Lycée Denis-de-Rougemont Mathématiques de niveau 1

EXAMEN DE MATURITE 2010

Corrigé

Problème 1

a) On a $f(1)=0$, $f'(e)=0$ (point à tangente horizontale) et $f'(1)=-\frac{2}{1}=-2$ (pente de la tangente en $x=1$).

b) On a $f(x)=u\cdot v$ avec $u=a\ln(x)$ et $v=\ln(x)+b$. Comme $u'=a\cdot\frac{1}{x}=\frac{a}{x}$ et $v'=\frac{1}{x}$, on a $f'(x)=u'v+uv'=\frac{a}{x}(\ln(x)+b)+a\ln(x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{a\ln(x)}{x}+\frac{ab}{x}+\frac{a\ln(x)}{x}=\frac{2a\ln(x)}{x}+\frac{ab}{x}$.

c) $f(1)=0 \Rightarrow a\ln(1)\cdot(\ln(1)+b)=0$ OK pour toutes les valeurs de a et b.

$f'(e)=0 \Rightarrow \frac{2a\ln(e)}{e}+\frac{ab}{e}=0 \Rightarrow 2a+ab=0$ ①.

$f'(1)=-2 \Rightarrow \frac{2a\ln(1)}{1}+\frac{ab}{1}=-2 \Rightarrow ab=-2$ ②.

Par substitution de ② dans ①, on obtient $2a-2=0 \Rightarrow a=1$, d'où $b=-\frac{2}{a}=-2$.

Ainsi, $a=1$ et $b=-2$.

d) On a $f(x)=\ln(x)(\ln(x)-2)$.

Domaine de définition: $\ln(x)$ est définie pour $x>0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$.

Parité: comme $D_f=\mathbb{R}_+^*$, f n'est ni paire, ni impaire.

Intersections avec Ox (zéros de f): $f(x)=0 \Rightarrow \ln(x)(\ln(x)-2)=0$

$\Rightarrow$ soit $\ln(x)=0$, d'où $x=1$, soit $\ln(x)=2$, d'où $x=e^2$

$\Rightarrow (1;0)$ et $(e^2;0)$.

Intersections avec Oy: n'existe pas car $x=0\notin D_f$.

Tableau de signes:

x	0		1		e^2	
$f(x)$	////	$+$	0	$-$	0	$+$

Asymptotes verticales: comme $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}\ln(x)(\ln(x)-2)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$, $x=0$ est une asymptote verticale lorsque $x \underset{>}{\to} 0$.

Asymptotes non verticales: si elle existe, une asymptote non verticale est de la forme $y=mx+h$, avec $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et, si m existe, $h=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)(\ln(x)-2)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}=0$ car $\ln(x)$ et $\ln^2(x)$ perdent vis-à-vis de x. Ainsi, on a $m=0$.

On a alors $h=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)(\ln(x)-2)=+\infty$.

Par conséquent, f n'a pas d'asymptote non verticale.

Dérivée: D'après b), on a $f'(x)=\frac{2a\ln(x)}{x}+\frac{ab}{x}$. Comme $a=1$ et $b=-2$, on trouve $f'(x)=\frac{2\ln(x)}{x}+\frac{-2}{x}=\frac{2(\ln(x)-1)}{x}$. Son domaine est $D_{f'}=\mathbb{R}_+^*$.

