Lycée Denis-de-Rougemont — Mathématiques de niveau 2

EXAMEN DE MATURITE 2010

Corrigé

Exercice 1

Partie 1

a) $f(x)=\sqrt{x}\cdot(x^2-4)$

Domaine de définition : il faut que $x\geq 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}_+=[0;+\infty[$.

Parité : comme $D=[0;+\infty[$, f ne peut être ni paire, ni impaire.

Périodicité : comme $D=[0;+\infty[$, f n'est pas périodique.

Zéros de f : $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x}\cdot(x^2-4)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0$ ou $x^2-4=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=\pm 2$; comme on doit avoir $x\geq 0$, les zéros de f sont $(0;0)$ et $(2;0)$.

Intersection avec l'axe y : $x=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}\cdot(x^2-4)=0 \Rightarrow (0;0)$.

Tableau de signes :

x	////	0		2	
$f(x)$	////	0	$-$	0	$+$

Asymptotes verticales : on a $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}\sqrt{x}\,(x^2-4)=0$; ainsi, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Asymptotes non verticales : si elle existe, une asymptote non verticale (dont oblique ou horizontale) est de la forme $y=mx+h$, où $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ (comme $D=[0;+\infty[$, il suffit de considérer $x\to+\infty$) et, si m existe, $h=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$;

on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot(x^2-4)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\,(x^{3/2}-\frac{4}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{3/2}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$;

ainsi, il n'y a pas d'asymptote non verticale.

Dérivée : on a $f(x)=\sqrt{x}\cdot(x^2-4)=u\cdot v$ avec $u=\sqrt{x}$ et $v=x^2-4$; on a $f'(x)=u'v+uv'$ où $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'=2x$; ainsi $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-4)+\sqrt{x}\cdot 2x=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-4)+2x\sqrt{x}=$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-4+4x^2)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x^2-4)$. Son domaine est $D_{f'}=]0;+\infty[=\mathbb{R}_+^*$

Points à tangente horizontale : $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x^2-4)=0 \Rightarrow 5x^2-4=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{5} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}$;

comme $D=[0;+\infty[$, l'unique zéro de f' est en $x=\sqrt{\frac{4}{5}}$.

Avec $x=\sqrt{\frac{4}{5}}$, on a $f(x)=\sqrt{x}\cdot(x^2-4)=\sqrt{\sqrt{\frac{4}{5}}}\left(\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2-4\right)=$

$=\sqrt[4]{\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}-4\right)=\sqrt[4]{\frac{4}{5}}\left(-\frac{16}{5}\right)=-\frac{16}{5}\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$.

Ainsi, l'unique point à tangente horizontale de f est $\left(\sqrt{\frac{4}{5}};-\frac{16}{5}\sqrt[4]{\frac{4}{5}}\right)\cong(0,89;-3,03)$.

Pente du graphe aux points critiques de f' : L'unique point critique de f' est en $x=0$; on a

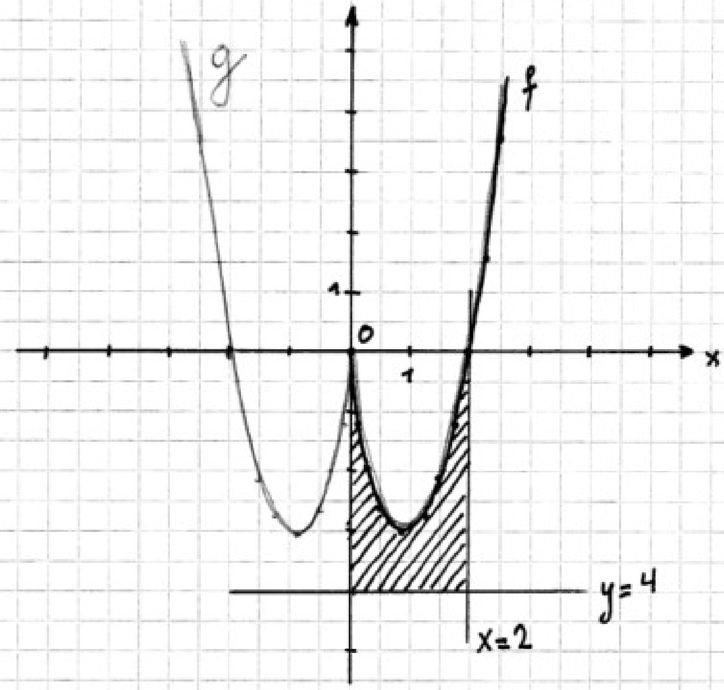
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x^2-4) = \text{"}\frac{1}{0_+}(0_+-4)\text{"} = -\infty$$; ainsi, la pente du graphe de f en $x=0$ est $-\infty$.

