Lycée Jean-Piaget
Neuchâtel

Mathématiques

Examen de maturité 2009

Corrigé

Problème 1

On a $f(x) = \frac{4x^2+1}{2x}$.

1) Comme on doit avoir $x \neq 0$, on a $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.

2) $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^2+1}{2x} = 0 \Rightarrow 4x^2+1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = -1$ exclu $\Rightarrow$ pas de zéro.

Tableau de signes:

x		0	
$f(x)$	$-$	////	$+$

3) On a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{4x^2+1}{2x} = \frac{1}{0_-} = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2+1}{2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Ainsi, $x=0$ est asymptote verticale.

De plus, $f(x) = \frac{4x^2+1}{2x} = \frac{4x^2}{2x} + \frac{1}{2x} = 2x + \frac{1}{2x}$.

Comme $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2x} = 0^-$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0^+$, $y = 2x$ est une asymptote oblique et le graphe de f s'approche de $y=2x$ par au-dessous à $-\infty$ et par au-dessus à $+\infty$.

4) On a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 4x^2+1$ et $v = 2x$. Comme $u' = 8x$ et $v' = 2$, on a

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{8x \cdot 2x - (4x^2+1)\cdot 2}{(2x)^2} = \frac{16x^2 - 8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{8x^2-2}{4x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x^2-2}{4x^2} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}.$$

Avec $x = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1+1}{1} = 2$.

Avec $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1+1}{-1} = -2$.

Tableau de croissance:

x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	////	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	max	↘	////	↘	min	↗

Ainsi, f est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, atteint un max en $(-\frac{1}{2}; -2)$, est décroissante sur $]-\frac{1}{2}; 0[$, est décroissante sur $]0; \frac{1}{2}[$, atteint un min en $(\frac{1}{2}; 2)$ et est croissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

5) On a $f'(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=8x^2-2$ et $v=4x^2$. Comme $u'=16x$ et $v'=8x$, on a

$$f''(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{16x\cdot 4x^2-(8x^2-2)\cdot 8x}{(4x^2)^2}=\frac{64x^3-64x^3+16x}{16x^4}=\frac{16x}{16x^4}=\frac{1}{x^3}.$$

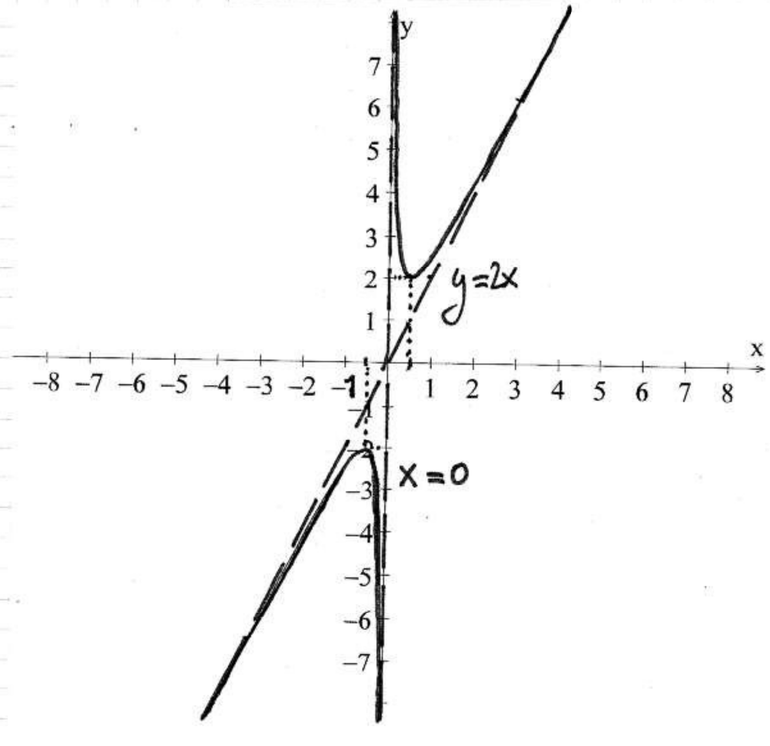
$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x^3}=0$ exclut $\Rightarrow$ il n'y a pas de point d'inflexion.

Tableau de courbure:

x		0	
$f''(x)$	$-$	//	$+$
$f(x)$	concave	//	convexe

Ainsi, f est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$.

