EXAMEN DE MATURITE 2009

Corrigé

Exercice 1

On a $f: x \mapsto y = (x^2-4)e^{-0,5x}$.

a) Domaine de définition: on a clairement $D_f = \mathbb{R}$.

Zéro de f: $f(x)=0 \Rightarrow (x^2-4)e^{-0,5x}=0 \Rightarrow x^2-4=0$ (puisque $e^{-0,5x}>0$ pour toute valeur de x) $\Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow (-2;0)$ et $(2;0)$.

Intersection avec Oy: $x=0 \Rightarrow y=(0^2-4)e^{-0,5\cdot 0}=-4 \Rightarrow (0;-4)$.

Tableau de signes:

x		-2		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Asymptotes verticales: aucune puisque $D_f=\mathbb{R}$.

Asymptotes non verticales: on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2-4)e^{-0,5x} = \text{"}+\infty \cdot 0_+\text{"} = 0_+$ puisque $e^{-0,5x}$ "gagne" sur x^2-4; de plus $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2-4)e^{-0,5x} = \text{"}+\infty\cdot\infty\text{"} = +\infty$; ainsi $y=0$ est une asymptote de f lorsque $x\to+\infty$.

Dérivée: on a $f(x)=u\cdot v$ avec $u=x^2-4$ et $v=e^{-0,5x}$; comme $u'=2x$ et $v'=-0,5e^{-0,5x}$, on a

$$f'(x)=u'v+uv'=2xe^{-0,5x}+(x^2-4)(-0,5e^{-0,5x})=(2x-0,5x^2+2)e^{-0,5x}=$$
$$=-\frac{1}{2}(x^2-4x-4)e^{-0,5x}$$; son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}$.

Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x^2-4x-4)e^{-0,5x}=0 \Rightarrow x^2-4x-4=0$ (puisque $e^{-0,5x}>0$ pour toute valeur de x; $x^2-4x-4=0$ est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-4$ et $c=-4$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-4)=16+16=32$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$; les solutions sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+4\sqrt{2}}{2}=2+2\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=$ $=\frac{4-4\sqrt{2}}{2}=2-2\sqrt{2}$;

avec $x_1=2+2\sqrt{2}\cong 4,83$, on a $y_1=(x_1^2-4)e^{-0,5x_1}\cong 1,73$;

avec $x_2=2-2\sqrt{2}\cong -0,83$, on a $y_2=(x_2^2-4)e^{-0,5x_2}\cong -5,01$;

ainsi les points à tangente horizontale de f sont $(-0,83;-5,01)$ et $(4,83;1,73)$.

Tableau de croissance:

x		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

Nature des points à tangente horizontale: $(-0,83;-5,01)$ est un minimum et $(4,83;1,73)$ est un maximum.

