EXERCICE 1 – MESURES DE L'ANCIEN TEMPS (4 PTS)

Voici un tableau d'équivalences de mesures

Ancienne mesure	Exprimée en fonction du pot	Exprimée en litres	
1 pot	= 1 pot	= 1,90625 ℓ = $1\,{}^{29}/_{32}$ litres	
1 bouteille	= ½ pot	= 0,953125 ℓ = $^{61}/_{64}$ litres	: 2
1 quart de pot	= ¼ pot	= 0,4765625 ℓ = $^{61}/_{128}$ litres	: 2
1 demi-quart de pot	= ⅛ pot	= 0,23828125 ℓ = $^{61}/_{256}$ litres	: 2
1 brochet	= 8 pots	= 15 ¼ litres	
1 setier	= 16 pots	= 30 ½ litres	. 2
1 brande	= 20 pots	= 38,125 litres = 38 ⅛ litres	
1 gerle	≅ 38,295 pots = $38\,{}^{18}/_{61}$ pots	= 73 litres	
1 muid	= 192 pots	= 366 litres	
1 bosse	= 480 pots	= 915 litres	

Source: Musée de la vigne du Landeron

$\cdot \frac{61}{32} = \cdot\, 1,90625$

1. Compléter le tableau ci-dessus.

2. En 1986, la gerle passe à 100 litres.
   Calculer l'augmentation du volume de la gerle (exprimée en pourcentage).

Avant : 1 gerle = 73 litres

En 1986 : 1 gerle = 100 litres

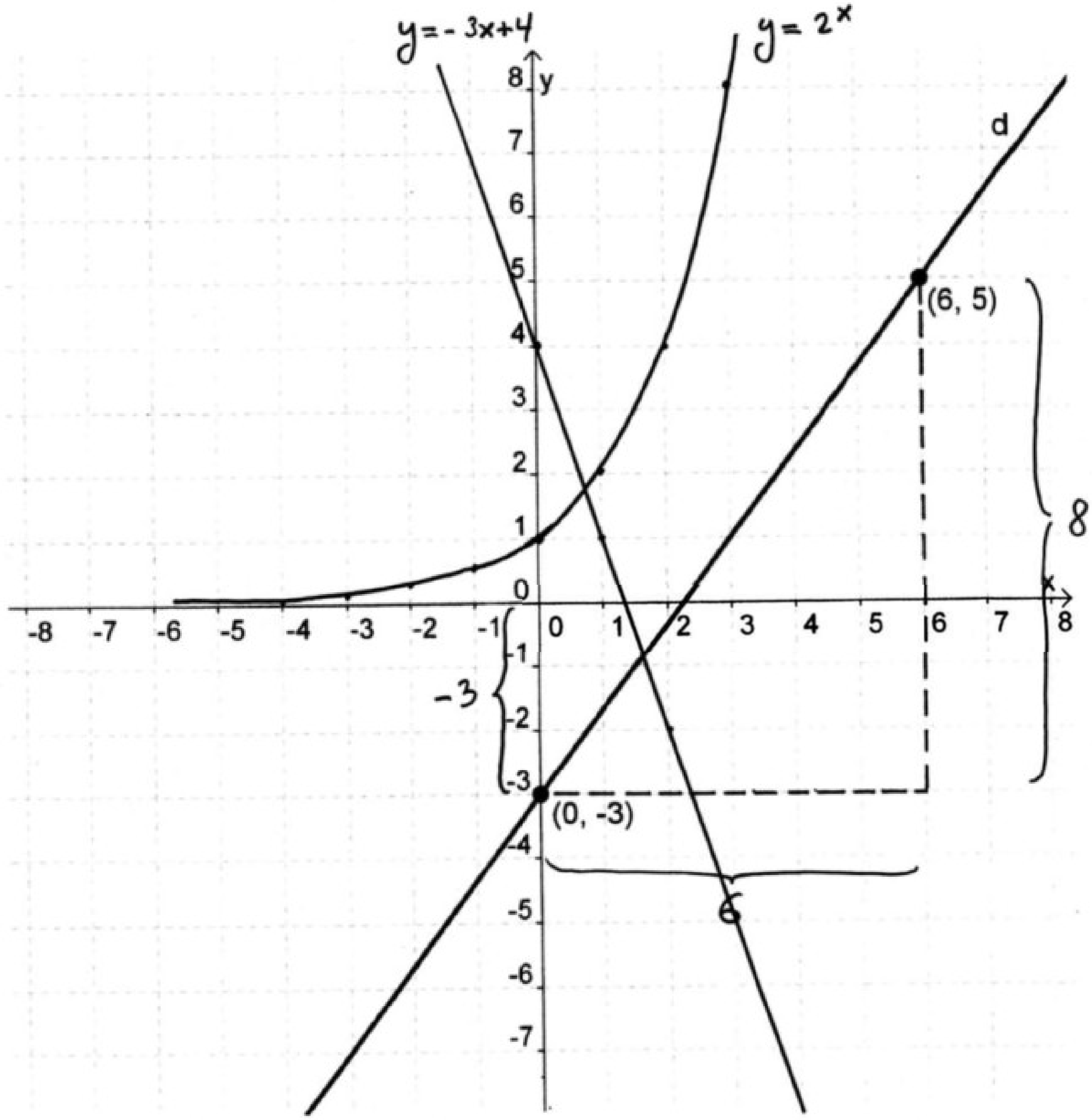
Augmentation absolue : 100 − 73 = 27 litres