Tableau de croissance:

x	///	0		$\sqrt{4/5}$	
$f'(x)$	///	$\downarrow$	$-$	0	$+$
$f(x)$	///	0	$\searrow$	min	$\nearrow$

Nature des points à tangente horizontale: $\left(\sqrt{\frac{4}{5}} ; -\frac{16}{5}\sqrt[4]{\frac{4}{5}}\right)$ est un minimum.

Graphe:



b) L'angle formé par l'axe des x et le graphe de f en $x=2$ est l'angle formé par l'axe des x et la tangente au graphe de f en $x=2$.

D'après Formulaires et Tables p. 51, l'angle entre 2 droites de pentes m_1 et m_2 (angle aigu) est φ donné par $\tan(\varphi) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}\right|$.

Ici $m_1 = 0$ et $m_2 = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(5\cdot 2^2-4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 16 = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

Ainsi $\tan(\varphi) = 4\sqrt{2} \Rightarrow \varphi \cong 79{,}975°$.

Par conséquent, l'angle formé par l'axe des x et le graphe de f en $x=2$ est $\varphi \cong 79{,}975°$.

c) La surface est hachurée sur le graphe de a).

D'après Formulaires et Tables p. 82, le volume de révolution engendré par une fonction h prise entre a et b tournant autour de l'axe x est $V = \pi\int_a^b (h(x))^2 dx$.

Ici, le volume engendré par la surface hachurée sera le volume d'un cylindre de rayon 4 et de hauteur 2 moins le volume engendré par la rotation de f entre 0 et 2 autour de l'axe x. Ainsi, le volume cherché est:

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \pi\int_0^2 (f(x))^2 dx = 32\pi - \pi\int_0^2 \left(\sqrt{x}(x^2-4)\right)^2 dx =$$

$$= 32\pi - \pi \int_0^2 x(x^2-4)^2 dx = 32\pi - \pi \int_0^2 x(x^4-8x^2+16)dx =$$

$$= 32\pi - \pi \int_0^2 (x^5-8x^3+16x)dx = 32\pi - \pi \left[\frac{x^6}{6} - 8\frac{x^4}{4} + 16\frac{x^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= 32\pi - \pi \left[\frac{x^6}{6} - 2x^4 + 8x^2\right]_0^2 = 32\pi - \pi\left(\frac{2^6}{6} - 2\cdot 2^4 + 8\cdot 2^2\right) =$$

$$= 32\pi - \pi\left(\frac{32}{3} - 32 + 32\right) = 32\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi$$

Ainsi, le volume engendré est $\frac{64}{3}\pi$.

d) On a $g(x) = \sqrt{|x|}\cdot(x^2-4)$.
On remarque que $f(|x|) = \sqrt{|x|}\cdot(|x|^2-4) = \sqrt{|x|}\,(x^2-4) = g(x)$.
Ainsi $g(x) = f(|x|)$.
De plus, $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$. Ainsi g est une fonction paire et son graphe possède donc l'axe Oy comme axe de symétrie.
On peut alors facilement dessiner le graphe de g (voir page précédente, en bleu).

L'équation de la tangente au graphe de g en $x=-1$ sera de la forme $y = ax+b$.
Puisque g est paire, l'équation de la tangente au graphe de g en $x=1$ sera de la forme $y = -ax+b$.
Comme, si $x \geqslant 0$, $g(x) = f(|x|) = f(x)$, la droite $y=-ax+b$ sera la tangente au graphe de f en $x=1$.
On a alors $-a = f'(1)$.
Comme $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x^2-4)$, on a $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}}(5\cdot 1^2 - 4) = \frac{1}{2}$.
On a donc $-a = \frac{1}{2}$, d'où $a = -\frac{1}{2}$.
De plus, comme $f(1) = \sqrt{1}\,(1^2-4) = -3$, la tangente $y=-ax+b$ passe par le point $(1;-3)$.
Par substitution dans $y=-ax+b$, on obtient $-3 = \frac{1}{2}\cdot 1 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{2}$.
Par conséquent, l'équation de la tangente au graphe de g en $x=-1$ est