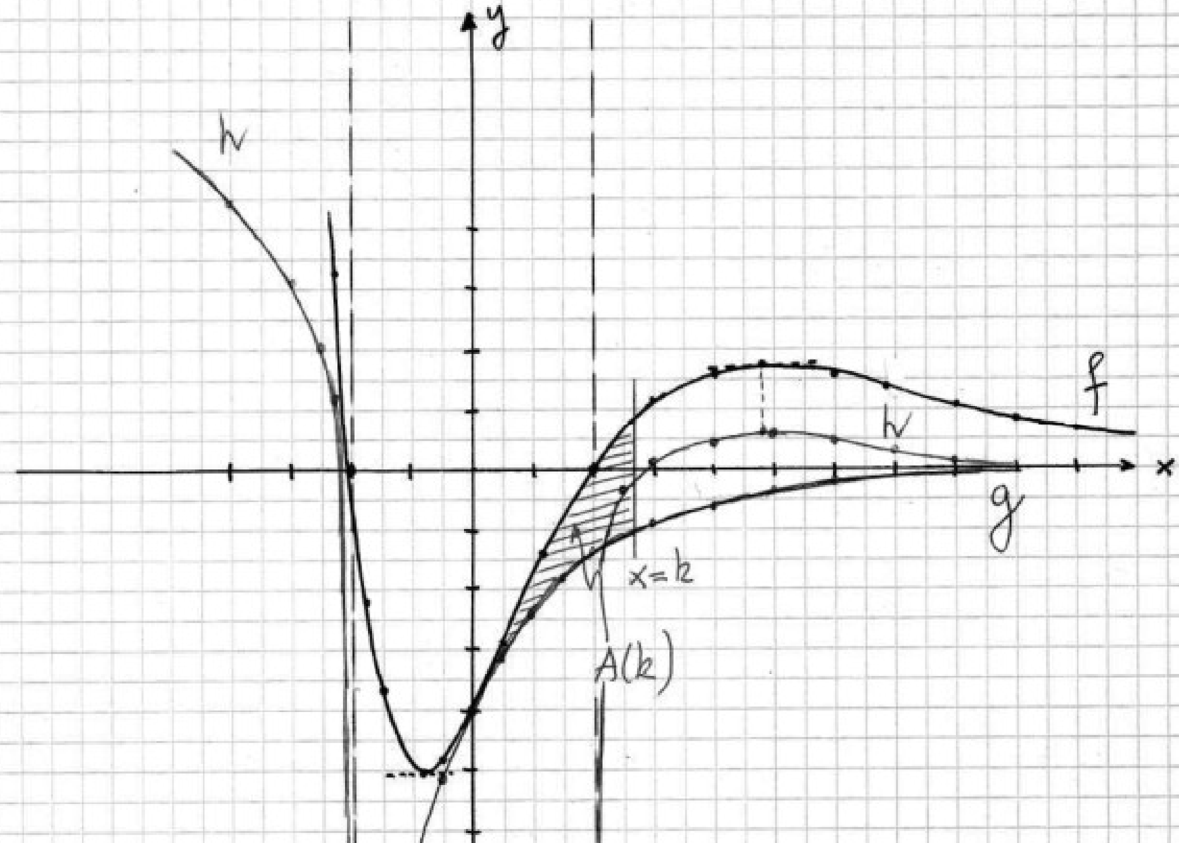
Deuxième dérivée: on a $f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2-4x-4)e^{-0,5x} = u.v$ avec $u = -\frac{1}{2}(x^2-4x-4)$ et $v = e^{-0,5x}$; comme $u' = -\frac{1}{2}(2x-4) = -x+2$ et $v' = -0,5e^{-0,5x}$,
on a $f''(x) = u'v+uv' = (-x+2)e^{-0,5x} - \frac{1}{2}(x^2-4x-4)(-0,5e^{-0,5x}) =$
$= (-x+2+\frac{1}{4}x^2-x-1)e^{-0,5x} = (\frac{1}{4}x^2-2x+1)e^{-0,5x} =$
$= \frac{1}{4}(x^2-8x+4)e^{-0,5x}$; son domaine est $D_{f''} = \mathbb{R}$.

Points d'inflexion: $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(x^2-8x+4)e^{-0,5x} = 0 \Rightarrow x^2-8x+4=0$ (puisque $e^{-0,5x}>0$ pour toute valeur de x); $x^2-8x+4=0$ est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-8$ et $c=4$; on a $\Delta = b^2-4ac =$
$= (-8)^2-4.1.4 = 64-16 = 48$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$; les solutions sont
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4\sqrt{2}}{2} = 4+2\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-4\sqrt{2}}{2} = 4-2\sqrt{2}$;
avec $x_1 = 4+2\sqrt{2} \cong 6,83$, on a $y_1 = (x_1^2-4)e^{-0,5x_1} \cong 1,4$;
avec $x_2 = 4-2\sqrt{2} \cong 1,17$, on a $y_2 = (x_2^2-4)e^{-0,5x_2} \cong -1,46$;
ainsi les points d'inflexion de f sont $(1,17; -1,46)$ et $(6,83; 1,4)$.

Tableau de courbure:

x		$1,17$		$6,83$	
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

Graphe:



b) On a $f(x)=(x^2-4)e^{-0,5x}$ et $g(x)=me^{-0,5x}$.

Les points communs de f et g sont les x tels que $f(x)=g(x) \Rightarrow (x^2-4)e^{-0,5x}=$
$=me^{-0,5x} \Rightarrow (x^2-4-m)e^{-0,5x}=0 \Rightarrow x^2-4-m=0$ (puisque $e^{-0,5x}>0$ pour toute valeur de x) $\Rightarrow x^2=4+m \Rightarrow x=\pm\sqrt{4+m}$.

Pour qu'il n'y ait qu'un seul point commun, il faut que $\sqrt{4+m}=0 \Rightarrow m=-4$.
Ainsi, si $m=-4$, f et g n'ont qu'un point commun.