6)



Problème 2

2A. 1) On a $f(x) = \ln(3-2x)$.

L'équation de la tangente en $x_0 = 1$ est de la forme $y = mx + h$, où $m = f'(x_0)$ et $h = f(x_0) - mx_0$.

On a $f'(x) = \dfrac{1}{3-2x} \cdot (-2) = -\dfrac{2}{3-2x}$.

Ainsi $m = f'(x_0) = f'(1) = -\dfrac{2}{3-2\cdot 1} = -\dfrac{2}{1} = -2$.

En outre $f(x_0) = f(1) = \ln(3-2\cdot 1) = \ln(1) = 0$.

Ainsi $h = f(x_0) - mx_0 = 0 - (-2)\cdot 1 = 2$.

L'équation de la tangente en $x_0 = 1$ est donc $y = -2x+2$.

2) On a $g(x) = \ln(ax^3 - 2x^2 + 2x)$.

On doit chercher a pour que g admette exactement un extremum, autrement dit pour que $g'(x) = 0$ ait une solution unique.

On a $g'(x) = \dfrac{1}{ax^3-2x^2+2x} \cdot (3ax^2 - 4x + 2) = \dfrac{3ax^2-4x+2}{ax^3-2x^2+2x}$.

$g'(x) = 0 \implies \dfrac{3ax^2-4x+2}{ax^3-2x^2+2} = 0 \implies 3ax^2 - 4x + 2 = 0$

Ainsi, $3ax^2 - 4x + 2 = 0$ doit avoir une solution unique. Pour cela, il faut que son discriminant soit nul : $\Delta = 0 \implies (-4)^2 - 4\cdot 3a \cdot 2 = 0$

$\implies 16 - 24a = 0 \implies 24a = 16 \implies a = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$.

Ainsi, si $a = \dfrac{2}{3}$, g admet exactement un extremum.

2B. 1) Tableau de signe :

x		2	
$C(x)$	$+$	0	$-$

2) Tableau de croissance :

x		1	
$C'(x)$	$+$	0	$-$
$C(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

3) On a $C(x) = (-2x+4)e^x = u \cdot v$ avec $u = -2x+4$ et $v = e^x$.

Comme $u' = -2$ et $v' = e^x$, on a $C'(x) = u'v + uv' = -2e^x + (-2x+4)e^x =$
$= (-2x+2)e^x$.

$C'(x) = 0 \implies (-2x+2)e^x = 0 \implies -2x+2 = 0$ car $e^x > 0$ pour tout x
$\implies x = 1$.

D'après le tableau de croissance (voir 2)), l'abscisse du maximum de C est bien $x = 1$.

4) Tableau de courbure :

x		0	
$C''(x)$	$+$	0	$-$
$C(x)$	convexe	P.I	concave

5) On a $C'(x) = (-2x+2)e^x = u \cdot v$ avec $u = -2x+2$ et $v = e^x$.

Comme $u' = -2$ et $v' = e^x$, on a $C''(x) = u'v + uv' = -2e^x + (-2x+2)e^x = -2xe^x$.

$C''(x) = 0 \Rightarrow -2xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$ car $e^x > 0$ pour tout x.

Ainsi, le point d'inflexion se situe bien sur l'axe Oy $(x=0)$.

6) $C(x) = d(x) \Rightarrow (-2x+4)e^x = -2x+4 \Rightarrow (-2x+4)e^x - (-2x+4) = 0$

$\Rightarrow (-2x+4)(e^x - 1) = 0 \Rightarrow$ soit $-2x+4 = 0 \Rightarrow x = 2$,

soit $e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$.

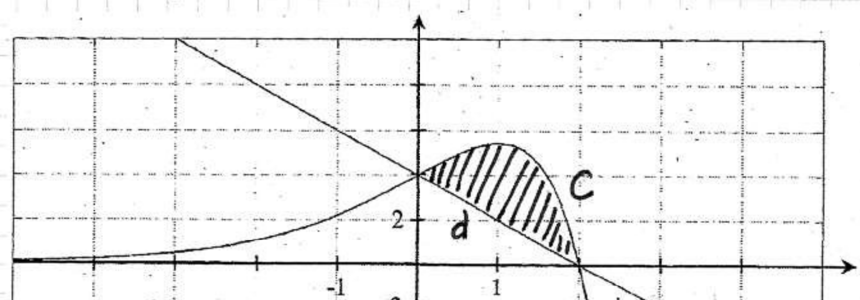
Avec $x = 2$, on a $d(x) = -2x+4 = 0$.