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}.$$

Partie 2

e) On doit résoudre $y' + \frac{3}{x}y = \ln(2x)$.
D'après Formulaires et Tables p.84, c'est une équation linéaire et sa solution générale sera la somme d'une solution particulière de l'équation et de la solution générale de l'équation sans second membre $\left(y' + \frac{3}{x}y = 0\right)$.
La solution générale de $y' + \frac{3}{x}y = 0$ est $y = ce^{-F(x)}$, où F est une primitive

de $\frac{3}{x}$ et c une constante. Une primitive de $\frac{3}{x}$ est $F(x) = 3\ln(|x|) = \ln(|x|^3)$.
La solution générale de $y' + \frac{3}{x}y = 0$ est donc $y = ce^{-\ln(|x|^3)} =$
$= ce^{\ln\left(\frac{1}{|x|^3}\right)} = c \cdot \frac{1}{|x|^3} = d \cdot \frac{1}{x^3}$, où d est une constante.

Pour trouver une solution particulière de $y' + \frac{3}{x}y = \ln(2x)$, on pose $p(x) = c(x)e^{-F(x)}$, où F est une primitive de $\frac{3}{x}$ et $c(x)$ est à déterminer en remplaçant y par p dans $y' + \frac{3}{x}y = \ln(2x)$.
On a $F(x) = \ln(|x|^3)$ (voir ci-dessus).
Ainsi $p(x) = c(x)e^{-\ln(|x|^3)} = c(x)e^{\ln\left(\frac{1}{|x|^3}\right)} = c(x)\frac{1}{|x|^3} = d(x) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{d(x)}{x^3}$.
On a $p'(x) = \frac{d'(x) \cdot x^3 - d(x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{d'(x) \cdot x - 3d(x)}{x^4}$.

Par substitution dans $y' + \frac{3}{x}y = \ln(2x)$, on obtient

$$\frac{d'(x) \cdot x - 3d(x)}{x^4} + \frac{3}{x} \cdot \frac{d(x)}{x^3} = \ln(2x)$$
$$\Rightarrow \frac{d'(x)}{x^3} - \frac{3d(x)}{x^4} + \frac{3d(x)}{x^4} = \ln(2x)$$
$$\Rightarrow \frac{d'(x)}{x^3} = \ln(2x) \Rightarrow d'(x) = x^3\ln(2x) \Rightarrow d(x) = \int x^3 \ln(2x)\, dx.$$

On va trouver $d(x)$ par une intégration par parties en utilisant la formule $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$.
On pose $u' = x^3$ et $v = \ln(2x)$. On a $u = \frac{x^4}{4}$ et $v' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$.
Ainsi $d(x) = \int x^3 \ln(2x)\,dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln(2x) - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x}\,dx$
$= \frac{x^4}{4}\ln(2x) - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln(2x) - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4}\left(\ln(2x) - \frac{1}{4}\right)$.

On a par conséquent $p(x) = \frac{d(x)}{x^3} = \frac{x}{4}\left(\ln(2x) - \frac{1}{4}\right)$.

La solution générale de $y' + \frac{3}{x}y = \ln(2x)$ est donc

$$y(x) = \frac{x}{4}\left(\ln(2x) - \frac{1}{4}\right) + \frac{d}{x^3},$$ où d est une constante.

Exercice 2

On a $F = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Les valeurs propres de f sont les λ solutions de $\det(F-\lambda I)=0$.

On sait que $\det(F-\lambda I) = -\lambda^3 + 36\lambda$.

Ainsi, les valeurs propres de f sont les λ solutions de $-\lambda^3 + 36\lambda = 0$.

On a : $-\lambda^3+36\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2-36)=0 \Rightarrow -\lambda(\lambda+6)(\lambda-6)=0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2=-6$ et $\lambda_3 = 6$.

Les valeurs propres de f sont donc $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-6$ et $\lambda_3=6$.

Cherchons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

$\lambda_1 = 0$: $F\vec{v} = \lambda_1\vec{v} \Rightarrow F\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -v_1+5v_2+2v_3=0 \\ 5v_1-v_2+2v_3=0 \\ 2v_1+2v_2+2v_3=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 6v_1-6v_2=0 \\ v_3=-v_1-v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=v_2 \\ v_3=-2v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix}$; avec $v_1=1$, un vecteur propre de f associé à $\lambda_1=0$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2=-6$: $F\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -v_1+5v_2+2v_3=-6v_1 \\ 5v_1-v_2+2v_3=-6v_2 \\ 2v_1+2v_2+2v_3=-6v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5v_1+5v_2+2v_3=0 \\ 5v_1+5v_2+2v_3=0 \\ 2v_1+2v_2+8v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18v_1+18v_2=0 \\ 4v_3=-v_1-v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=-v_2 \\ 4v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=-v_1 \\ v_3=0 \end{cases}$;