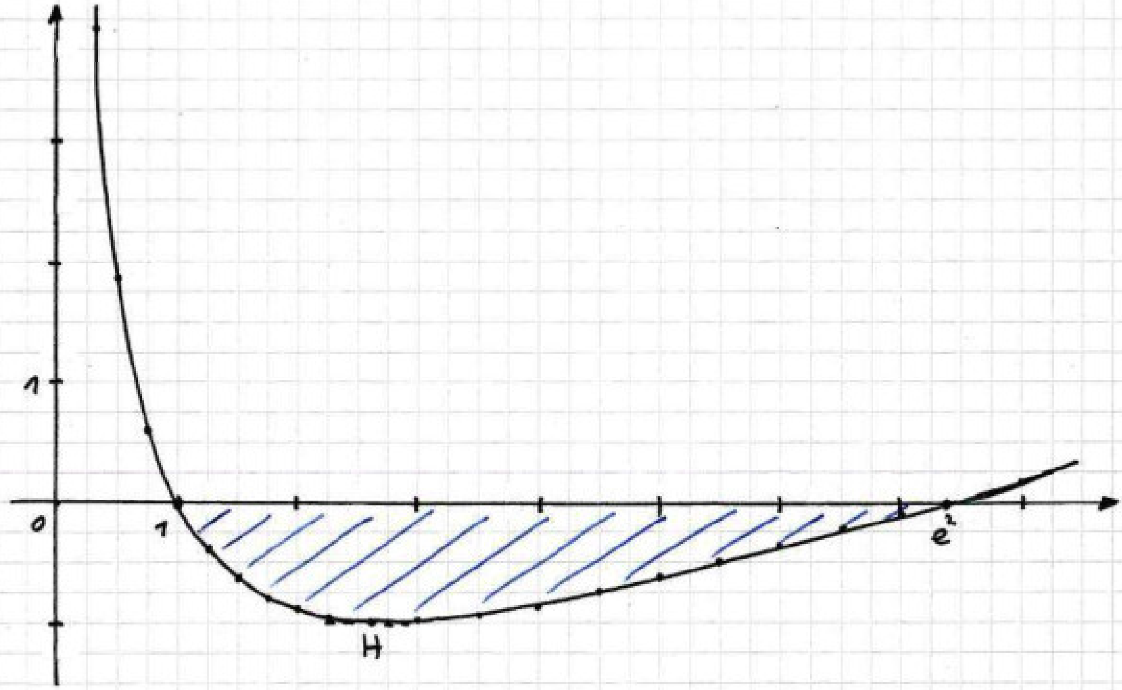
Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2(\ln(x)-1)}{x}=0 \Rightarrow \ln(x)-1=0 \Rightarrow x=e$;
avec $x=e$, on a $f(x)=\ln(e)\cdot(\ln(e)-2)=1\cdot(1-2)=-1$; l'unique point à tangente horizontale est $H(1;-e)$ (c'est cohérent avec le graphique de l'énoncé).

Tableau de croissance:

x		0		1	
$f'(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$			$\searrow$	min	$\nearrow$

Ainsi, $H(1;-e)$ est un minimum de f.

Graphe:



e) L'équation de la tangente au graphe de f en $x=1$ est $y=mx+h$, où $m=f'(1)$.
On a $f'(1)=\frac{2(\ln(1)-1)}{1}=-2$ (cohérent avec a)). L'équation de la tangente s'écrit donc $y=-2x+h$.
Un point de son graphe est $(1;f(1))=(1;0)$.
On a donc, par substitution, $0=-2+h \Rightarrow h=2$.
L'équation de la tangente au graphe de f en $x=1$ est donc $y=-2x+2$.
L'angle aigu α entre cette tangente et l'axe des abscisses est donné par $\tan(\alpha)=|$pente de la tangente$|=|-2|=2 \Rightarrow \alpha=\tan^{-1}(2)\cong 63,43°$.

f) Pour montrer que F est une primitive de f, il suffit de montrer que $F'=f$.
On a $F(x)=x\cdot(\ln^2(x)-4\ln(x)+4)=u\cdot v$ avec $u=x$ et $v=\ln^2(x)-4\ln(x)+4$.
Comme $u'=1$ et $v'=2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}-4\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln(x)-4}{x}$, on obtient
$F'(x)=u'v+uv'=1\cdot(\ln^2(x)-4\ln(x)+4)+x\cdot\frac{2\ln(x)-4}{x}=$
$=\ln^2(x)-4\ln(x)+4+2\ln(x)-4=\ln^2(x)-2\ln(x)=\ln(x)(\ln(x)-2)=f(x)$.
Ainsi, F est bien une primitive de f.

g) La surface est hachurée en bleu dans le graphique de la partie d).