Augmentation relative : $\frac{27}{73} \cdot 100 = \frac{2700}{73} \cong \underline{\underline{36,986\ \%}}$.

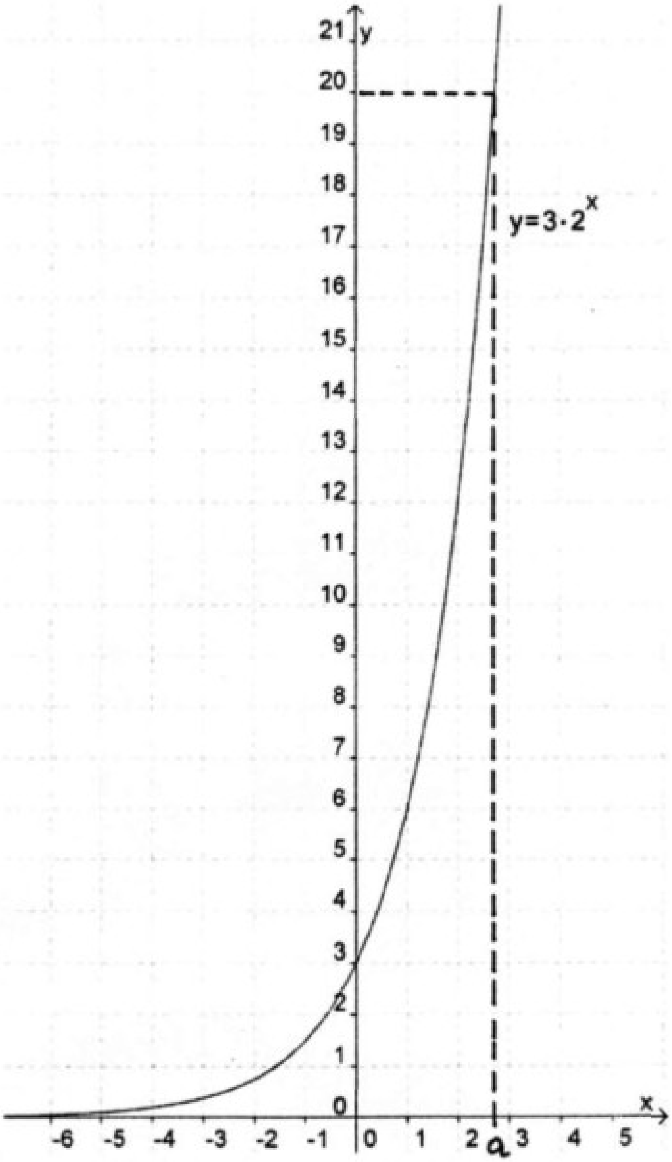
EXERCICE 2 (6 PTS)

1. Représenter graphiquement les fonctions d'équation
   a. $y = -3x + 4$
   b. $y = 2^x$
2. Donner l'équation de la droite d dessinée ci-dessous.

