La probabilité est donc $\underline{\underline{\frac{1}{720}}}$.

e) La probabilité de commencer par le numéro 6 est $\frac{1}{6}$.
La probabilité de commencer par autre chose que le numéro 6 est $\frac{5}{6}$.
En utilisant la loi binomiale, on obtient :
probabilité de commencer 2 fois par le 6 $= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 =$

$$= 10 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{1250}{7776} = \underline{\underline{\frac{625}{3888}}} \cong 0{,}1608.$$

f) On aura 2 possibilités : 1) mode normale : $1/2/3/4/5/6$

2) mode random : $\_\_/\_\_/\_\_/\_\_/\_\_/\_\_$.

1) la probabilité que 1 ne passe pas en premier est 0 ;

2) la probabilité que 1 ne passe pas en premier est $\frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{5}{6}$.

il y a 5 choix sur 6 pour le 1er morceau

Ainsi, au total, la probabilité que 1 ne passe pas en premier est :

$$\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{18}}}.$$

g) 1) la probabilité que 3 passe en 3e position est 1 ;

2) la probabilité que 3 passe en 3e position est $\frac{1}{6}$ (voir question b)).

Ainsi, au total, la probabilité que 3 passe en 3e position est :

$$\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{18} = \underline{\underline{\frac{13}{18}}}.$$

h) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, où :

A = lecture en random, et

B = le 1er morceau lu est le 1.

On a : $A \cap B$ = lecture en random et 1er morceau lu est le 1.

Donc : $p(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.

En outre $p(B) = 1 - p$ (le 1er morceau lu n'est pas le 1) $=$

$= 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$ (voir question f)).

Ainsi $P(A|B) = \frac{1/6}{13/18} = \frac{1}{6} : \frac{13}{18} = \frac{1}{6} \cdot \frac{18}{13} = \underline{\underline{\frac{3}{13}}}.$