On a : aire hachurée $= \left| \int_1^{e^2} f(x)\,dx \right| = \left| F(x) \Big|_1^{e^2} \right| =$

$= \left| e^2 \cdot (\ln^2(e^2) - 4\ln(e^2) + 4) - 1 \cdot (\ln^2(1) - 4\ln(1) + 4) \right| =$

$= \left| e^2 \cdot (2^2 - 4 \cdot 2 + 4) - 1 \cdot 4 \right| = \left| e^2 \cdot 0 - 4 \right| = |-4| = 4.$

L'aire hachurée vaut donc 4.

h) $f(x) = 2 \Rightarrow \ln(x)(\ln(x) - 2) = 2 \Rightarrow \ln^2(x) - 2\ln(x) - 2 = 0.$

Posons $u = \ln(x)$. L'équation s'écrit alors $u^2 - 2u - 2 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $au^2 + bu + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -2$. On a $\Delta = b^2 - 4ac =$ $= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Les solutions de $u^2 - 2u - 2 = 0$ sont alors $u_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$ et $u_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$.

Avec $u_1 = 1 + \sqrt{3}$ et $u = \ln(x)$, on obtient $\ln(x) = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x = e^{1+\sqrt{3}}$.

Avec $u_2 = 1 - \sqrt{3}$ et $u = \ln(x)$, on obtient $\ln(x) = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow x = e^{1-\sqrt{3}}$.

Ainsi, les solutions de $f(x) = 2$ sont $x = e^{1-\sqrt{3}} \cong 0,481$ et $x = e^{1+\sqrt{3}} \cong 15,364$.

Problème 2

On a Π : $2x + 2y - z - 9 = 0$, $A(-16;0;4)$ et $d: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 6-3\lambda \\ z = -1+\lambda . \end{cases}$

a) Par substitution des équations de d dans celle de Π, on a :

$2(1+2\lambda) + 2(6-3\lambda) - (-1+\lambda) - 9 = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda + 12 - 6\lambda + 1 - \lambda - 9 = 0$

$\Rightarrow -3\lambda + 6 = 0 \Rightarrow -3\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = 2.$

Avec $\lambda = 2$, on a $x = 1+2.2 = 5$, $y = 6-3.2 = 0$ et $z = -1+2 = 1$.

Ainsi, l'intersection de d et Π est bien $I(5;0;1)$.

b) Pour calculer l'angle α entre une droite et un plan, on commence par calculer l'angle aigu β entre un vecteur directeur de la droite et un vecteur orthogonal au plan et on a alors $\alpha = 90° - \beta$.

Un vecteur directeur de d est $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur orthogonal à Π est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{d} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2.2 + (-3).2 + 1.(-1) = 4 - 6 - 1 = -3$, $\|\vec{d}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{14}$ et $\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$

L'angle aigu β entre $\vec{d}$ et $\vec{n}$ est donné par $\cos(\beta) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{|-3|}{\sqrt{14} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{14}}$,

d'où $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \cong 74{,}5°$.

L'angle aigu α entre d et Π est alors $\alpha = 90° - 74{,}5° = 15{,}5°$.

c) Pour dessiner le plan Π, on cherche ses intersections avec les axes :

avec l'axe x : $y = z = 0 \Rightarrow 2x - 9 = 0 \Rightarrow x = 4{,}5 \Rightarrow I_x(4{,}5;0;0)$;

avec l'axe y : $x = z = 0 \Rightarrow 2y - 9 = 0 \Rightarrow y = 4{,}5 \Rightarrow I_y = (0;4{,}5;0)$;

avec l'axe z : $y = z = 0 \Rightarrow -z - 9 = 0 \Rightarrow z = -9 \Rightarrow I_z = (0;0;-9)$.

Pour dessiner la droite d, on cherche ses traces dans les plans de référence :

dans le sol : $z = 0 \Rightarrow -1+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow x = 3$ et $y = 3 \Rightarrow T_S(3;3;0)$;

dans la paroi : $y = 0 \Rightarrow 6 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow x = 5$ et $z = 1 \Rightarrow T_P(5;0;1)$;

dans le mur : $x = 0 \Rightarrow 1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -0{,}5 \Rightarrow y = 7{,}5$ et $z = -1{,}5 \Rightarrow T_m(0;7{,}5;-1{,}5)$.