Avec $x = 0$, on a $d(x) = -2x+4 = 0$.

Ainsi, les points d'intersection de C et d sont bien $I(0;4)$ et $J(2;0)$.

7) On a $S = \int_0^2 (-2x+4)(e^x-1)dx = \int_0^2 (-2x+4)e^x dx - \int_0^2 (-2x+4)dx =$

$= \int_0^2 C(x)dx - \int_0^2 d(x)dx = \int_0^2 (C(x) - d(x))dx =$ aire de la surface comprise entre les graphes des fonctions C et d et les droites $x=0$ et $y=0$:



8) On va intégrer par parties : $\int uv'dx = uv - \int u'v dx$.

Avec $u = -2x+4$ et $v' = e^x - 1$, on a $u' = -2$ et $v = e^x - x$.

Ainsi $S = \int_0^2 (-2x+4)(e^x-1)dx = \int_0^2 uv'dx = [uv]_0^2 - \int_0^2 u'v dx =$

$= \left[(-2x+4)(e^x - x)\right]_0^2 - \int_0^2 (-2)(e^x - x)dx =$

$$= (-2\cdot2+4)(e^2-2) - (-2\cdot0+4)(e^0-0) + 2\int_0^2 e^x dx - 2\int_0^2 x\,dx =$$

$$= 0 - 4\cdot1 + 2\left[e^x\right]_0^2 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -4 + 2(e^2-e^0) - 2\left(\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) =$$

$$= -4 + 2e^2 - 2 - 4 = 2e^2 - 10 \cong 4{,}78.$$

Problème 3

1) On a : $C_1 : x^2+y^2-12x+4y-9=0$

$$\Rightarrow x^2-12x+y^2+4y-9=0$$
$$\Rightarrow x^2-12x+36-36+y^2+4y+4-4-9=0$$
$$\Rightarrow (x-6)^2-36+(y+2)^2-4-9=0$$
$$\Rightarrow (x-6)^2+(y+2)^2=49$$
$$\Rightarrow (x-6)^2+(y+2)^2=7^2.$$

Ainsi le centre K de C_1 est $K(6;-2)$ et son rayon est $r_1=7$.

2) Comme les rayons des 2 cercles sont égaux, il y a 2 axes de symétrie : le premier est la droite qui relie K et M et le deuxième est perpendiculaire au segment KM et passe par le milieu de KM.

3) On a $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\10\end{pmatrix}$

Ainsi, $\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}$ est orthogonal au 1^e axe. Il s'écrit donc $10x+11y+c=0$.

Avec $K(6;-2)$, on a $10\cdot6+11\cdot(-2)+c=0 \Rightarrow 38+c=0 \Rightarrow c=-38$.

L'équation du 1^e axe est donc : $10x+11y-38=0$.

$\begin{pmatrix}-11\\10\end{pmatrix}$ est orthogonal au 2^e axe. Il s'écrit donc $-11x+10y+c=0$.

Le milieu de KM est $\left(\frac{6-5}{2};\frac{-2+8}{2}\right) = \left(\frac{1}{2};3\right)$. Avec ce point, on a

$-11\cdot\frac{1}{2}+10\cdot3+c=0 \Rightarrow c=-\frac{49}{2}$.

L'équation du 2^e axe est donc : $-11x+10y-\frac{49}{2}=0$

$$\Rightarrow -22x+20y-49=0.$$

4) On a $\|\overrightarrow{KM}\| = \sqrt{(-11)^2+10^2} = \sqrt{221} \cong 14{,}866$.

Ainsi, la plus courte distance entre C_1 et C_2 est $\|\overrightarrow{KM}\|$ - rayon de C_1 - rayon de C_2 =

$$= \sqrt{221}-7-7 = \sqrt{221}-14 \cong 14{,}866-14 = 0{,}866.$$

5) Comme elles sont de pentes $m=3$, les équations de t_1 et t_2 sont de la forme
$y=3x+h \Rightarrow 3x-y+h=0$.
Comme ce sont des tangentes, il faut que leur distance au centre de C_2 (M) soit égal au rayon de C_2 (r_2) :

$$\frac{|3\cdot(-5)-8+h|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=7 \Rightarrow \frac{|-15-8+h|}{\sqrt{10}}=7 \Rightarrow |h-23|=7\sqrt{10}$$

$\Rightarrow$ soit $h-23=7\sqrt{10} \Rightarrow h=7\sqrt{10}+23$,
soit $h-23=-7\sqrt{10} \Rightarrow h=-7\sqrt{10}+23$.