Avec $m=-4$, le point commun de f et g est en $x=0$. Avec $x=0$, on a $y=-4$ (voir a)). Le point commun de f et g est donc $(0;-4)$.

L'équation de la tangente au graphe de f en $x=0$ est $y=ax+b$, où $a=f'(0)$.
Comme $f'(x)=-\frac{1}{2}(x^2-4x-4)e^{-0,5x}=-\frac{1}{2}\cdot(-4)=2$. L'équation de la tangente est donc $y=2x+b$. Avec le point $(0;-4)$, on obtient $-4=b \Rightarrow b=-4$.
L'équation de la tangente au graphe de f en $x=0$ est $y=2x-4$.

L'équation de la tangente au graphe de g en $x=0$ est $y=a'x+b'$, où $a'=g'(0)$.
Avec $m=-4$, on a $g(x)=-4e^{-0,5x}$ et $g'(x)=2e^{-0,5x}$. Ainsi $g'(0)=2$, d'où $a'=2$. L'équation de la tangente est donc $y=2x+b'$. Avec le point commun $(0;-4)$, on obtient $-4=b' \Rightarrow b'=-4$.
L'équation de la tangente au graphe de g en $x=0$ est $y=2x-4$.

Par conséquent, en $x=0$, f et g ont une tangente commune dont l'équation est $y=2x-4$.

c) Voir a) (en bleu).

d) L'aire $A(k)$ est hachurée en rouge dans la partie a).

On a $A(k)=\int_0^k (f(x)-g(x))dx=\int_0^k \left((x^2-4)e^{-0,5x}-(-4e^{-0,5x})\right)dx=$
$=\int_0^k \left(x^2e^{-0,5x}-4e^{-0,5x}+4e^{-0,5x}\right)dx=\int_0^k x^2e^{-0,5x}dx$.

Une primitive de $x^2e^{-0,5x}$ est de la forme $(ax^2+bx+c)e^{-0,5x}$ et on doit avoir $\left((ax^2+bx+c)e^{-0,5x}\right)'=x^2e^{-0,5x}$.

On a $\left((ax^2+bx+c)e^{-0,5x}\right)'=(2ax+b)e^{-0,5x}+(ax^2+bx+c)(-0,5e^{-0,5x})=$
$=(2ax+b-0,5ax^2-0,5bx-0,5c)e^{-0,5x}=(-0,5ax^2+(2a-0,5b)x+b-0,5c)e^{-0,5x}$.

Par identification avec $x^2e^{-0,5x}$, on doit avoir $-0,5a=1$, $2a-0,5b=0$ et $b-0,5c=0$. $-0,5a=1 \Rightarrow a=-2$. $2a-0,5b=0 \Rightarrow -4-0,5b=0 \Rightarrow 0,5b=-4$ $\Rightarrow b=-8$. $b-0,5c=0 \Rightarrow -8-0,5c=0 \Rightarrow 0,5c=-8 \Rightarrow c=-16$.

Une primitive de $x^2e^{-0,5x}$ est donc $(-2x^2-8x-16)e^{-0,5x}$.

Par conséquent, $A(k) = \int_0^k x^2 e^{-0,5x} dx = (-2x^2-8x-16)e^{-0,5x} \Big|_0^k$

$= (-2k^2-8k-16)e^{-0,5k} - (-16) = 16 - (2k+8k+16)e^{-0,5k}$.

On a alors $\lim_{k \to +\infty} A(k) = \lim_{k \to +\infty} \left(16 - (2k+8k+16)e^{-0,5k}\right) = \text{"}16 - (+\infty)\cdot 0_+\text{"} = 16$

car $e^{-0,5k}$ "gagne" sur $2k+8k+16$.

Par conséquent, $\lim_{k \to +\infty} A(k) = 16$.

e) Le graphe de $h(x) = \ln(f(x))$ est dans la partie a) (en vert).
Le domaine de définition de h correspond au x tel que $f(x) > 0$.
D'après a), on a donc $D_h =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$.

$\ln(m \cdot n) = \ln(m) + \ln(n)$

f) Pour $x > 2$, on a $h(x) = \ln(f(x)) = \ln\left((x^2-4)\cdot e^{-0,5x}\right) =$

$= \ln(x^2-4) + \ln(e^{-0,5x}) = \ln\left((x+2)(x-2)\right) - 0,5x =$

$= \ln(x+2) + \ln(x-2) - 0,5x$.

