Examen de maturité 2010
Corrigé

Problème 1

Partie A

a) On a $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2+2x}$.

Domaine de définition: $D = \mathbb{R}$.

Asymptotes verticales: aucune puisque $D = \mathbb{R}$.

Asymptotes non verticales: On a $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2}e^{-x^2+2x} = e^{-\infty} = 0$. Ainsi $y = 0$ est asymptote horizontale.

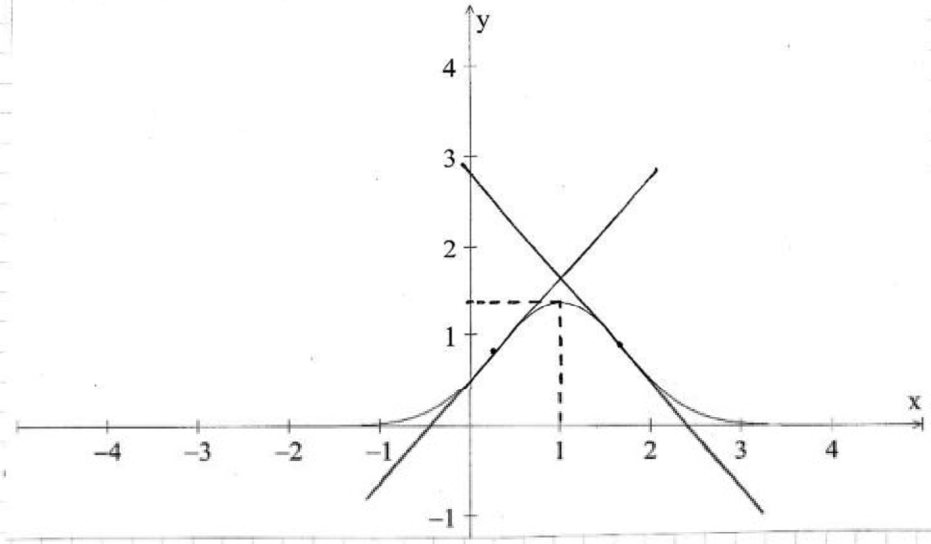
Dérivée: $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2+2x} \cdot (-2x+2) = (-x+1)e^{-x^2+2x}$.

Points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow (-x+1)e^{-x^2+2x} = 0 \Rightarrow -x+1 = 0$ car $e^x > 0$ pour tout $x \Rightarrow x = 1$; $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}e^{-1^2+2\cdot 1} = \frac{1}{2}e \cong 1{,}36$.

Tableau de croissance:

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max en $(1; \frac{1}{2}e)$	$\searrow$

Graphe:



b) Voir sur le graphique ci-dessus.

c) $f(x) = \frac{\sqrt{e}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x^2+2x} = \frac{\sqrt{e}}{2} \Rightarrow e^{-x^2+2x} = \sqrt{e} \Rightarrow e^{-x^2+2x} = e^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow -x^2 + 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = \begin{cases} \sim 1{,}707 \\ \sim 0{,}293. \end{cases}$

Partie B

On a $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$.

a) On a $f(x)=\dfrac{x^3+4x-4x}{x^2+4}=\dfrac{x(x^2+4)}{x^2+4}+\dfrac{-4x}{x^2+4}=x+\dfrac{-4x}{x^2+4}$.

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-4x}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\cdot(-4)}{x\left(x+\frac{4}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-4}{x+\frac{4}{x}}=\dfrac{-4}{\pm\infty+0}=0$,

$y=x$ est l'asymptote oblique.

t est parallèle à l'asymptote oblique. On a donc t: $y=x+h$. Il faut trouver h.
Comme la pente de t vaut 1 et que le point de contact est $(x_0;f(x_0))$, on doit avoir $f'(x_0)=1$.
On a $f(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=x^3$ et $v=x^2+4$, $u'=3x^2$ et $v'=2x$.

Ainsi $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{3x^2\cdot(x^2+4)-x^3\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{3x^4+12x^2-2x^4}{(x^2+4)^2}=\dfrac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2}$.

$f'(x_0)=1\Rightarrow\dfrac{x_0^4+12x_0^2}{(x_0^2+4)^2}=1\Rightarrow x_0^4+12x_0^2=(x_0^2+4)^2$

$\Rightarrow x_0^4+12x_0^2=x_0^4+8x_0^2+16\Rightarrow 12x_0^2=8x_0^2+16\Rightarrow 4x_0^2=16\Rightarrow x_0^2=4$

$\Rightarrow x_0=\pm 2$.

D'après le dessin, on a $x_0>0$. Ainsi $x_0=2$.

Avec $x_0=2$, on a $f(x_0)=\dfrac{2^3}{2^2+4}=\dfrac{8}{8}=1$.