Ainsi, les équations des tangentes sont: $t_1: 3x-y+7\sqrt{10}+23=0$ et
$t_2: 3x-y-7\sqrt{10}+23=0$.

6) On a $C_1: (x-6)^2+(y+2)^2=7^2$.
Pour $A(13;-2)$, c'est-à-dire $x=13$ et $y=-2$, on a bien
$(13-6)^2+(-2+2)^2=7^2$.
Ainsi A appartient à C_1.

La tangente t_3 est perpendiculaire à AK et passe par A.
On a $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}13\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi t_3 s'écrit $x+c=0$.
Avec $A(13;-2)$, on a $13+c=0 \Rightarrow c=-13$.
On a ainsi $t_3: x-13=0$

7) La pente de t_2 est $m=3$ (voir 5)).
De plus, $d: 10x+11y-38=0 \Rightarrow 11y=-10x+38 \Rightarrow y=-\frac{10}{11}x+\frac{38}{11}$.
Ainsi, la pente de d est $m'=-\frac{10}{11}$.

D'après Formulaires et Tables p. 51, l'angle φ entre t_2 et d est donné par

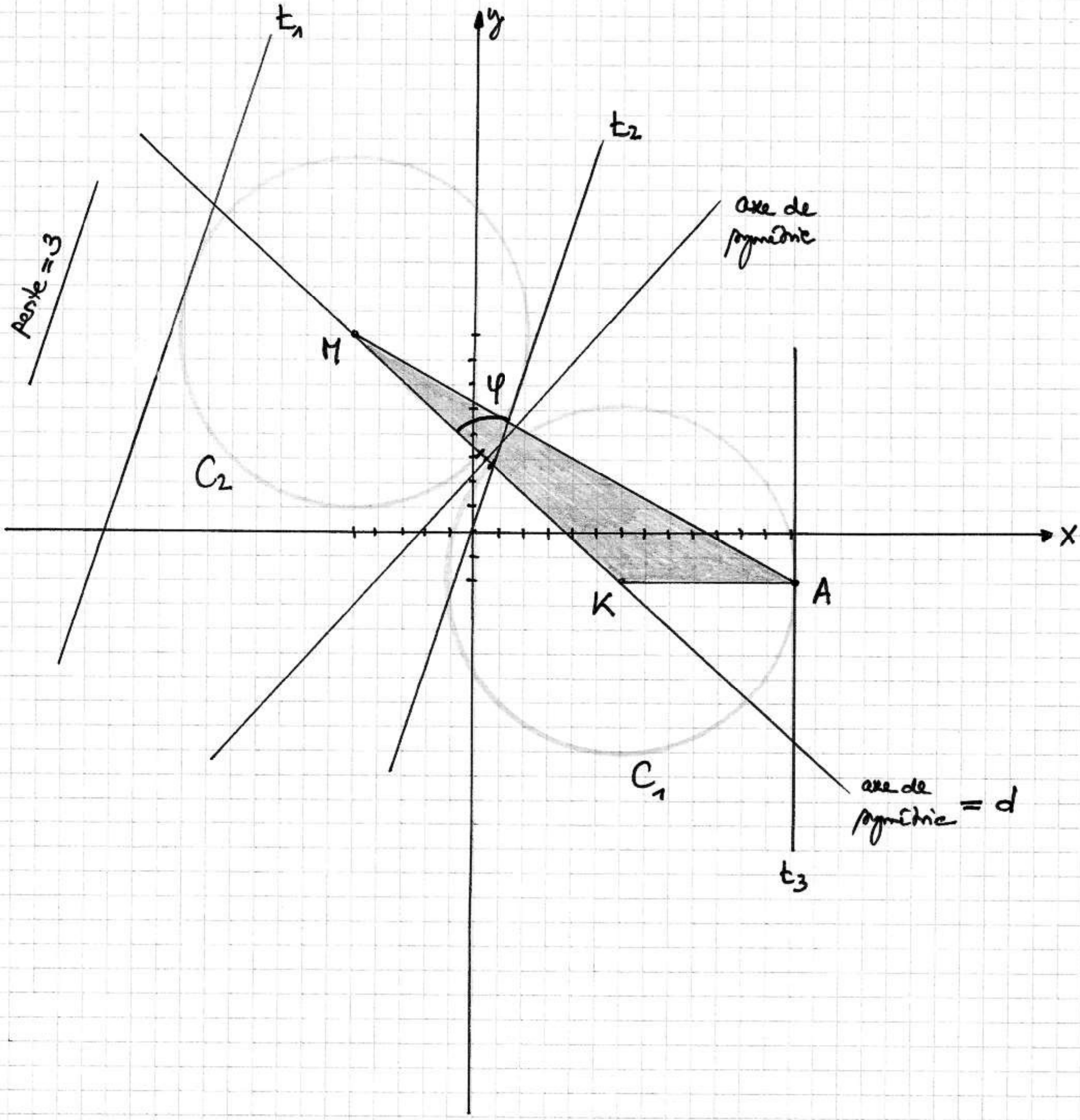
$$\tan(\varphi)=\left|\frac{m'-m}{1+mm'}\right|=\left|\frac{-\frac{10}{11}-3}{1+3(-\frac{10}{11})}\right|=\frac{43}{19} \Rightarrow \varphi\cong 66,16°.$$