avec $v_1=1$, un vecteur propre de f associé à $\lambda_2=-6$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3=6$: $F\vec{v} = \lambda_3\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -v_1+5v_2+2v_3=6v_1 \\ 5v_1-v_2+2v_3=6v_2 \\ 2v_1+2v_2+2v_3=6v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -7v_1+5v_2+2v_3=0 \\ 5v_1-7v_2+2v_3=0 \\ 2v_1+2v_2=4v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12v_1-12v_2=0 \\ 2v_3=v_1+v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=v_1 \\ 2v_3=2v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=v_1 \\ v_3=v_1 \end{cases}$;

avec $v_1=1$, un vecteur propre de f associé à $\lambda_3=6$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Le noyau de f est donné par $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{v} \mid f(\vec{v})=0\} = \{\vec{v} \mid F\vec{v}=0\}$

D'après a), on sait que $F\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix} = v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{v} \mid \vec{v} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}\right\}$. $\mathrm{Ker}(f)$ est donc la droite passant par O et parallèle à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

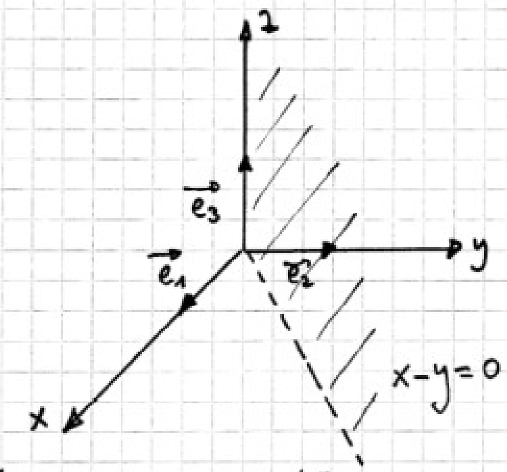
De plus, l'image de f est donné par $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{w} \mid \vec{w} = f(\vec{v})\} = \{\vec{w} \mid \vec{w} = F\vec{v}\}$

On a $F\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1+5v_2+2v_3 \\ 5v_2-v_2+2v_3 \\ 2v_1+2v_2+2v_3 \end{pmatrix}$. En posant $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on obtient :

$\begin{cases} x=-v_1+5v_2+2v_3 \\ y=5v_1-v_2+2v_3 \\ z=2v_1+2v_2+2v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4v_1+4v_2+4v_3 \\ z=2v_1+2v_2+2v_3 \end{cases} \Rightarrow x+y-2z=0.$

Ainsi $\mathrm{Im}(f)$ est le plan $x+y-2z=0$.

c) On a g, la symétrie de plan $x-y=0$:



On a $g(\vec{e_1}) = \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $g(\vec{e_2}) = \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $g(\vec{e_3}) = \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Comme la matrice G de g est constituée des vecteurs images des vecteurs de base,

on a $G = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

d) La transformation g, symétrie de plan $x-y=0$, échange les 2 premières coordonnées de tout point : si le point est $P(x;y;z)$, son image par g est $P'(y;x;z)$.

Ainsi, l'image du plan $\pi : x+z-1=0$ est le plan $\pi' : y+z-1=0$.

e) La matrice de la transformation $h = g\circ f$ est donnée par $H = G\cdot F =$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\5 & -1 & 2\\2 & 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\-1 & 5 & 2\\2 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

f) Avec $\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, on a $H\vec{v_1} = \begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\-1 & 5 & 2\\2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-1-4\\-1+5-4\\2+2-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\vec{v_1}$; ainsi,

$\vec{v_1}$ est un vecteur propre de H de valeur propre 0.

Avec $\vec{v_2} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, on a $H\vec{v_2} = \begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\-1 & 5 & 2\\2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5-1\\1+5\\-2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 6\vec{v_2}$;

ainsi $\vec{v_2}$ est un vecteur propre de H de valeur propre 6.

Avec $\vec{v_3} = \vec{v_1}\wedge\vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0-(-2)\cdot 1\\-2\cdot(-1)-1\cdot 0\\1\cdot 1-1\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, on a $H\vec{v_3} =$

$= \begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\-1 & 5 & 2\\2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10-2+4\\-2+10+4\\4+4+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\12\\12\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 6\cdot\vec{v_3}$; ainsi $\vec{v_3}$ est un

vecteur propre de H de valeur propre 6.