On a d: $y = mx + h$, où m est la pente et h à l'ordonnée à l'origine.
Pente: $m = \frac{8}{6} = \frac{3}{4}$. Ordonnée à l'origine: $h = -3$
Donc : $\underline{d: \ y = \frac{3}{4}x - 3.}$



EXERCICE 3 (5 PTS)



1. Indiquer sur ce graphique, le point correspondant à l'équation :

$3 \cdot 2^x = 20$: $x = a$

2. Résoudre par calcul l'équation :

$$3 \cdot 2^x = 20 \quad \Big| \ :3$$
$$2^x = \frac{20}{3} \quad \Big| \ \log_2(\ )$$
$$x = \log_2\left(\frac{20}{3}\right)$$

Donc $x = \log_2\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{\log(20)}{\log(3)} =$

$\cong \frac{1,301}{0,477} = \underline{\underline{2,727}}.$

3. Combien de solution(s) possède l'équation : $3 \cdot 2^x = -20$?
(Sans justification)

$3 \cdot 2^x = -20$ n'a <u>aucune solution</u> car $2^x > 0$ pour toute valeur de x.

EXERCICE 4 (7 PTS)

Résoudre les équations suivantes :

1. $3x^2 = 5x + 24 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 24 = 0$, équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où $a = 3$, $b = -5$ et $c = -24$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-24) = 25 + 288 = 313$.

Ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+\sqrt{313}}{2 \cdot 3} = \dfrac{5+\sqrt{313}}{6} \cong 3{,}782$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{313}}{2 \cdot 3} = \dfrac{5-\sqrt{313}}{6} \cong -2{,}115$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x = \dfrac{5+\sqrt{313}}{6} \cong 3{,}782 \text{ et } x = \dfrac{5-\sqrt{313}}{6} \cong -2{,}115}}$.

2.

$(h-1)^2 - 5 \cdot (h+2)(h-2) - 21 = 0$	identités remarquables
$h^2 - 2h + 1 - 5(h^2 - 4) - 21 = 0$	distributivité
$h^2 - 2h + 1 - 5h^2 + 20 - 21 = 0$	réduction
$-4h^2 - 2h = 0$	$: (-2)$
$2h^2 + h = 0$	mise en évidence
$h(2h+1) = 0$	

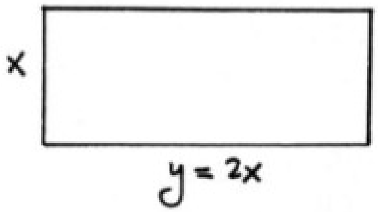
Ainsi : soit $h = 0$, soit $2h + 1 = 0 \Rightarrow 2h = -1 \Rightarrow h = -\frac{1}{2}$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{h = 0 \text{ et } h = -\frac{1}{2}}}$.

EXERCICE 5 (5 PTS)

1. Jean a une maison rectangulaire d'une superficie de 118,58 m². On sait que la longueur de cette maison correspond au double de sa largeur.

   Donner les dimensions de cette maison.



On doit avoir : $x \cdot y = 118{,}58 \Rightarrow x \cdot 2x = 118{,}58$

$\Rightarrow 2x^2 = 118{,}58 \Rightarrow x^2 = 59{,}29 \Rightarrow x = 7{,}7\,m$

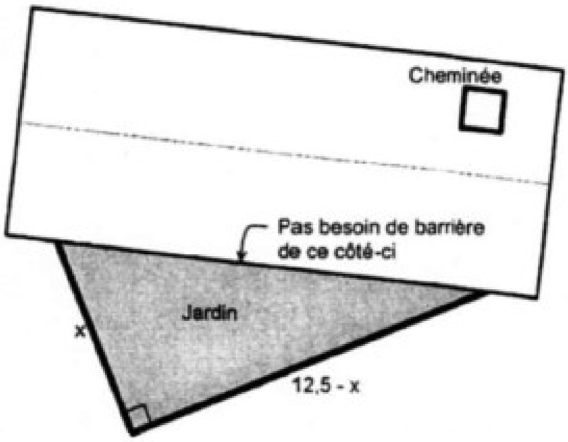
$\Rightarrow y = 2 \cdot 7{,}7 = 15{,}4\,m.$

Ainsi, les dimensions sont $\underline{\underline{7{,}7\,m \text{ sur } 15{,}4\,m.}}$

2. La maison de Jean a un jardin potager triangulaire accolé à la maison selon le schéma ci-contre.

   Jean ne dispose que de 12,5 m de barrière pour en marquer la limite.

   Quelle valeur donner à x pour que la surface de ce potager soit maximale ?