Ainsi, l'angle entre t_2 et d est $\sim 66,16°$.

8) L'aire du triangle AMK est donné par la moitié du déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AK}=\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$ (voir 6)) et $\overrightarrow{KM}=\begin{pmatrix}-11\\10\end{pmatrix}$ (voir 3)) (en valeur absolue) :

$$\text{aire } AMK=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AK};\overrightarrow{KM})\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-7 & -11\\0 & 10\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-7\cdot10-0\cdot(-11)\right|=\frac{1}{2}\cdot70=35.$$

9)



t_1
y
t_2
axe de symétrie
pente = 3
M
φ
C_2
X
K
A
C_1
axe de symétrie = d
t_3

Problème 4

Partie A

1) prob(homme fume, femme pas) + prob(femme fume, homme pas) =

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{7}{15} \cong 46{,}67\%.$$

2) prob(au moins 1 homme fumeur parmi 3) = 1 − prob(0 homme fumeur parmi 3) =

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{98}{125} = 78{,}40\%.$$

3) prob(2 fumeurs parmi 5 hommes choisis) $= C_2^5 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 10\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{27}{125} =$

$$= \frac{216}{625} = 34{,}56\%.$$

4) Soit n = nombre de femme à choisir.

prob(au moins 1 femme fume parmi n) $> 99{,}5\%$

$\Longrightarrow$ 1 − prob(zéro femme fume parmi n) $> 0{,}995$

$\Longrightarrow$ prob(zéro femme fume parmi n) $< 0{,}005$

$\Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0{,}05$

$\Longrightarrow \log\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) < \log(0{,}05)$ (car $x<y \Longrightarrow \log(x)<\log(y)$)

$\Longrightarrow n\log\left(\frac{2}{3}\right) < \log(0{,}05)$ (car $\log(a^n) = n\log(a)$)

$\Longrightarrow n > \frac{\log(0{,}05)}{\log(2/3)}$ (car $\log\left(\frac{2}{3}\right) < 0$)

$\Longrightarrow n > 7{,}39$

$\Longrightarrow n = 8.$

Il faut donc choisir 8 femmes.

Partie B

C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

On a: A = Dominique soit un homme,

B = Dominique fume,

$A\cap B$ = Dominique est un homme qui fume,

$P(A\cap B) = \frac{9}{9+11}\cdot\frac{2}{5} = \frac{9}{20}\cdot\frac{2}{5} = \frac{9}{50}$ et

$$P(B) = \underbrace{\frac{9}{9+11}\cdot\frac{2}{5}}_{\text{homme fume}} + \underbrace{\frac{11}{9+11}\cdot\frac{1}{3}}_{\text{femme fume}} = \frac{9}{50} + \frac{11}{60} = \frac{109}{300}.$$

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{9/50}{109/300} = \frac{54}{109} \cong 49{,}54\%.$$

La probabilité que Dominique soit un homme est donc de $\sim 49{,}54\%$.