Comme la valeur propre associée au vecteur propre $\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est 0, on en déduit qu'une partie de h est la projection parallèle à $\vec{v_1}$ sur un plan.

On a $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -1+1 = 0$ et $\vec{v_1}\perp\vec{v_3}$ puisque $\vec{v_3} = \vec{v_1}\wedge\vec{v_2}$, on a que $\vec{v_1}$ sera perpendiculaire au plan où l'on projète les points. Ainsi, une partie de h est la projection orthogonale sur le plan $x+y-2z=0$ (le plan doit contenir O).

En outre, comme les 2 autres valeurs propres de h valent 6, l'autre partie de h est une homothétie de centre O et de facteur 6.

Par conséquent, h est la composition de la projection orthogonale sur le plan $x+y-2z=0$ et d'une homothétie de facteur 6 par rapport à l'origine.

g) On a la transformation $\frac{1}{6}f+\alpha p$, où p est la projection orthogonale sur la droite parallèle à $\vec{v_1}$ et passant par l'origine.

Dans la base $\{\vec{v_1};\vec{v_2};\vec{v_3}\}$, la matrice associée à p est $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

On a $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ (voir f)).

De plus $F\vec{v_1}=\begin{pmatrix}-1&5&2\\5&-1&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+5-4\\5-1-4\\2+2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\vec{v_1}$,

$F\vec{v_2}=\begin{pmatrix}-1&5&2\\5&-1&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5\\-5-1\\-2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=-6\cdot\vec{v_2}$ et

$F\vec{v_3}=\begin{pmatrix}-1&5&2\\5&-1&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+10+4\\10-2+4\\4+4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\12\\12\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=6\vec{v_3}$.

Ainsi, $\vec{v_1}$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre 0,
$\vec{v_2}$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre -6 et
$\vec{v_3}$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre 6.

Par conséquent, dans la base $\{\vec{v_1};\vec{v_2};\vec{v_3}\}$, la matrice de f est $F'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-6&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

On en déduit que, dans la base $\{\vec{v_1};\vec{v_2};\vec{v_3}\}$, la matrice de $\frac{1}{6}f+\alpha p$ est

$\frac{1}{6}F'+\alpha P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-6&0\\0&0&6\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Ainsi, si $\alpha=1$, cette matrice est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, ce qui représente une symétrie planaire de plan parallèle à $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$ et passant par l'origine.

Si $\alpha=-1$, la matrice est $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, ce qui représente une symétrie axiale d'axe parallèle à $\vec{v_3}$ et passant par l'origine.

Par conséquent, si $\alpha=1$, on a une symétrie planaire et, si $\alpha=-1$, on a une symétrie axiale.

Exercice 3

Partie 1

a) On a $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 4z + 8$ et on sait que $P(yi) = 0$.

$P(yi) = 0 \Rightarrow (yi)^4 - 2(yi)^3 + 6(yi)^2 - 4(yi) + 8 = 0$
$\Rightarrow y^4 i^4 - 2y^3 i^3 + 6y^2 i^2 - 4yi + 8 = 0$
$\Rightarrow y^4 + 2y^3 i - 6y^2 - 4yi + 8 = 0$
$\Rightarrow y^4 - 6y^2 + 8 + (2y^3 - 4y)i = 0$
$\Rightarrow y^4 - 6y^2 + 8 = 0$ et $2y^3 - 4y = 0$.

$2y^3 - 4y = 0 \Rightarrow 2y(y^2 - 2) = 0 \Rightarrow$ soit $y = 0$, soit $y = \pm\sqrt{2}$.

$y = 0$ n'est pas solution de $y^4 - 6y^2 + 8 = 0$.

Avec $y = \pm\sqrt{2}$, on a $y^2 = 2$ et $y^4 = 4$, d'où $y^4 - 6y^2 + 8 = 4 - 6 \cdot 2 + 8 = 0$.

Ainsi $P(yi) = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$.

Par conséquent, les valeurs possibles de y sont $\pm\sqrt{2}$.

b) Les zéros de $P(z)$ sont les z tels que $P(z) = 0$.

D'après a), on sait que $P(\pm\sqrt{2}i) = 0$.

Par conséquent, $P(z)$ peut s'écrire $P(z) = (z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i)\,Q(z)$, où $Q(z)$ est un polynôme de degré 2 (puisque $P(z)$ est un polynôme de degré 4).