Pour dessiner la projection de d dans le mur, on projette T_S, T_P et T_m dans le mur :

on obtient $T_S'(0;3;0)$, $T_P'(0;0;1)$ et $T_m'(0;7{,}5;-1{,}5)$.

d) Pour trouver les coordonnées de B, on va chercher des équations paramétriques de la droite e perpendiculaire à Π et passant par A et on aura alors $B = \Pi \cap e$.

Un vecteur orthogonal à Π, et donc parallèle à e, est $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de e sont donc : $\begin{cases} x = -16+2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 4-\lambda . \end{cases}$

Par substitution dans l'équation de Π, on obtient :

$2(-16+2\lambda) + 2(2\lambda) - (4-\lambda) - 9 = 0 \Rightarrow -32 + 4\lambda + 4\lambda - 4 + \lambda - 9 = 0$

$\Rightarrow 9\lambda - 45 = 0 \Rightarrow 9\lambda = 45 \Rightarrow \lambda = 5.$

Avec $\lambda = 5$, on trouve $x = -16 + 2\cdot 5 = -6$, $y = 2\cdot 5 = 10$ et $z = 4 - 5 = -1$.

Les coordonnées de B sont donc bien $B(-6;10;-1)$.

e) On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-6\\10\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-16\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\-5\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-16\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\0\\-3\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\10\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\-10\\2\end{pmatrix}$,

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{10^2 + 10^2 + (-5)^2} = \sqrt{225} = 15$,

$\|\overrightarrow{AI}\| = \sqrt{21^2 + (-3)^2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$ et

$\|\overrightarrow{BI}\| = \sqrt{11^2 + (-10)^2 + 2^2} = \sqrt{225} = 15$.

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BI}\|$, on en déduit que le triangle ABI est isocèle.

De plus $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BI}\|^2 = 15^2 + 15^2 = 225\cdot 2 \Rightarrow \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BI}\|^2} = 15\sqrt{2} = \|\overrightarrow{AI}\|$.

Ainsi, le triangle ABI est rectangle en B.

Par conséquent, le triangle ABI est isocèle rectangle en B.

f) Avec $P(11;0;z)$ dans $\Pi: 2x + 2y - z - 9$, on a $2\cdot 11 + 2\cdot 0 - z - 9 = 0$

$\Rightarrow 13 - z = 0 \Rightarrow z = 13$.

Le tétraèdre ABIP est une pyramide de base ABI et de sommet P ou une pyramide de base BIP et de sommet A. On va choisir cette 2e possibilités, car, comme le triangle ABI est rectangle (voir e)), la hauteur du tétraèdre sera $\|\overrightarrow{AB}\| = 15$.

Cherchons l'aire du triangle BIP.

On a aire $BIP = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{BP}\|$.

$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\10\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\-10\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}11\\0\\13\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\10\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\-10\\14\end{pmatrix}$

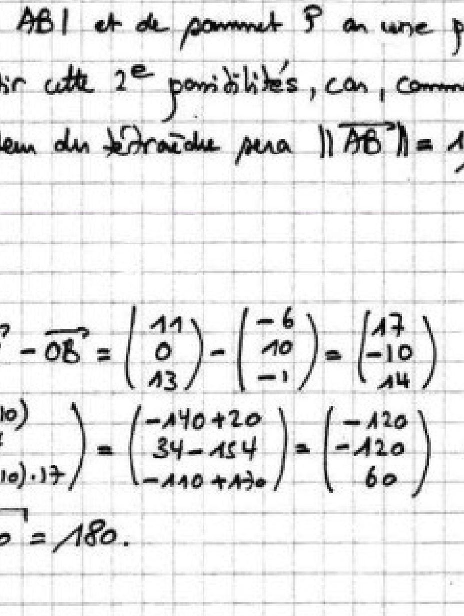
$\Rightarrow \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix}11\\-10\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}17\\-10\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\cdot 14 - 2\cdot(-10)\\ 2\cdot 17 - 11\cdot 14\\ 11\cdot(-10) - (-10)\cdot 17\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-140+20\\34-154\\-110+170\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-120\\-120\\60\end{pmatrix}$ et

$\|\overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{BP}\| = \sqrt{(-120)^2 + (-120)^2 + 60^2} = \sqrt{32400} = 180$.

