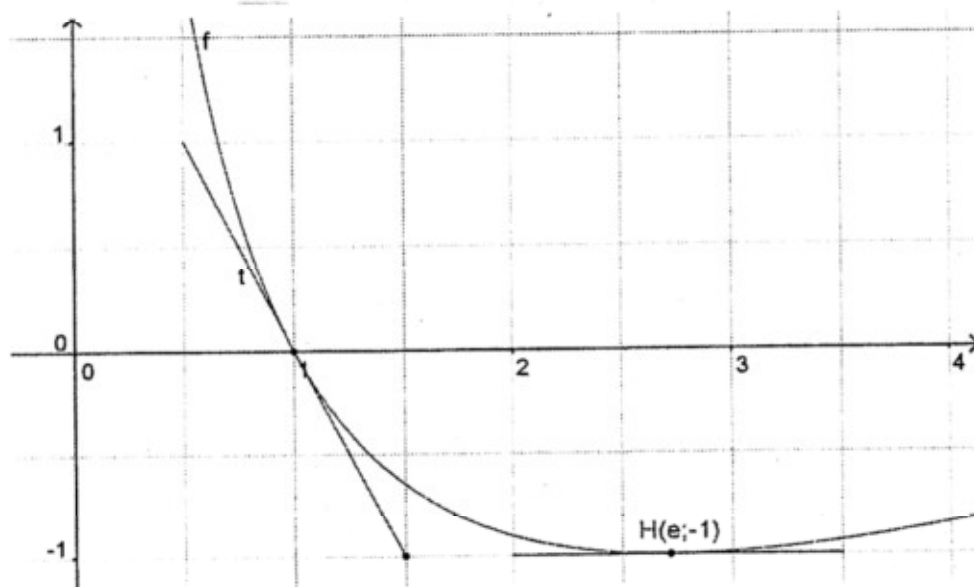


Problème 1 (poids 2)

On a représenté ci-dessous une partie du graphe de la fonction $f(x) = a \ln(x) \cdot (\ln(x) + b)$ avec $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ainsi que la tangente t au graphe de f en son point d'abscisse $x = 1$.



- Lire sur le graphe les valeurs de $f(1)$, $f'(e)$ et $f'(1)$.
- Calculer, en fonction de a et b , la dérivée de $f(x)$.
- En utilisant ce qui précède, déterminer les valeurs de a et b .

Pour la suite du problème, on choisit $a = 1$ et $b = -2$, donc $f(x) = \ln(x) \cdot (\ln(x) - 2)$.

- Étudier la fonction f , dessiner soigneusement son graphe dans un repère orthonormé.
- Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $x = 1$, ainsi que l'angle aigu entre cette tangente et l'axe des abscisses.
- Montrer que la fonction $F(x) = x \cdot (\ln^2(x) - 4 \ln(x) + 4)$ est une primitive de la fonction f .
- Hachurer la surface fermée délimitée par le graphe de f et l'axe des abscisses, puis calculer son aire.
- Résoudre l'équation $f(x) = 2$.

Problème 2 (poids 2)

Remarque : Pour tous les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée (page 4). Employer différentes couleurs.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne le plan $\pi : 2x + 2y - z - 9 = 0$, le point

$$A(-16; 0; 4) \text{ et la droite } d : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}.$$

- Vérifier que le point d'intersection de la droite d et du plan π est $I(5; 0; 1)$.
- Calculer l'angle aigu entre π et d .
- Dessiner les traces du plan π , la droite d ainsi que sa projection orthogonale dans le mur.
- Montrer que le point $B(-6; 10; -1)$ est la projection orthogonale du point $A(-16; 0; 4)$ sur le plan π .
- Le triangle ABI est-il rectangle ? isocèle ? équilatéral ?
Justifier chaque réponse par un raisonnement ou un calcul.
- Le point $P(11; 0; z)$ appartient au plan π .
Trouver z et calculer le volume du tétraèdre $ABIP$.
- On considère la sphère s centrée en $A(-16; 0; 4)$ et de rayon 10. Cette sphère et le plan π sont disjoints. Déterminer le point de la sphère s le plus proche du plan π .
- Trouver les équations de α et β , qui sont les plans parallèles au plan π et dont l'intersection avec la sphère s est un cercle de rayon 8.

Problème 3 (poids 1)

En sortant d'une certaine chaîne de montage, 15% des voitures sont défectueuses. Toutes les voitures sortant de cette chaîne de montage sont acheminées vers le service du contrôle final, où travaillent deux techniciens, A et B. Ensuite, chaque voiture est contrôlée une seule fois.

Le technicien A détecte 90% des voitures défectueuses, alors que le technicien B ne détecte que 80% de ces dernières.

- a) Quelle est la probabilité que parmi 10 voitures sortant de la chaîne de montage, la moitié soit défectueuse ?
- b) Le technicien A contrôle une voiture. Quelle est la probabilité que cette voiture soit défectueuse et que la défectuosité soit détectée ?
- c) Arrivant bientôt à la fin de sa journée de travail, le technicien A décide de contrôler encore des voitures jusqu'à ce qu'il en détecte une qui soit défectueuse. Quelle est la probabilité qu'il doive contrôler encore 5 voitures ?
- d) Combien de voitures au minimum le technicien A doit-il contrôler pour que la probabilité qu'il détecte au moins une voiture défectueuse dépasse 95% ?
- e) Les techniciens A et B contrôlent chacun une voiture différente. Quelle est la probabilité qu'ils ne détectent aucune défectuosité ?

On admet pour la suite du problème que chaque voiture a la même probabilité d'être contrôlée par le technicien A que par le technicien B.

- f) Quelle est la probabilité qu'une voiture qui est défectueuse ne soit pas détectée lors d'un contrôle ?
- g) Sachant qu'une certaine voiture est défectueuse et qu'elle n'a pas été détectée, calculer la probabilité que la voiture en question ait été contrôlée par le technicien B.
- h) Une voiture sort de la chaîne de montage et est acheminée vers le service du contrôle final. Quelle est la probabilité qu'aucune défectuosité ne soit détectée ?
- i) Sachant que sur une certaine voiture aucune défectuosité n'a été détectée, calculer la probabilité que la voiture en question soit défectueuse.

Nom et prénom :

Classe :