Ainsi, on a $P(z) = (z^2 - (\sqrt{2}i)^2)\,Q(z) = (z^2 - 2i^2)Q(z) = (z^2 + 2)Q(z)$.

On en déduit que $P(z)$ est divisible par $z^2 + 2$.

Effectuons la division de $P(z)$ par $z^2 + 2$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 4z + 8 & z^2 + 2 \\
\cline{3-3}
- & (z^4 \qquad\quad + 2z^2) & z^2 - 2z + 4 \\
\hline
 & -2z^3 + 4z^2 - 4z + 8 & \\
- & (-2z^3 \qquad\quad - 4z) & \\
\hline
 & 4z^2 \qquad + 8 & \\
- & (4z^2 \qquad + 8) & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Ainsi, $Q(z) = z^2 - 2z + 4$ et on a $P(z) = (z^2 + 2)(z^2 - 2z + 4)$.

Outre $z = \pm\sqrt{2}i$, les autres zéros de $P(z)$ seront les solutions de $z^2 - 2z + 4 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$, où $a = 1$, $b = -2$ et $c = 4$. On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-12} = 2\sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$. Les solutions de $z^2 - 2z + 4 = 0$ sont donc $z = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$.

Ainsi, les zéros de $P(z)$ sont $\pm\sqrt{2}i$ et $1 \pm \sqrt{3}i$.

c) On a $f(z)=\frac{1}{z-i}$ avec $z\neq i$.

Cherchons $f^{-1}(z)$: $w=\frac{1}{z-i} \Rightarrow w(z-i)=1 \Rightarrow wz-wi=1$

$\Rightarrow wz=1+wi \Rightarrow z=\frac{1+wi}{w}=\frac{1}{w}+i$;

ainsi $f^{-1}(z)=\frac{1}{z}+i$.

D'autre part, avec $f(z)=\frac{1}{z-i}$, on a $(f\circ f)(z)=f(f(z))=\frac{1}{f(z)-i}=$

$$=\frac{1}{\frac{1}{z-i}-i}=\frac{1}{\frac{1-(z-i)i}{z-i}}=\frac{1}{\frac{1-zi+i^2}{z-i}}=\frac{1}{\frac{1-zi-1}{z-i}}=\frac{1}{\frac{-zi}{z-i}}=$$

$$=\frac{z-i}{-zi}=-\frac{1}{i}+\frac{1}{z}=-\frac{i}{i^2}+\frac{1}{z}=-\frac{i}{-1}+\frac{1}{z}=i+\frac{1}{z}.$$

On a donc bien $f^{-1}(z)=(f\circ f)(z)$, $z\neq i$.

d) Avec $z=x+yi$, on a $f(z)=u+vi$ avec $u=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}$ et $v=\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}$.

Pour obtenir $f(z)\in\mathbb{R}$, on doit avoir $v=0$.

$v=0 \Rightarrow \frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}=0 \Rightarrow 1-y=0 \Rightarrow y=1$.

Comme on a $z\neq i$, avec $z=x+yi$, on doit avoir $(x;y)\neq(0;1)$.

Ainsi, $f(z)\in\mathbb{R}$ si $y=1$, $(x;y)\neq(0;1)$.

Par conséquent, l'ensemble cherché est la droite horizontale $y=1$ privée du point $(0;1)$.

e) L'axe réel est donné par $z=x+iy$ avec $y=0$.

Comme l'image de $z=x+iy$ par f est $f(z)=u+vi$ avec $u=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}$ et $v=\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}$, avec $y=0$, on obtient $u=\frac{x}{x^2+1}$ et $v=\frac{1}{x^2+1}$.

On a $u^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\right)^2=$

$$=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}+\left(\frac{2-(x^2+1)}{2(x^2+1)}\right)^2=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}+\left(\frac{2-x^2-1}{2(x+1)}\right)^2=$$

$$=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}+\left(\frac{-x^2+1}{2(x+1)}\right)^2=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}+\frac{(-x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}+\frac{x^4-2x^2+1}{4(x^2+1)^2}=\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4(x^2+1)^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{4(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}$$

On obtient ainsi $u^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, ce qui représente un cercle de centre $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, donc $\frac{1}{2}i$, et de rayon $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Exercice 4

a) On utilise la loi binomiale: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X compte le nombre de voitures défectueuses à la sortie de la chaîne de montage, k est le nombre de voitures défectueuses, n le nombre de voitures total qui sortent, p est la probabilité qu'une voiture soit défectueuse.