La surface (l'aire) du potager est $\frac{x \cdot (12{,}5 - x)}{2} = \frac{12{,}5x - x^2}{2} =$

$= \frac{12{,}5}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{25}{4}x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{25}{4}x.$

C'est l'équation d'une parabole tournée vers le bas : $\cap$.

Une parabole de la forme $y = ax^2 + bx + c$ a son sommet $(x_s ; y_s)$ en $x_s = -\frac{b}{2a}$.

Ici : $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{25}{4}$.

On a donc $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{25/4}{-1} = \frac{25/4}{1} = \frac{25}{4} = 6{,}25\,m$

$\Rightarrow$ avec $\underline{\underline{x = 6{,}25\,m}}$, la surface du potager est maximale.

EXERCICE 6 (6 PTS)

1. Dessiner la parabole d'équation $y = (x-3)^2 - 4$ en indiquant les coordonnées des intersections avec les axes et du sommet.

Intersection avec l'axe x :

On pose $y=0$

$\Rightarrow (x-3)^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x-3)^2 = 4$

$\Rightarrow x-3 = \pm 2$

$\Rightarrow x = 5$ ou 1

$\Rightarrow (5;0)$ et $(1;0)$

Avec l'axe y :

On pose $x=0$

$\Rightarrow y = (-3)^2 - 4 = 9-4 = 5$

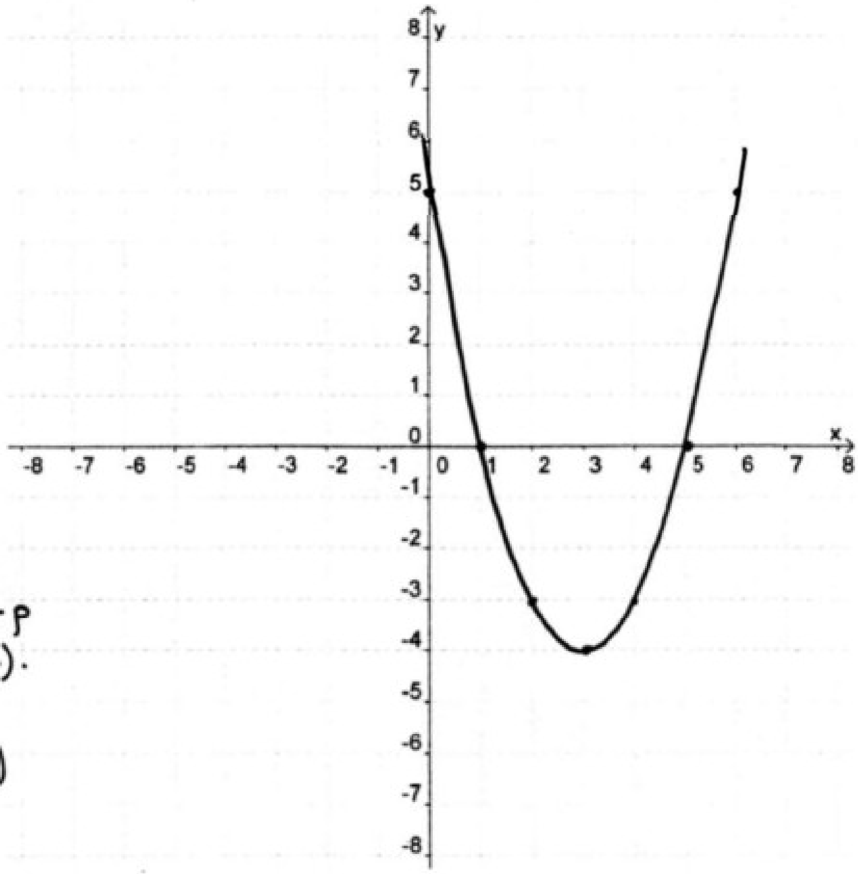
$\Rightarrow (0;5)$

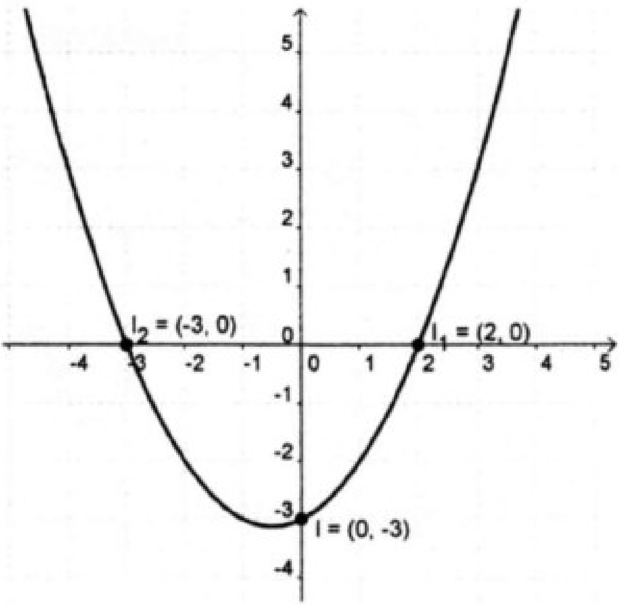
Sommet :

La parabole $y=(x-m)^2+p$ a pour sommet $(m;p)$.

Ici $m=3$ et $p=-4$