Ainsi, on a bien $h(x) = ax + \ln(x+b) + \ln(x-b)$ avec $a = -0,5$ et $b = 2$.

h admettra une asymptote oblique lorsque $x \to +\infty$ de la forme $y = mx + h$
si $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x}$ existe, et, si m existe, $h = \lim_{x \to +\infty} (h(x) - mx)$ existe.

On a $h(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2) - 0,5x$ et $\frac{h(x)}{x} = \frac{\ln(x+2)}{x} + \frac{\ln(x-2)}{x} - 0,5$.

Comme, lorsque $x \to +\infty$, $\ln(x)$ "perd" par rapport à x, on a :

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x+2)}{x} + \frac{\ln(x-2)}{x} - 0,5 \right) = 0 + 0 - 0,5 = -0,5$.

On a alors $h(x) - mx = \ln(x+2) + \ln(x-2) - 0,5x - (-0,5)x =$

$= \ln(x+2) + \ln(x-2)$.

Ainsi $h = \lim_{x \to +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(x+2) + \ln(x-2)\right) = +\infty + \infty = +\infty$.

Par conséquent, h n'existe pas, et on conclut que h n'a pas d'asymptote oblique lorsque $x \to +\infty$.

g) On doit résoudre $y' = y \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\right)$ $(x \neq 0)$.

$y' = y \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\right) dx$

$\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| - 0,5x + C \Rightarrow |y| = e^{2\ln|x| - 0,5x + C} =$

$= e^{2\ln|x|} \cdot e^{-0,5x} \cdot e^{C} = e^{\ln(|x|^2)} \cdot e^{-0,5x} \cdot e^{C} = |x|^2 \cdot e^{-0,5x} \cdot e^{C} =$

$= e^c \cdot x^2 \cdot e^{-0,5x} \Rightarrow y = \pm e^c \cdot x^2 \cdot e^{-0,5x}.$

En posant $C = \pm e^c$, la solution de l'équation différentielle est

$$y = Cx^2 e^{-0,5x}.$$

Exercice 2

On a $F = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u_1}; \vec{u_2}; \vec{u_3})$.

a) $\vec{v}$ est vecteur propre de f si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$, on a $F\vec{v} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 16-2+2m \\ -4+5+4m \\ 4+4+5m \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14+2m \\ 1+4m \\ 8+5m \end{pmatrix}$.

$F\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14+2m \\ 1+4m \\ 8+5m \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 14+2m \\ 1+4m \\ 8+5m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\lambda \\ 9\lambda \\ 9\lambda m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 14+2m = 18\lambda \\ 1+4m = 9\lambda \\ 8+5m = 9\lambda m \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} 14+2m = 18\lambda \\ 1+4m = 9\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 12-6m = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \lambda = 1$

$8+5m = 9\lambda m \Rightarrow 8+5\cdot 2 = 18,\ 9\cdot 1\cdot 2 = 18$.

Par conséquent, si $m=2$, $\vec{v}$ est un vecteur propre de f et la valeur propre correspondante est $\lambda = 1$.

b) Les valeurs propres de f sont les λ solutions de $\det(F-\lambda I) = 0$.

On sait que $\det(F-\lambda I) = -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda$.

Ainsi $\det(F-\lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2-2\lambda+1) = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda-1)^2 = 0$

$\Rightarrow$ soit $\lambda_1 = 0$, soit $\lambda_2 = 1$ (ce qui est cohérent avec a)).

Les valeurs propres de F sont donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.

Avec $\lambda_1 = 0$: $F\vec{v} = \lambda_1\vec{v} \Rightarrow \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8v_1 - 2v_2 + 2v_3 = 0 & (1) \\ -2v_1 + 5v_2 + 4v_3 = 0 & (2) \\ 2v_1 + 4v_2 + 5v_3 = 0 & (3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ 4v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ (1)+4\cdot(2)\ \ 18v_2 + 18v_3 = 0 \\ (1)-4\cdot(3)\ \ -18v_2 - 18v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1 = v_2 - v_3 \\ v_2 = -v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1 = -2v_3 \\ v_2 = -v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_3 = -2v_1 \\ v_2 = -v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = -2v_1 \\ v_2 = 2v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix}$; avec $v_1 = 1$, on obtient le vecteur propre $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = 1$: $F\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Rightarrow \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8v_1 - 2v_2 + 2v_3 = 9v_1 \\ -2v_1 + 5v_2 + 4v_3 = 9v_2 \\ 2v_1 + 4v_2 + 5v_3 = 9v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 - 2v_2 + 2v_3 = 0 \\ -2v_1 - 4v_2 + 4v_3 = 0 \\ 2v_1 + 4v_2 - 4v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 + 2v_2 - 2v_3 = 0$; d'après a), un des vecteurs propres correspondants est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; un autre est $\vec{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; on peut aussi dire que le sous-espace propre correspondant est le plan $x+2y-2z=0$.