Ici $k=5$, $n=10$, $p=15\%=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$, $1-p=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$, $n-k=5$.

Ainsi $P(X=5)=\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{3}{20}\right)^5\cdot\left(\frac{17}{20}\right)^5=0{,}00849=0{,}849\ \%$.

b) La probabilité qu'une voiture soit défectueuse à la sortie de la chaîne de montage est $15\%=\frac{3}{20}$.

La probabilité que A la détecte est $90\%=\frac{9}{10}$.

Par conséquent, la probabilité que la voiture soit défectueuse et que la défectuosité soit détectée par A est la probabilité que la voiture soit défectueuse multipliée par la probabilité que la défectuosité soit détectée par A (événements indépendants) $=\frac{3}{20}\cdot\frac{9}{10}=\frac{27}{200}=0{,}135=13{,}5\ \%$.

c) On utilise la loi binomiale: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X compte le nombre de voitures défectueuses détectées par A, k est le nombre de voitures défectueuses détectées par A, n le nombre de voitures contrôlées, p la probabilité que A détecte une voiture défectueuse.

Ici, on cherche $P(X\geqslant 1)$ (au moins 1 voiture défectueuse détectée).

On $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$.

Avec $k=0$ et $p=\frac{27}{200}$ (voir b)), on a $1-p=1-\frac{27}{200}=\frac{173}{200}$ et $n-k=n$.

Ainsi $P(X=0)=\binom{n}{0}\left(\frac{27}{200}\right)^0\left(\frac{173}{200}\right)^n=1\cdot 1\cdot\left(\frac{173}{200}\right)^n=\left(\frac{173}{200}\right)^n$, d'où

$P(X\geqslant 1)=1-\left(\frac{173}{200}\right)^n$.

On veut trouver n tel que $P(X\geqslant 1)>95\%=0{,}95$.

On a donc $1-\left(\frac{173}{200}\right)^n>0{,}95 \Rightarrow \left(\frac{173}{200}\right)^n<0{,}05$.

Comme la fonction log est croissante ($x<y \Rightarrow \log x<\log y$), on obtient

$\log\left(\left(\frac{173}{200}\right)^n\right)<\log(0{,}05)$.

Avec la propriété du log $\log(a^n)=n\log(a)$, on trouve $n\log\left(\frac{173}{200}\right)<\log(0{,}05)$.

On a $\log\left(\frac{173}{200}\right)<0$ puisque $\frac{173}{200}<0$, on obtient finalement

$n>\frac{\log(0{,}05)}{\log(173/200)}\simeq 20{,}656$. Ainsi, au minimum, $n=21$.

Il doit donc contrôler au minimum 21 voitures.

d) $N=1$ signifie que la 1^e voiture est détectée défectueuse : $P(N=1) = 0,135$ (voir b)).

$N=2$ signifie que la 1^e voiture n'est pas détectée défectueuse, mais que la 2^e oui :

$P(N=2) = (1-0,135)\cdot 0,135 = 0,865 \cdot 0,135$.

$N=k$ signifie que les $k-1$ premières voitures ne sont pas détectées défectueuses, mais que la k^e oui : $P(N=k) = (1-0,135)^{k-1}\cdot 0,135 = (0,865)^{k-1}\cdot 0,135$.

L'espérance moyenne de N est donnée par $\sum_{k=1}^{+\infty} k P(N=k) =$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot(0,865)^{k-1}\cdot 0,135 = 0,135 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot(0,865)^{k-1}$.

On sait que $1+2r+3r^2+4r^3+\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ si $|r|<1$.

Ici $r = 0,865$ et on a bien $|r|<1$.

On a donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot(0,865)^{k-1} = \frac{1}{(1-0,865)^2} = \frac{1}{0,135^2}$.

Ainsi l'espérance moyenne de N est $0,135\cdot\frac{1}{0,135^2} = \frac{1}{0,135} \cong 7,41$.

e) La probabilité que A et B ne détectent aucune défectuosité = probabilité que A ne détecte aucune défectuosité · probabilité que B ne détecte aucune défectuosité (événements indépendants).