On a donc aire $BIP = \frac{1}{2}\cdot 180 = 90$.

Par conséquent, le volume du tétraèdre $ABIP = \dfrac{90\cdot 15}{3} = 450$.

g) On a la situation schématisée suivante:



P est le point cherché.

D'après d), on a e: $\begin{cases} x = -16 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$

Par substitution dans

$S: (x+16)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 100$

(équation de la sphère centre en A et de rayon 10), on obtient:

$(-16+2\lambda+16)^2+(2\lambda)^2+(4-\lambda-4)^2=100 \Rightarrow (2\lambda)^2+(2\lambda)^2+(-\lambda)^2=100$

$\Rightarrow 4\lambda^2+4\lambda^2+\lambda^2=100 \Rightarrow 9\lambda^2=100 \Rightarrow \lambda^2=\frac{100}{9} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{10}{3}.$

Avec $\lambda=\frac{10}{3}$, on obtient $x=-16+2\cdot\frac{10}{3}=-\frac{28}{3}$, $y=2\cdot\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$ et $z=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$.

Avec $\lambda=-\frac{10}{3}$, on obtient $x=-16+2\cdot(-\frac{10}{3})=-\frac{68}{3}$, $y=2\cdot(-\frac{10}{3})=-\frac{20}{3}$ et $z=4+\frac{10}{3}=\frac{22}{3}$.

L'intersection de e et S nous donne ainsi 2 points:

$$P_1\left(-\frac{28}{3};\frac{20}{3};\frac{2}{3}\right) \quad \text{et} \quad P_2\left(-\frac{68}{3};-\frac{20}{3};\frac{22}{3}\right).$$

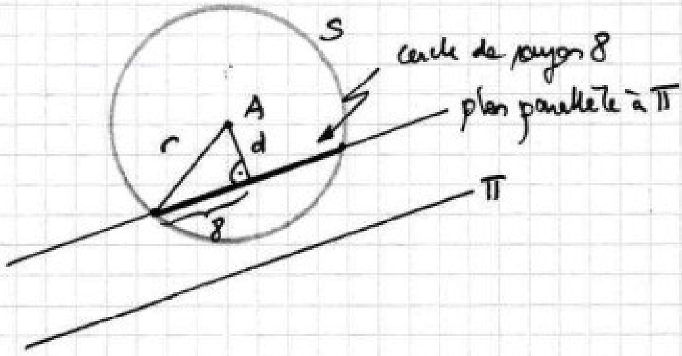
Pour déterminer lequel est le plus proche de Π, on va calculer leur distance à Π:

$$\text{dist}(P_1;\Pi)=\frac{|2\cdot(-\frac{28}{3})+2\cdot\frac{20}{3}-\frac{2}{3}-9|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|-15|}{3}=\frac{15}{3}=5\ ;$$

$$\text{dist}(P_2;\Pi)=\frac{|2\cdot(-\frac{68}{3})+2\cdot(-\frac{20}{3})-\frac{22}{3}-9|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|-75|}{3}=\frac{75}{3}=15.$$

Ainsi, le point de S le plus proche de Π est $P=P_1=\left(-\frac{28}{3};\frac{20}{3};\frac{2}{3}\right)$.

h) Les plans α et β parallèles à Π auront pour équation $2x+2y-z+d=0$.
On a la situation schématisée suivante:



Le rayon de la sphère S est $r=10$.

En utilisant le théorème de Pythagore, on a $d^2=r^2-8^2=10^2-8^2=100-64=36$
$\Rightarrow d=6$.

Par conséquent, les plans α et β sont à distance 6 de A: $\text{dist}(A;\alpha \text{ ou } \beta)=6$.