c) Comme un vecteur perpendiculaire au plan $x+2y-2z=0$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et que la valeur propre associée à $\vec{v_1}$ est 0, on peut donc dire que f est la projection orthogonale sur le plan $x+2y-2z=0$.

d) On a $\vec{a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\n\end{pmatrix}$.

La base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ sera orthonormée si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ et $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|=1$.

On a : $\|\vec{a}\| = \left\|\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$;

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\n\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\n\end{pmatrix} = \frac{1}{9}(-2+4-2n) = \frac{1}{9}(2-2n) =$$
$$= \frac{2}{9}(1-n).$$

Ainsi $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longrightarrow \frac{2}{9}(1-n)=0 \Longrightarrow 1-n=0 \Longrightarrow n=1$.

Avec $n=1$, on a : $\|\vec{b}\| = \left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$.

Un vecteur perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$ sera $\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{b}$ (on a alors $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ et $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$).

On a : $\vec{a}\wedge\vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\wedge\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\cdot1-(-2)\cdot2\\(-2)\cdot(-2)-1\cdot1\\1\cdot2-2\cdot(-2)\end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Avec $\vec{c} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, on a $\|\vec{c}\| = \left\|\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$.

On a donc $n=1$ et $\vec{c} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

e) La matrice de passage de la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ à la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ est, puisque $\vec{a}=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&2/3\\2/3&2/3&1/3\\-2/3&1/3&2/3\end{pmatrix}$.

Par définition, P est une matrice orthogonale et on a $P^{-1}={}^tP$.

La matrice de f dans la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ est alors donnée par

$$F' = P^{-1}FP = {}^tPFP = \begin{pmatrix}1/3&2/3&-2/3\\-2/3&2/3&1/3\\2/3&1/3&2/3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/3&-2/3&2/3\\2/3&2/3&1/3\\-2/3&1/3&2/3\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{81}\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-18&18\\0&18&9\\0&9&18\end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&81&0\\0&0&81\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

La matrice de f dans la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ est donc $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

f) On va commencer par écrire la matrice G' de g dans la base orthonormée $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$, où $\vec{a}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ (voir d)).

D'après e), la matrice de passage de la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ à la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ est

$$P=\begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix} \text{ et on a } P^{-1}={}^tP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

On a alors $G'=P^{-1}GP=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 8 & 4\\ -4 & 4 & -7\\ -8 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 18 & 18\\ 18 & 9 & -18\\ -18 & 18 & -9\end{pmatrix}=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -81\\ 0 & 81 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ avec $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on en déduit que

g est bien une rotation autour d'une droite passant par l'origine parallèlement au vecteur $\vec{a}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et que l'angle de rotation est $\frac{\pi}{2}$ (90°).

g) La matrice de $g\circ f$ dans la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ est $G\cdot F=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 8 & 4\\ -4 & 4 & -7\\ -8 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}0 & 54 & 54\\ -54 & 0 & -27\\ -54 & 27 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2/3 & 2/3\\ -2/3 & 0 & -1/3\\ -2/3 & 1/3 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

h) On va chercher les images par h des vecteurs de la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$.

On a $h(\vec{u_1})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot0-(-2)\cdot0\\ -2\cdot1-1\cdot0\\ 1\cdot0-2\cdot2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$,

$h(\vec{u_2})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot0-(-2)\cdot1\\ -2\cdot0-1\cdot0\\ 1\cdot1-2\cdot0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et

$h(\vec{u_3})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot1-(-2)\cdot0\\ -2\cdot0-1\cdot1\\ 1\cdot0-2\cdot0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi, dans la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$, la matrice de h est $H=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Comme $H=G\cdot F$ (voir g)), on en conclut que $h=g\circ f$.

Exercice 3

On a $f(z) = z^2 - 9z + 22 + 4i$.

a) $z_1 = f(i) = i^2 - 9i + 22 + 4i = -1 - 9i + 22 + 4i = 21 - 5i$.