On a : probabilité que A ne détecte aucune défectuosité =

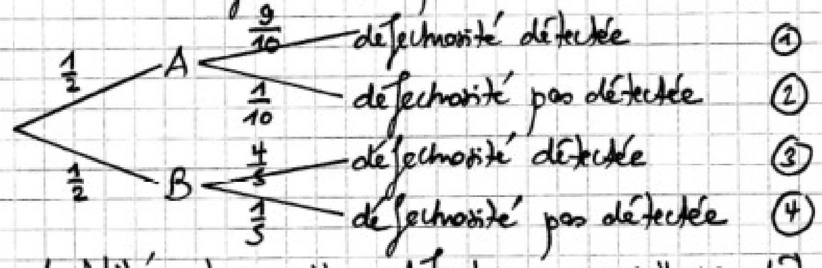
= probabilité que pas défectueuse + probabilité que défectueuse mais pas détecté par A $= 0,85 + 0,15\cdot 0,1 = 0,85 + 0,015 = 0,865$ et

probabilité que B ne détecte aucune défectuosité =

= probabilité que pas défectueuse + probabilité que défectueuse mais pas détecté par B $= 0,85 + 0,15\cdot 0,2 = 0,85 + 0,03 = 0,88$.

Ainsi, la probabilité cherchée est $0,865\cdot 0,88 = 0,7612 = 76,12\%$.

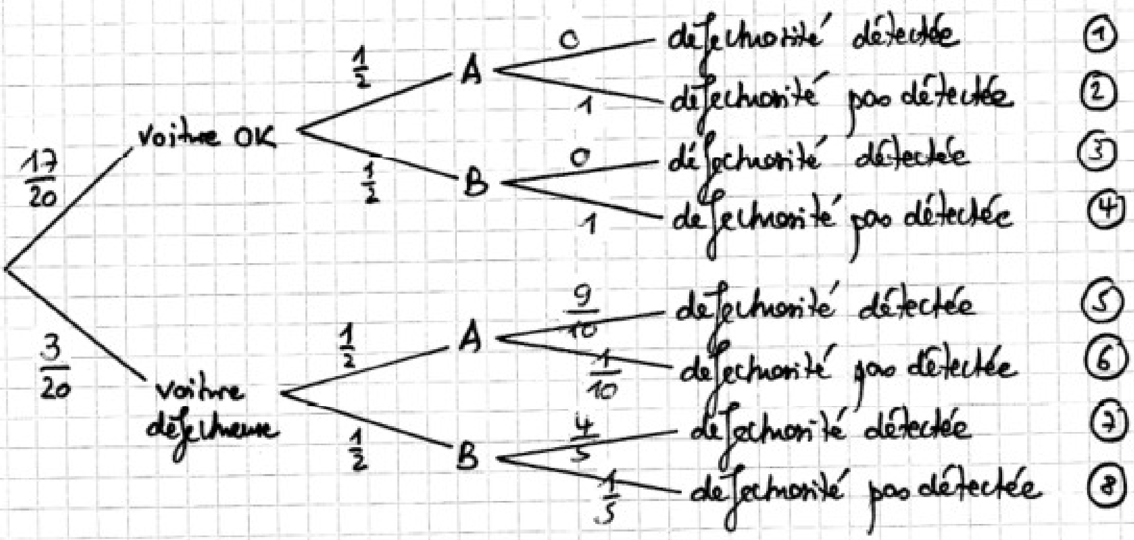
f) Pour une voiture défectueuse, on peut dessiner l'arbre suivant :



La probabilité qu'une voiture défectueuse ne soit pas détectée est donc :

chemins ② + ④ $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{3}{20} = 0,15 = 15\%$.

g) Pour une voiture qui sort de la chaîne de montage, on peut dessiner l'arbre suivant :



Probabilité qu'aucune défectuosité ne soit détectée = chemins ② + ④ + ⑥ + ⑧ =

$$= \frac{17}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{17}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} =$$

$$= \frac{17}{40} + \frac{17}{40} + \frac{3}{400} + \frac{3}{200} = \frac{170+170+3+6}{400} = \frac{349}{400} = 0,8725 = 87,25\%.$$

h) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Ici, A = voiture défectueuse et B = aucune défectuosité détectée.

On a $A \cap B$ = voiture défectueuse et aucune défectuosité détectée.

De plus $p(A\cap B)$ = chemins ⑥ + ⑧ $= \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{400} + \frac{3}{200} = \frac{9}{400}$

et $p(B) = \frac{349}{400}$ (voir g).

Ainsi $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{9/400}{349/400} = \frac{9}{400} : \frac{349}{400} = \frac{9}{400}\cdot\frac{400}{349} = \frac{9}{349} \cong 0,02579 =$

$= 2,579\ \%.$