Ainsi, le point de contact est $(2;1)$

Par substitution dans l'équation de t, on a: $1=2+h\Rightarrow h=-1$.
Ainsi, l'équation de la tangente est $y=x-1$.

b) Pour prouver que $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)$ est une primitive de $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$, il suffit de prouver que $g'(x)=f(x)$.

On a: $g'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x-\dfrac{2}{x^2+4}\cdot 2x=x-\dfrac{4x}{x^2+4}=\dfrac{x^3+4x-4x}{x^2+4}=\dfrac{x^3}{x^2+4}$.

Ainsi $g(x)$ est bien une primitive de $f(x)$.

Aire de la surface $=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 (f(x)-t(x))\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx-\int_1^2 t(x)\,dx=$

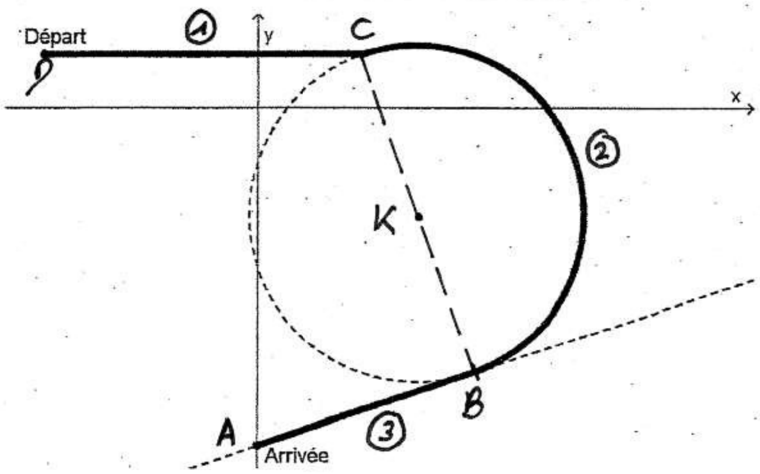
$=\Big[g(x)\Big]_0^2-\displaystyle\int_1^2(x-1)\,dx=\Big[\tfrac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)\Big]_0^2-\Big[\tfrac{x^2}{2}-x\Big]_1^2=$

$=\frac{1}{2}\cdot 2^2-2\ln(2^2+4)-\frac{1}{2}\cdot 0^2+2\ln(0^2+4)-\frac{2^2}{2}+2+\frac{1^2}{2}-1=$

$= 2 - 2\ln(8) + 2\ln(4) - 2 + 2 + \frac{1}{2} - 1 =$
$= \frac{3}{2} - 2\ln(8) + 2\ln(4) = \frac{3}{2} - 2\ln(2^3) + 2\ln(2^2) =$
$= \frac{3}{2} - 2\cdot 3\ln(2) + 2\cdot 2\ln(2) = \frac{3}{2} - 6\ln(2) + 4\ln(2) =$
$= \frac{3}{2} - 2\ln(2) \cong 0,114$

Problème 2

Partie A



On a $D(-4;1)$ et $C(x;1)$ puisque ① est horizontal.
Avec $C(x;1)$ dans l'équation du cercle, on a $(x-3)^2 + (1+2)^2 - 10 = 0$
$\Rightarrow (x-3)^2 + 9 - 10 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 1 \Rightarrow x - 3 = \pm 1 \Rightarrow x = \Big< \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$
Comme C est la "première" intersection avec le cercle, on a $x = 2$.
Ainsi, la longueur de ① est $2-(-4) = 6$.
Le rayon du cercle est $\sqrt{10}$. Comme ② est un demi-cercle, sa longueur est
$\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{10} = \pi\sqrt{10}$.
Le centre du cercle est $K(3;-2)$. On a $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Des équations paramétriques de la droite passant par C et K sont alors

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 3\lambda . \end{cases}$$

B est une des intersections de cette droite avec le cercle.
Par substitution, on a $(2+\lambda-3)^2 + (1-3\lambda+2)^2 - 10 = 0$
$\Rightarrow (\lambda-1)^2 + (-3\lambda+3)^2 - 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 18\lambda + 9 - 10 = 0$
$\Rightarrow 10\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 2$.
Avec $\lambda = 0$, on obtient $x = 2$ et $y = 1 \Rightarrow$ point C.
Avec $\lambda = 2$, on obtient $x = 2+2 = 4$ et $y = 1 - 3\cdot 2 = -5 \Rightarrow B(4;-5)$.