$z_2 = f(2+3i) = (2+3i)^2 - 9(2+3i) + 22 + 4i = 4 + 12i + 9i^2 - 18 - 27i + 22 + 4i =$

$= 4 + 12i - 9 - 18 - 27i + 22 + 4i = -1 - 11i$.

Ainsi, dans le plan de Gauss, on a $P_1(21;-5)$ et $P_2(-1;-11)$.

L'angle α à l'origine du triangle OP_1P_2 sera donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}}{\|\overrightarrow{OP_1}\| \cdot \|\overrightarrow{OP_2}\|}$.

On a : $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \end{pmatrix} = -21 + 55 = 34$,

$\|\overrightarrow{OP_1}\| = \sqrt{21^2 + (-5)^2} = \sqrt{441 + 25} = \sqrt{466}$ et

$\|\overrightarrow{OP_2}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-11)^2} = \sqrt{1 + 121} = \sqrt{122}$.

Ainsi, $\cos(\alpha) = \dfrac{34}{\sqrt{466} \cdot \sqrt{122}} \cong 0{,}143$, d'où $\alpha \cong 81{,}8°$.

b) Les points fixes de z sont les z tels que $f(z) = z$.

$f(z) = z \Rightarrow z^2 - 9z + 22 + 4i = z \Rightarrow z^2 - 10z + 22 + 4i = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -10$ et $c = 22 + 4i$. On a $\Delta =$ $= b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (22 + 4i) = 100 - 88 - 16i = 12 - 16i$. Il faut chercher les racines carrées de $\Delta = 12 - 16i$.

Commençons par écrire $\Delta = a + bi$ sous la forme $\Delta = r\,\text{cis}(\varphi)$. On a $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. Ici $a = 12$ et $b = -16$. Ainsi $r = \sqrt{12^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-16}{12}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) \cong -53{,}13°$.

Les racines carrées de Δ sont alors données par $w_1 = \sqrt{r}\,\text{cis}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $w_2 = \sqrt{r}\,\text{cis}\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\right)$.

Ainsi, $w_1 = \sqrt{20}\,\text{cis}(-26{,}57°) = \sqrt{20}\left(\cos(-26{,}57) + i\sin(-26{,}57)\right) = 4 - 2i$ et

$w_2 = \sqrt{20}\,\text{cis}(153{,}43°) = \sqrt{20}\left(\cos(153{,}43°) + i\sin(153{,}43°)\right) = -4 + 2i = -w_1$.

On peut alors prendre $\sqrt{\Delta} = 4 - 2i$.

Ainsi, les solutions de $f(z) = z$ sont $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10 + 4 - 2i}{2} = \dfrac{14 - 2i}{2} = 7 - i$ et

$z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10 - (4 - 2i)}{2} = \dfrac{10 - 4 + 2i}{2} = \dfrac{6 + 2i}{2} = 3 + i$.

Par conséquent, les points fixes de f sont $z_1 = 7 - i$ et $z_2 = 3 + i$.

c) On a $f(x+iy) = (x+iy)^2 - 9(x+iy) + 22 + 4i = x^2 + 2xyi - y^2 - 9x - 9yi + 22 + 4i =$

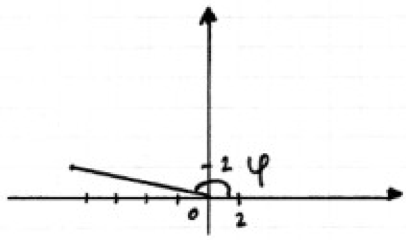
$= x^2 - y^2 - 9x + 22 + (2xy - 9y + 4)i$.

En posant $f(x+iy) = u + iv$, on a donc $u = x^2 - y^2 - 9x + 22$ et $v = 2xy - 9y + 4$.

d) D'après c), $f(x+iy) = u+iv$ avec $u = x^2-y^2-9x+22$ et $v = 2xy - 9y + 4$.
Avec $y = x-5$, on obtient $u = x^2-(x-5)^2 - 9x+22 = x^2-(x^2-10x+25) - 9x + 22 =$
$= x^2-x^2+10x-25-9x+22 = x-3$ et $v = 2x(x-5) - 9(x-5) + 4 =$
$= 2x^2-10x-9x+45+4 = 2x^2-19x+49 = 2(x^2-6x+9) - 7x - 31 =$
$= 2(x-3)^2 - 7x - 31 = 2(x-3)^2 - 7(x-3) - 10$.
Comme $x-3 = u$, on obtient $v = 2u^2 - 7u - 10$.
Par conséquent l'image de la droite $y = x-5$ est la parabole $v = 2u^2-7u-10$.