On a donc $\frac{|2\cdot(-16)+2\cdot 0-4+d|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=6 \Rightarrow \frac{|-36+d|}{3}=6 \Rightarrow |-36+d|=18$

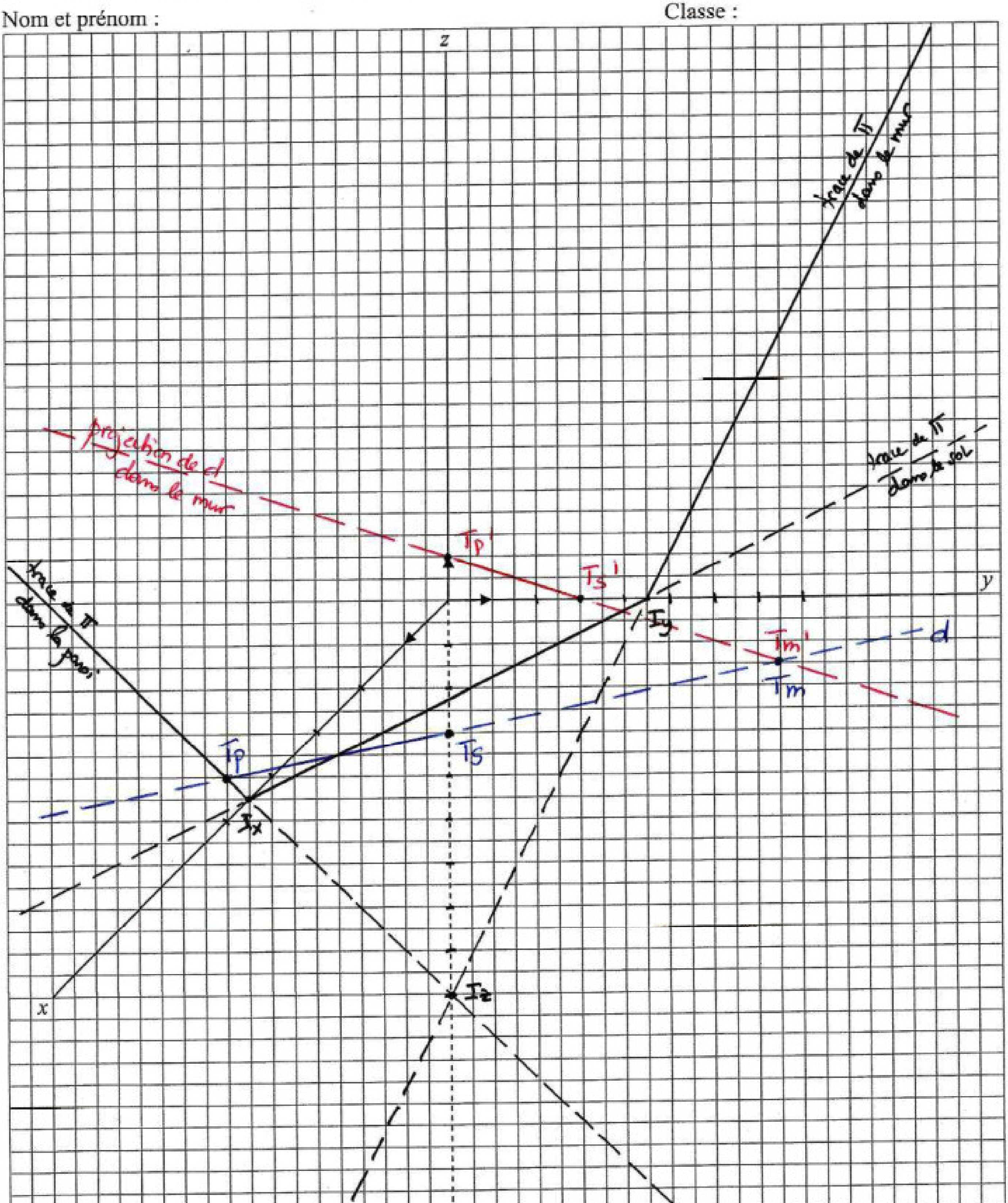
$\Rightarrow$ soit $-36+d=18 \Rightarrow d=54$,

soit $-36+d=-18 \Rightarrow d=18$.

Les plans α et β cherchés sont donc: α: $2x+2y-z+54=0$,

β: $2x+2y-z+18=0$.

