

**Problème 1** (poids 2)

On considère la fonction  $f : x \mapsto y = (ax^2 + 2ax) \cdot e^{-x}$ , où  $a$  est un nombre réel non nul.

- Vérifier que pour toute valeur de  $a$  le graphe de  $f$  coupe l'axe des abscisses en deux points. Calculer les abscisses de ces points.
- Vérifier également que pour toute valeur de  $a$  le graphe de  $f$  possède deux points à tangente horizontale. Calculer les abscisses de ces points.
- Déterminer la valeur de  $a$  pour laquelle la tangente au graphe de  $f$  à l'origine est la droite d'équation  $y = -2x$ .

Pour la suite du problème, on choisit  $a = -1$ , donc  $f(x) = (-x^2 - 2x) \cdot e^{-x}$

- Étudier la fonction  $f$ , sans la parité. Dessiner le graphe en prenant deux carreaux comme unité.
- Dessiner dans le même repère la tangente au graphe de  $f$  à l'origine. Calculer l'angle aigu que forment la tangente et l'axe des abscisses.
- Hachurer la surface fermée délimitée par le graphe de  $f$ , l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales  $x = -2$  et  $x = 2$ . Calculer l'aire de cette surface.
- En observant le graphe de  $f$ , déterminer les valeurs de  $k$  pour lesquelles l'équation  $f(x) = k$  possède une seule solution.

**Problème 2** (poids 2)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points  $A(3;0;0)$ ,  $B(0;4;0)$ ,  $C(3;4;4)$  et  $D(5;4;-2)$ .

- Montrer que le triangle  $ABC$  est un triangle isocèle.
- Déterminer des équations paramétriques de la droite  $d$ , perpendiculaire au plan  $ABC$  et passant par le sommet  $C$  du triangle.
- Calculer les coordonnées de la trace de la droite  $d$  dans le sol.
- Montrer qu'une équation cartésienne du plan  $\alpha$  contenant le triangle  $ABC$  est  $4x + 3y - 3z - 12 = 0$ .
- Dessiner les traces du plan  $\alpha$ .
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$ , la distance du point  $D$  au plan  $\alpha$ , ainsi que le volume du tétraèdre  $ABCD$ .

On considère un deuxième plan  $\beta$ , d'équation  $6x + 3y + 2z - 18 = 0$ .

- Dessiner les traces du plan  $\beta$  ainsi que la droite d'intersection  $i$  des plans  $\alpha$  et  $\beta$ .
- Déterminer un vecteur directeur de la droite  $i$ .
- Calculer l'angle aigu entre le plan  $\beta$  et le mur.

On considère encore la sphère  $s_1$  d'équation  $(x-7)^2 + (y-9)^2 + (z+1)^2 = 36$ .

- Montrer que la sphère  $s_1$  ne coupe pas le plan  $\beta$ .
- Déterminer le point  $P$  de  $\beta$  qui est le plus proche de la sphère  $s_1$ .
- La sphère  $s_2$ , symétrique de  $s_1$  par rapport à un plan  $\pi$ , est centrée en  $\Omega(-1;1;3)$ .  
Déterminer une équation cartésienne du plan  $\pi$ .

**Problème 3** (poids 1)

Le lecteur de disques compacts d'Antoine peut lire les disques selon deux modes :

- Dans le mode « Normal », les morceaux sont lus les uns après les autres, du premier au dernier.
- Dans le mode « Random » (hasard) les morceaux sont lus dans un ordre aléatoire, chaque morceau étant lu une seule fois.

Chaque fois qu'on enclenche le lecteur, le mode de lecture est choisi automatiquement de la manière aléatoire suivante :

- La probabilité que le mode « Normal » soit sélectionné vaut  $\frac{2}{3}$  ;
- La probabilité que le mode « Random » soit sélectionné vaut  $\frac{1}{3}$ .

De plus, une fois que le lecteur a été enclenché, le mode de lecture peut être modifié par l'utilisateur.

*Première partie*

Antoine insère dans son lecteur un disque contenant six morceaux, numérotés de 1 à 6, et décide d'écouter tout le disque dans le mode « Random ».

- Quelle est la probabilité que son lecteur commence par lire les morceaux portant les numéros 6 et 5, dans cet ordre ?
- Quelle est la probabilité que le morceau numéro 3 passe en troisième position ?
- Quelle est la probabilité que le morceau préféré d'Antoine ne figure pas parmi les quatre premiers morceaux lus ?
- Quelle est la probabilité que tous les morceaux soient lus dans l'ordre original, c'est-à-dire de 1 à 6 ?
- Si Antoine écoute son disque cinq fois de suite (chaque fois dans le mode « Random »), quelle est la probabilité que la lecture commence deux fois par le morceau numéro 6 ?

*Deuxième partie*

Antoine éteint son lecteur, l'enclenche à nouveau, et écoute le même disque qu'avant dans son intégralité, sans modifier le mode de lecture sélectionné par l'appareil.

- Quelle est la probabilité que le morceau numéro 1 ne passe pas en premier ?
- Quelle est la probabilité que le morceau numéro 3 passe en troisième position ?
- Si l'on sait que le premier morceau lu est celui qui porte le numéro 1, quelle est la probabilité que le mode de lecture sélectionné soit « Random » ?