$\Rightarrow$ sommet $= (3;-4)$





2. Est-ce que l'équation de la parabole dessinée ci-contre est $y = (x-2)(x+3)$? Justifier.

Intersection avec l'axe x : on pose $y=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+3)=0 \Rightarrow$ soit $x-2=0 \Rightarrow x=2$, soit $x+3=0 \Rightarrow x=-3 \longrightarrow$ ok.

Intersection avec l'axe y : on pose $x=0$

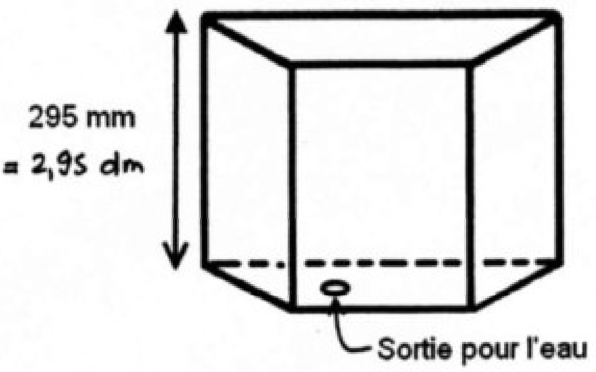
$\Rightarrow y=(0-2)(0+3) = -2\cdot 3 = -6 \longrightarrow$ pas ok.

$\Rightarrow$ la parabole dessinée n'est pas $y=(x-2)(x+3)$.

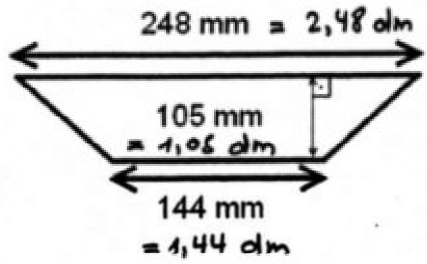
EXERCICE 7 (11 PTS)

Voici un schéma du réservoir d'une machine à café, vu de derrière et de dessus :

Vue depuis derrière



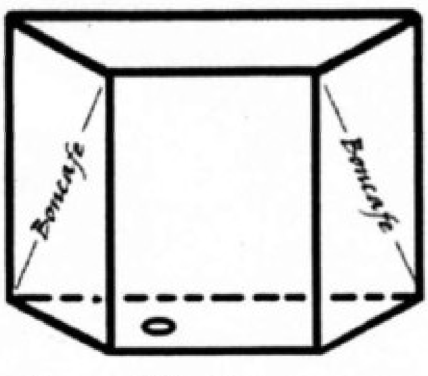
Vue depuis dessus: c'est un trapèze isocèle



1. Quelle est la capacité de ce réservoir (réponse en litres) ?

Calculons le volume du réservoir. C'est un prisme droit à base trapèze.
Son volume est aire de base · hauteur. La hauteur est 2,95 dm.
L'aire de base est $\frac{2,48+1,44}{2}\cdot 1,05 = 1,96\cdot 1,05 = 2,058\ dm^2$.
Le volume est donc $2,058 \cdot 2,95 = 6,0711\ dm^3$.
Comme $1\ dm^2 = 1\ l$, la capacité du réservoir est <u>6,0711 litres.</u>

2. On désire imprimer le logo de la marque sur la partie latérale de ce réservoir.

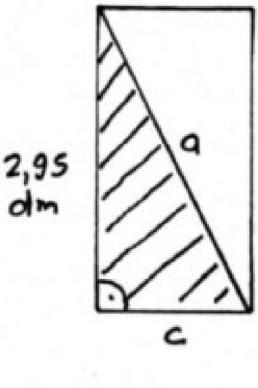


Le logo:

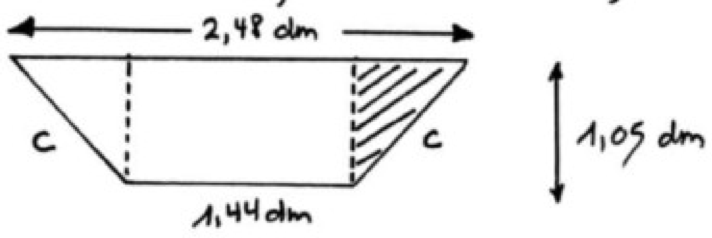
——Boncafe——

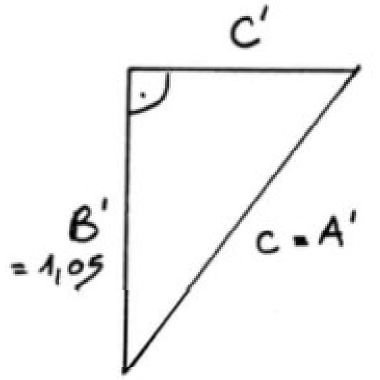
Quelle peut être la longueur maximale de ce logo ?

Il faut calculer la diagonale de la face en question:
Si on connaît les 2 côtés de l'angle droit, grâce au théorème de Pythagore, on peut calculer le 3^e côté; autrement dit, si on connaît b et c, on aura $a^2 = b^2 + c^2$;
on sait que b= 2,95 dm; calculons c:



c est le côté incliné du trapèze isocèle base du prisme droit :





dans le petit triangle rectangle ci-dessus, on a :

$C' = \frac{2,48 - 1,44}{2}$ (puisque le trapèze est isocèle)

$= 0,52$ dm ;

avec le théorème de Pythagore, on a $A'^2 = B'^2 + C'^2$

$\Rightarrow c^2 = 1,05^2 + 0,52^2 = 1,1025 + 0,2704 = 1,3729$

$\Rightarrow c = \sqrt{1,3729} \cong 1,1717$ dm ;

en revenant au 1er triangle rectangle (voir page précédente), on a :

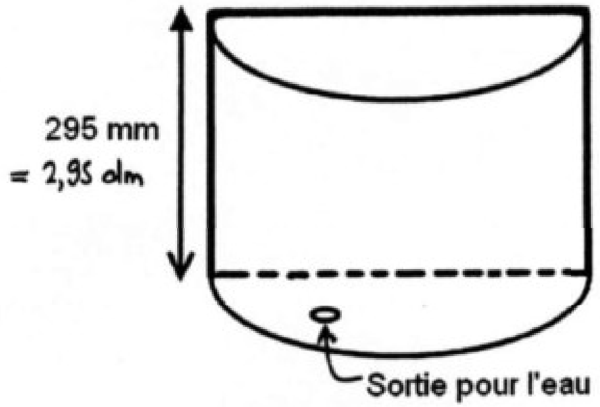
$a^2 = b^2 + c^2 = 2,95^2 + 1,1717^2 = 8,7025 + 1,3729 = 10,0754$

$\Rightarrow a = \sqrt{10,074} = 3,174$ dm.

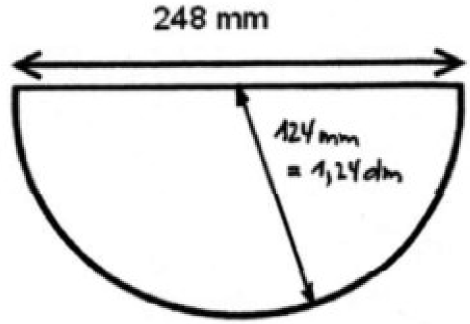
Donc la longueur maximale du logo est $\underline{\underline{3,174 \text{ dm}}}$.

3. L'entreprise fabrique aussi ce modèle en version Deluxe. Le réservoir est différent :

Vue depuis derrière



Vue depuis dessus: c'est un demi-cercle



A-t-il une capacité plus grande ou plus petite que celui du modèle standard ? Justifier.

Calculons le volume de ce modèle Deluxe : c'est un demi-cylindre de rayon $r = 1{,}24$ dm et de hauteur $h = 2{,}95$ dm ; son volume est donné par :

$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \frac{1}{2}\pi \cdot 1{,}24^2 \cdot 2{,}95 = 7{,}125 \text{ dm}^3 = 7{,}125 \ \ell$.