La droite passant par A et B est perpendiculaire à $\overrightarrow{CK} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Son équation cartésienne s'écrit donc $x - 3y + c = 0$.
Avec $B(4;-5)$, on a $4 - 3\cdot(-5) + c = 0 \Rightarrow 4 + 15 + c = 0 \Rightarrow c = -19$.
Ainsi, son équation cartésienne est $x - 3y + 19 = 0$.
Le point A est de la forme $(0; y_0)$. On a donc $-3y_0 + 19 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{19}{3}$.
Ainsi $A(0; -\frac{19}{3})$.
La longueur de ③ est alors $\sqrt{(4-0)^2 + (-5-(-\frac{19}{3}))^2} = \sqrt{16 + (-5 + \frac{19}{3})^2} =$
$= \sqrt{16 + (\frac{4}{3})^2} = \sqrt{16 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{\sqrt{160}}{3} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$.

Par conséquent, la longueur totale du chemin est ① + ② + ③ =
$= 6 + \pi\sqrt{10} + \frac{4\sqrt{10}}{3} = 6 + (\pi + \frac{4}{3})\sqrt{10} \cong 20{,}15$.

Partie B

1. $B(1;b)$ appartient à $d_1: 7x + 4y - 27 = 0 \Rightarrow 7\cdot 1 + 4b - 27 = 0 \Rightarrow 4b = 20 \Rightarrow b = 5$.

2. L'équation de d_2 est de la forme $y = mx + h$, où $m = -\frac{2}{3}$ est la pente
$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + h$.
Elle passe par $A(-1;2) \Rightarrow 2 = -\frac{2}{3}\cdot(-1) + h \Rightarrow h = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.
L'équation de d_2 est donc $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 3y = -2x + 4 \Rightarrow 2x + 3y - 4 = 0$.

3. $C(x;y)$ avec
$$d_1: 7x + 4y - 27 = 0 \xrightarrow{\cdot 3} 21x + 12y - 81 = 0$$
$$d_2: 2x + 3y - 4 = 0 \xrightarrow{\cdot(-4)} -8x - 12y + 16 = 0 \quad +$$
$$13x - 65 = 0 \Rightarrow 13x = 65 \Rightarrow x = 5$$
$x = 5 \Rightarrow 2\cdot 5 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow 3y = -6 \Rightarrow y = -2$.
On a ainsi $C(5;-2)$.

4. On a aire du triangle $ABC = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})\right|$.
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$,
$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) - 3\cdot 6 = -8 - 18 = -26$.

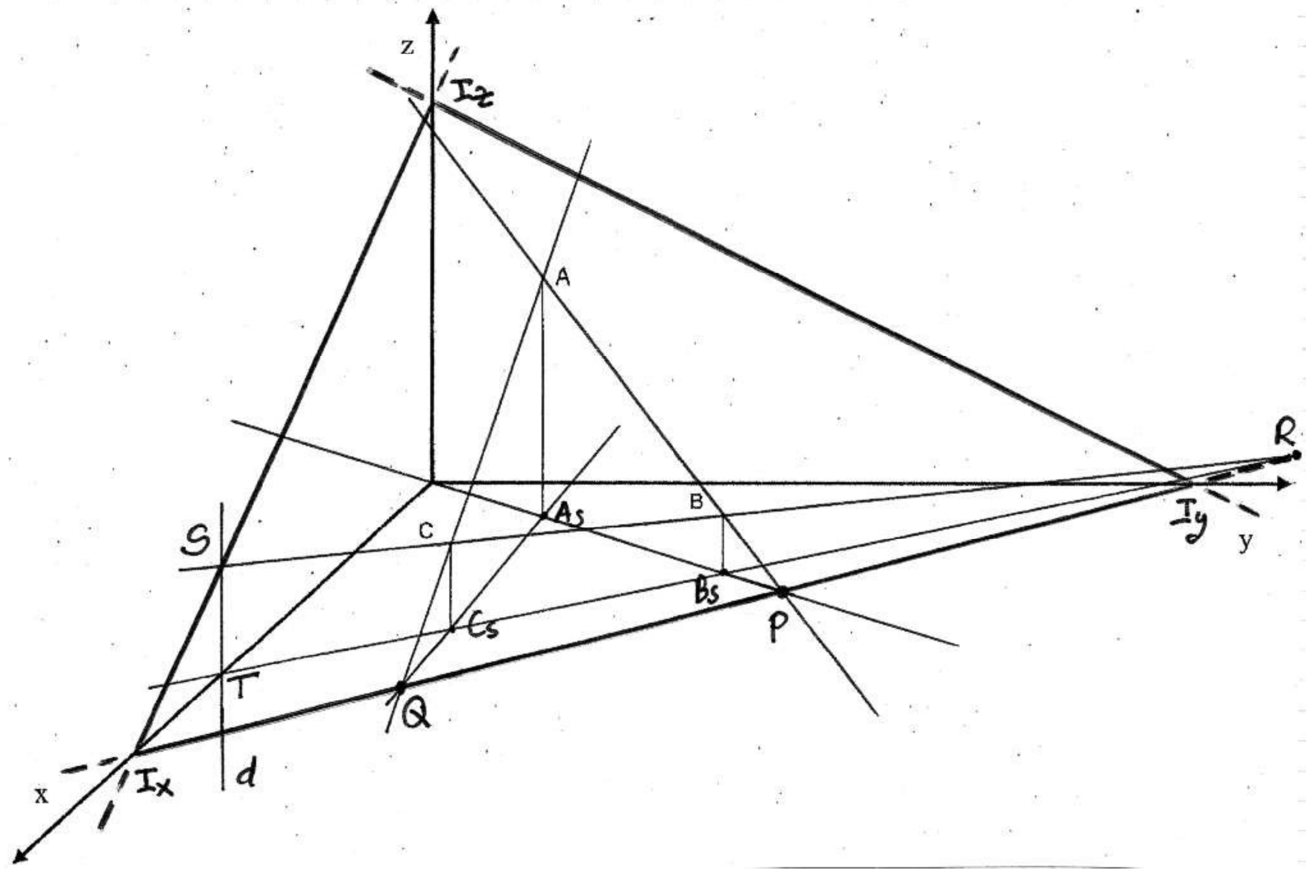
Ainsi l'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}\cdot 26 = 13$.