e) On a $g(z) = f(z+i) - z^2 = (z+i)^2 - 9(z+i) + 22 + 4i - z^2 =$
$= z^2 + 2zi - 1 - 9z - 9i + 22 + 4i - z^2 = 2zi + 21 - 9z - 5i = (2i-9)z + 21 - 5i$.
La multiplication par un nombre complexe correspond à la composition d'une rotation autour de l'origine suivie d'une homothétie centrée à l'origine.
L'addition d'un nombre complexe correspond à une translation.
Par conséquent, g correspond à la composition d'une rotation centrée en Ω et d'angle φ, suivie d'une homothétie de centre Ω et de rapport λ.
Le centre de rotation est donné par le point fixe de z:
$$g(z) = z \implies (2i-9)z + 21 - 5i = z \implies (2i-10)z + 21 - 5i = 0$$
$$\implies z = \frac{-21+5i}{-10+2i} = \frac{(-21+5i)(-10-2i)}{(-10+2i)(-10-2i)} = \frac{210+42i-50i+10}{100+4} = \frac{220-8i}{104} = \frac{55}{26} - \frac{1}{13}i.$$
Ainsi, le centre de rotation (et aussi d'homothétie) est $\Omega = \frac{55}{26} - \frac{1}{13}i$.

L'angle de rotation est donné par $\varphi = \arg(2i-9) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-9}\right) \cong -12{,}53° + 180° =$
$= 167{,}47$:



Le rapport d'homothétie est donné par le module de $2i-9$:
$$\lambda = |-9+2i| = \sqrt{(-9)^2+2^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}.$$

Ainsi, g est la composition d'une rotation centrée en $\frac{55}{26} - \frac{1}{13}i$ et d'angle $167{,}47°$ et d'une homothétie centrée en $\frac{55}{26} - \frac{1}{13}i$ et de rapport $\sqrt{85}$.

Exercice 4

a) On va utiliser la loi binomiale : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X compte le nombre de morceau que Paul joue, k est le nombre de morceaux joués par Paul, n est le nombre total de morceaux joués et p est la probabilité que Paul joue lors d'un morceau.

Ici, $k=4$, $n=9$ et $p=\frac{1}{2}$.

Ainsi $P(X=4)=\binom{9}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^{9-4}=126\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^5=126\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{126}{512}=\frac{63}{256}\cong 0{,}2461=24{,}61\%$.

b) Ici, $k\geqslant 2$, $n=9$ et $p=\frac{2}{5}$.

Ainsi $P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{9}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(1-\frac{2}{5}\right)^{9-0}-\binom{9}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(1-\frac{2}{5}\right)^{9-1}=$

$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^9-9\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^8=1-\frac{3^9}{5^9}-\frac{2\cdot 3^{10}}{5^9}=\frac{5^9-3^9-2\cdot 3^{10}}{5^9}=\frac{1'815'344}{1'953'125}\cong 0{,}9295=92{,}95\%$.

c) On a $P(X=1)=P(\text{Paul ne joue pas le } 1^{\text{er}} \text{ morceau})=1-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$,

$P(X=2)=P(\text{Paul joue le } 1^{\text{er}} \text{ morceau, mais pas le } 2^{\text{e}})=\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{100}$,

$P(X=3)=P(\text{Paul joue les 2 premiers morceaux, mais pas le } 3^{\text{e}})=\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}=\frac{81}{1000}$ et

$P(X=n)=P(\text{Paul joue les } (n-1) \text{ premiers morceaux, mais pas le } n^{\text{e}})=\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{10}=$

$=\frac{9^{n-1}}{10^n}$.

d) $P(X \text{ impair})=P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)+\ldots=$

$=\frac{1}{10}+\frac{9^2}{10^3}+\frac{9^4}{10^5}+\ldots=\frac{1}{10}\left(1+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^4+\ldots\right)=$

$=\frac{1}{10}\left(1+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\left(\frac{9}{10}\right)^2\right)^2+\left(\left(\frac{9}{10}\right)^2\right)^3+\ldots\right)$.