La capacité du modèle standard est de 6,0711 ℓ (voir 1.).

La capacité du modèle Deluxe est donc <u>plus grande</u> que celle du modèle standard.

4. Combien de tasses à café pleines, d'une capacité de 1,75 dl, peut-on remplir avec la totalité d'un réservoir du modèle Deluxe ?
(Sans réponse au point 3., prendre 7'125'006,5 mm³ pour le volume du réservoir)

La capacité d'un modèle Deluxe est de 7,125 ℓ (voir 3.).

On a $7{,}125 \ \ell = 71{,}25$ dl.

Ainsi : $71{,}25 : 1{,}75 = 40{,}714$.

Donc, on peut remplir entièrement <u>40 tasses.</u>

EXERCICE 8 (13 PTS)

Le tableau ci-dessous présente le salaire mensuel brut de la population active en Suisse. (Les colonnes vides sont à votre disposition)

Classe de salaire (en CHF)	Effectif (en milliers)	Salaire	Effectifs cumulés	Pourcentages cumulés
[0 ; 2'000[	600	600.1000 = 600'000	600	$\frac{600}{4350}\cdot 100 = 13,79\%$
[2'000 ; 4'000[	1'000	1000. 3000 = 3'000'000	1600	$\frac{1600}{4350}\cdot 100 = 36,78\%$
[4'000 ; 5'000[	900	900. 4500 = 4'050'000	2500	$\frac{2500}{4350}\cdot 100 = 57,47\%$
[5'000 ; 6'000[	700	700. 5500 = 3'850'000	3200	$\frac{3200}{4350}\cdot 100 = 73,56\%$
[6'000 ; 8'000[	600	600. 7000 = 4'200'000	3800	$\frac{3800}{4350}\cdot 100 = 87,36\%$
[8'000 ; 10'000[	300	300.9000 = 2'700'000	4100	$\frac{4100}{4350}\cdot 100 = 94,25\%$
[10'000 ; 18'000[	200	200.14000 = 2'800'000	4300	$\frac{4300}{4350}\cdot 100 = 98,85\%$
[18'000 ; 19'000[	50	50.18500 = 925'000	4350	100%
Total	4'350	22'125'000		

1. Calculer le salaire moyen et le salaire médian.

Salaires totaux = 22'125'000.

Effectif total = 4350.

Salaire moyen = 22'125'000 : 4350 ≅ <u>5086,2.</u>

Effectif total = 4350.

Moitié de l'effectif total = 4350 : 2 = 2175.

2175 se trouve dans la classe [4000 ; 5000[.

2175 − 1600 = 575.

Le salaire médian est le 575e sur 900 de la classe [4000 ; 5000[.

Ainsi le salaire médian est $4000 + \frac{575}{900}(5000-4000) =$

$= 4000 + 0,63\overline{8}\cdot 1000 = 4000 + 638,9 = \underline{\underline{4638,9}}.$

2. Compléter la phrase suivante:
   90% de la population suisse gagne moins de ...8766,65..... CHF / mois.
   Justifier à l'aide d'un calcul.

Cherchons x tels que $\frac{x}{4350} \cdot 100 = 90\,\%$: $\frac{x}{4350} = 0{,}9 \Rightarrow x = 3915$.

Les 90% de la population correspondent donc à 3915 salariés.

Cherchons le salaire du 3915^e salarié.

Il est dans la classe [8000 ; 10000 [.

On a $3915 - 3800 = 115$.