L'angle α au sommet A est donné par $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}$.

On a : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix} = 2\cdot 6 + 3\cdot(-4) = 0.$

Ainsi $\cos(\alpha) = 0 \implies \alpha = 90°.$

Problème 3



A_S est la projection de A dans le sol, B_S celle de B et C_S celle de C.
P est l'intersection des droites passant par A et B et par A_S et B_S. P appartient à la trace de Π dans le sol.
Q est l'intersection des droites passant par A et C et par A_S et C_S. Q appartient à la trace de Π dans le sol.
La droite passant par P et Q est la trace de Π dans le sol.
I_x est l'intersection de cette droite avec l'axe x et I_y celle avec l'axe y.
R est l'intersection des droites passant par B et C et par B_S et C_S.
T est l'intersection de la droite passant par B_S et C_S et l'axe x.
d est la droite verticale passant par T.
S est l'intersection de la droite passant par B et C et de la droite d. S appartient à la trace de Π dans la paroi.
I_z est l'intersection de la droite passant par I_x et S (trace de Π dans la paroi) et de l'axe y.
La trace de Π dans le mur est la droite passant par I_x et I_y.

Problème 4

Partie A

a) $\text{prob}(\text{pas de contrôle mardi}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$.

b) $\text{prob}(\text{au moins un contrôle dans la semaine}) = 1 - \text{prob}(\text{aucun contrôle dans la semaine}) =$

$= 1 - \text{prob}(\text{pas de contrôle mardi}) \cdot \text{prob}(\text{pas de contrôle mercredi}) \cdot \text{prob}(\text{pas de contrôle jeudi}) =$

$= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \cong 57,81\%$.

c) $\text{prob}(\text{contrôle mercredi}) = \text{prob}(\text{contrôle mardi}) \cdot \text{prob}(\text{contrôle mercredi}) +$

$+ \text{prob}(\text{pas contrôle mardi}) \cdot \text{prob}(\text{contrôle mercredi}) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} + \frac{3}{16} = \frac{7}{32} \cong 21,88\%$.

d) $\text{prob}(\text{contrôle mardi} \mid \text{contrôle mercredi}) = \dfrac{\text{prob}(\text{contrôles mardi et mercredi})}{\text{prob}(\text{contrôle mercredi})} =$

$= \dfrac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}}{7/32} = \dfrac{1/32}{7/32} = \frac{1}{7} \cong 14,29\%$.

Partie B

a) On utilise la loi binomiale: $C_2^6 \left(\frac{24}{100}\right)^2 \left(1 - \frac{24}{100}\right)^4 = 15 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^2 \left(\frac{19}{25}\right)^4 \cong 28,82\%$.

b) On peut faire un tableau:

	OC chinois	pas OC chinois	total
OC histoire	⑤ 12%	④ 21%	33 %
pas OC histoire	③ 12%	55%	② 67%
total	24%	① 76%	100%

① $100\% - 24\% = 76\%$

② $100\% - 33\% = 67\%$

③ $67\% - 55\% = 12\%$

④ $76\% - 55\% = 21\%$

⑤ $24\% - 12\% = 12\%$ ou $33\% - 21\% = 12\%$

Ainsi, il y a 12% des élèves qui ont choisi à la fois OC chinois et OC histoire.