Or, on sait que, si $|r|<1$, on a $1+r+r^2+r^3+\ldots=\frac{1}{1-r}$ (série géométrique).

Ici, $r=\left(\frac{9}{10}\right)^2=\frac{81}{100}$.

Ainsi $P(X \text{ impair})=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{81}{100}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{19/100}=\frac{1}{10}\cdot\frac{100}{19}=\frac{10}{19}\cong 0{,}5263=52{,}63\%$.

e) On a des probabilités conditionnelles : $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

1) Ici, A = Paul joue le morceau complètement et B = Paul joue.

On a $A\cap B$ = Paul joue le morceau complètement, $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ et $P(B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$.

Ainsi $P(A|B)=\frac{2/5}{9/10}=\frac{2}{5}:\frac{9}{10}=\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{9}=\frac{4}{9}=0{,}\overline{4}=44{,}\overline{4}\%$.

2) Ici, A = Paul joue le morceau partiellement et B = Paul joue.

On a $A\cap B$ = Paul joue le morceau partiellement, $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$ et $P(B)=\frac{9}{10}$.

Ainsi $P(A|B)=\frac{1/2}{9/10}=\frac{1}{2}:\frac{9}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}=\frac{5}{9}=0{,}\overline{5}=55{,}\overline{5}\%$.

f) P(Paul commette 1 erreur) = P(Paul joue le morceau entièrement) · P(Paul fasse une erreur lorsqu'il joue le morceau entièrement) + P(Paul joue le morceau partiellement) · P(Paul fasse une erreur

lorsqu'il joue le morceau partiellement) $= \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{13} + \frac{5}{9}\cdot\frac{2}{13} = \frac{16+10}{117} = \frac{26}{117} = \frac{2}{9}$
(en utilisant les résultats de e)).

g) On a P(Paul commette au moins une erreur) = 1 − P(Paul ne commette aucune erreur).
Sur un morceau, la probabilité que Paul ne commette aucune erreur est 1 − probabilité que Paul commette une erreur $= 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ (voir e)).
Ainsi, si n morceaux (n à déterminer), P(Paul ne commette aucune erreur) $= \left(\frac{7}{9}\right)^n$.
Par conséquent, P(Paul commette au moins une erreur) $= 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^n$.
On doit trouver n tel que P(Paul commette au moins une erreur) $> 0{,}989$, d'où
$1 - \left(\frac{7}{9}\right)^n > 0{,}989$, d'où $\left(\frac{7}{9}\right)^n < 0{,}011$.
Comme la fonction log est croissante ($x < y \Rightarrow \log(x) < \log(y)$), on obtient
$\log\left(\left(\frac{7}{9}\right)^n\right) < \log(0{,}011)$.
Avec la propriété du log : $\log(a^n) = n\log(a)$, on trouve $n \log\left(\frac{7}{9}\right) < \log(0{,}011)$.
Comme $\log\left(\frac{7}{9}\right) < 0$, on obtient $n > \frac{\log(0{,}011)}{\log(7/9)} \cong 17{,}95$.

L'orchestre devra donc jouer 18 morceaux au minimum.

h) Notons N le nombre de personnes dans l'orchestre (y compris Paul).
Si le jeu est équitable, l'espérance de gain pour Paul (par exemple) est nulle.
S'il ne fait pas de faute, Paul gagne $\frac{1}{2}(N-1)$. La probabilité qu'il ne fasse pas de faute est $\frac{7}{9}$ (voir g)).
S'il fait une faute, Paul gagne 14.–. La probabilité qu'il commette une faute est $\frac{2}{9}$ (voir f)).
L'espérance de gain de Paul est donc $E = \frac{1}{2}(N-1)\cdot\frac{7}{9} - 14\cdot\frac{2}{9} = \frac{7}{18}(N-1) - \frac{28}{9}$.
Comme on doit avoir $E = 0$, on obtient $\frac{7}{18}(N-1) - \frac{28}{9} = 0 \Rightarrow \frac{7}{18}(N-1) = \frac{28}{9}$
$\Rightarrow N-1 = \frac{28}{9} : \frac{7}{18} = \frac{\cancel{28}^{4}}{\cancel{9}_{1}}\cdot\frac{\cancel{18}^{2}}{\cancel{7}_{1}} = 8 \Rightarrow N = 9.$

Il y a donc 9 personnes dans l'orchestre (y compris Paul).