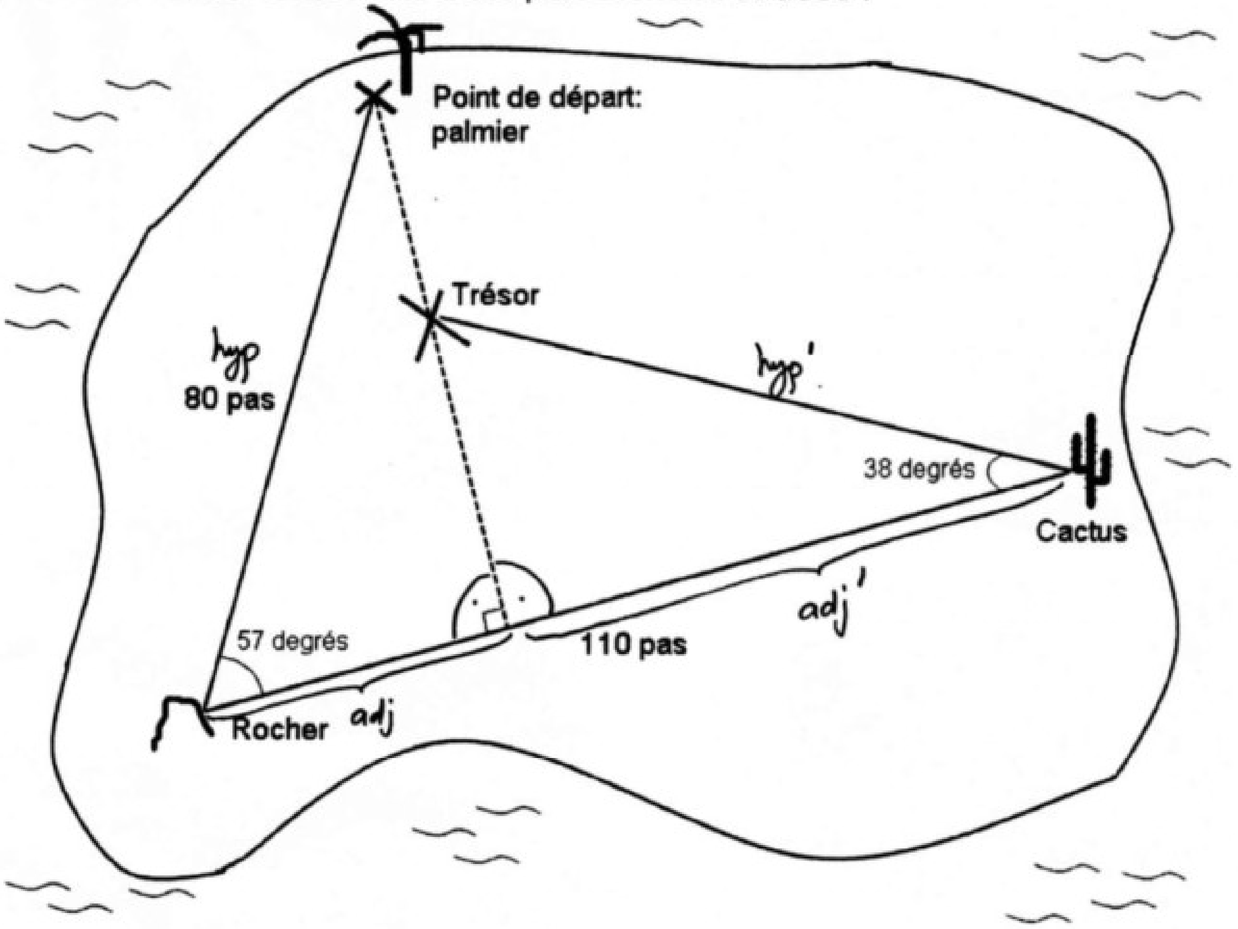
Le salaire du 3915^e salarié est $8000 + \frac{115}{300} \cdot (10000 - 8000) =$

$$= 800 + \frac{115}{300} \cdot 2000 = 8000 + 766{,}\overline{6} = 8766{,}65.$$

J'ai le résultat.

EXERCICE 9 (8 PTS)

Barberouge, le pirate, a caché un trésor sur une île. Malheureusement, la carte qui permet de retrouver ce trésor a été partiellement effacée :



1. A quelle distance le trésor se trouve-t-il du cactus ?

Dans le triangle rectangle de gauche, on a : $\cos(57°) = \frac{adj}{80}$

$\Longrightarrow adj = 80 \cdot \cos(57°) = 43{,}57$ pas.

Ainsi $adj' = 110 - adj = 110 - 43{,}57 = 66{,}43$ pas.

Dans le triangle rectangle de droite, on a : $\cos(38°) = \frac{adj'}{hyp'}$

$\Longrightarrow \cos(38°) = \frac{66{,}43}{hyp'} \Longrightarrow \cos(38°) \cdot hyp' = 66{,}43$

$\Longrightarrow hyp' = \frac{66{,}43}{\cos(38°)} = 84{,}3$ pas.

Donc, la distance entre le trésor et le cactus est de <u>84,3 pas.</u>