Nom et prénom : Classe :



Problème 3

a) On utilise la loi binomiale : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où X compte le nombre de voitures défectueuses à la sortie de la chaîne de montage, k est le nombre de voitures défectueuses, n le nombre total de voitures qui sortent et p est la probabilité qu'une voiture soit défectueuse.

Ici, $k=5$, $n=10$, $p = 15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$, $1-p = 1-\frac{3}{20} = \frac{17}{20}$, $n-k=5$.

Ainsi, $P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^5 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^5 = 0{,}00849 = 0{,}849\%$.

b) La probabilité qu'une voiture soit défectueuse à la sortie de la chaîne de montage est $15\% = \frac{3}{20}$.

La probabilité que A la détecte est $90\% = \frac{9}{10}$.

Par conséquent, la probabilité que la voiture soit défectueuse et que la défectuosité soit détectée par A est la probabilité que la voiture soit défectueuse multipliée par la probabilité que la défectuosité soit détectée par A (événements indépendants) et vaut donc $\frac{3}{20} \cdot \frac{9}{10} = \frac{27}{200} = 0{,}135 = 13{,}5\%$.

c) S'il doit contrôler 5 voitures pour obtenir que la dernière soit défectueuse, c'est que les 4 premières n'ont pas été détectées comme défectueuses.

D'après b), la probabilité qu'une voiture soit défectueuse et que la défectuosité soit détectée par A est $\frac{27}{200}$.

Les 4 premières voitures entre dans les catégories "voiture défectueuse et défectuosité non détectée" ou "voiture non défectueuse et défectuosité non détectée".

On a $p(\text{"voiture défectueuse et défectuosité non détectée"}) = \frac{15}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{200}$

et $p(\text{"voiture non défectueuse et défectuosité non détectée"}) = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$.

Ainsi, $p(\text{"voiture défectueuse et défectuosité non détectée" ou "voiture non défectueuse et défectuosité non détectée"}) = \frac{3}{200} + \frac{17}{20} = \frac{173}{200}$.

La probabilité que A doivent contrôler 5 voitures est donc $\left(\frac{173}{200}\right)^4 \cdot \frac{27}{200} \cong 0{,}0756 =$
$= 7{,}56\%$.

d) En utilisant la notation de a), on cherche n tel que $P(X \geqslant 1) > 95\% = 0{,}95$.

On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$.

Ici, $k=0$ et $p = \frac{27}{200}$ (voir b)).

Ainsi, $P(X=0) = \binom{n}{0}\left(\frac{27}{200}\right)^0\left(1-\frac{27}{200}\right)^{n-0} = \left(\frac{173}{200}\right)^n$, d'où $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{173}{200}\right)^n$.

Par conséquent, $P(X \geqslant 1) > 0{,}95 \Rightarrow 1 - \left(\frac{173}{200}\right)^n > 0{,}95 \Rightarrow \left(\frac{173}{200}\right)^n < 0{,}05$.

Comme la fonction log est strictement croissante ($x<y \Rightarrow \log(x) < \log(y)$), on obtient $\log\left(\left(\frac{173}{200}\right)^n\right) < \log(0{,}05)$.

Avec la propriété du log : $\log(a^n) = n\log(a)$, on trouve $n\log\left(\frac{173}{200}\right) < \log(0{,}05)$.

Comme $\log\left(\frac{173}{200}\right) < 0$, on trouve finalement $n > \dfrac{\log(0{,}05)}{\log(173/200)} \cong 20{,}656$.

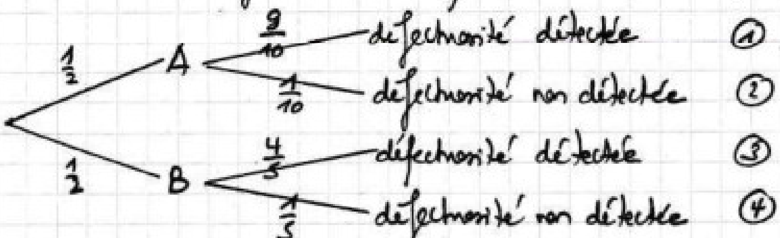
Il doit donc contrôler au minimum 21 voitures.

e) Probabilité que A et B ne détectent aucune défectuosité = probabilité que A ne détecte aucune défectuosité · probabilité que B ne détecte aucune défectuosité (événements indépendants).

On a : probabilité que A ne détecte aucune défectuosité = probabilité que pas défectueuse + probabilité que défectueuse mais pas détectée par A =
$= 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}1 = 0{,}85 + 0{,}015 = 0{,}865$ et, similairement,
probabilité que B ne détecte aucune défectuosité $= 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}85 + 0{,}03 =$
$= 0{,}88$.

Ainsi, la probabilité cherchée est $0{,}865 \cdot 0{,}88 = 0{,}7612 = 76{,}12\%$.

f) Pour une voiture défectueuse, on peut dessiner l'arbre suivant.



La probabilité qu'une voiture défectueuse ne soit pas détectée est donc :

chemins ② + ④ $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{3}{20} = 0{,}15 = 15\%$.

g) C'est une probabilité conditionnelle : $P(E|F) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}$.

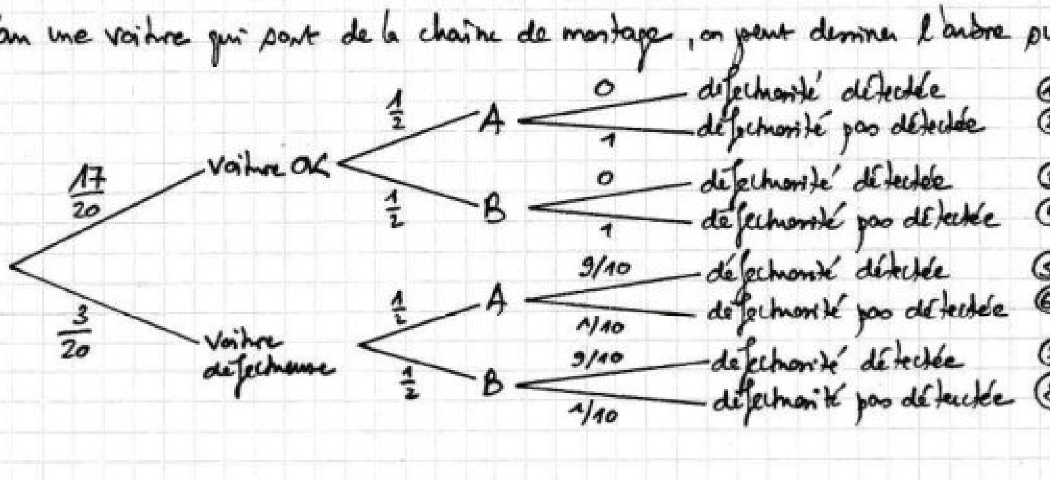
Ici : E = voiture contrôlée par B et F = voiture défectueuse non détectée.

On a : $E\cap F$ = voiture défectueuse contrôlée par B et défectuosité non détectée,

$p(E\cap F) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ (voir arbre de f)), $p(F) = \frac{3}{20}$ (voir f)).

Ainsi, $P(E|F) = \dfrac{1/10}{3/20} = \frac{1}{10} : \frac{3}{20} = \frac{1}{10}\cdot\frac{20}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}6667 = 66{,}67\%$.

h) Pour une voiture qui sort de la chaîne de montage, on peut dessiner l'arbre suivant :



Probabilité qu'aucune défectuosité ne soit détectée = chemins 2 + 4 + 6 + 8 =

$$= \frac{17}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{17}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{349}{400} = 0{,}8725 = 87{,}25\%.$$

h) C'est une probabilité conditionnelle : $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$.

Ici, E = vitre défectueuse et F = aucune défectuosité détectée.

On a : $E\cap F$ = vitre défectueuse et aucune défectuosité détectée,

$p(E\cap F)$ = chemins 6 + 8 de l'arbre de g) $= \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{9}{400}$,

$p(F) = \frac{349}{400}$ (voir g)).

Ainsi $P(E|F) = \frac{9/400}{345/400} = \frac{9}{349} \cong 0{,}02579 = 2{,}579\,\%$.